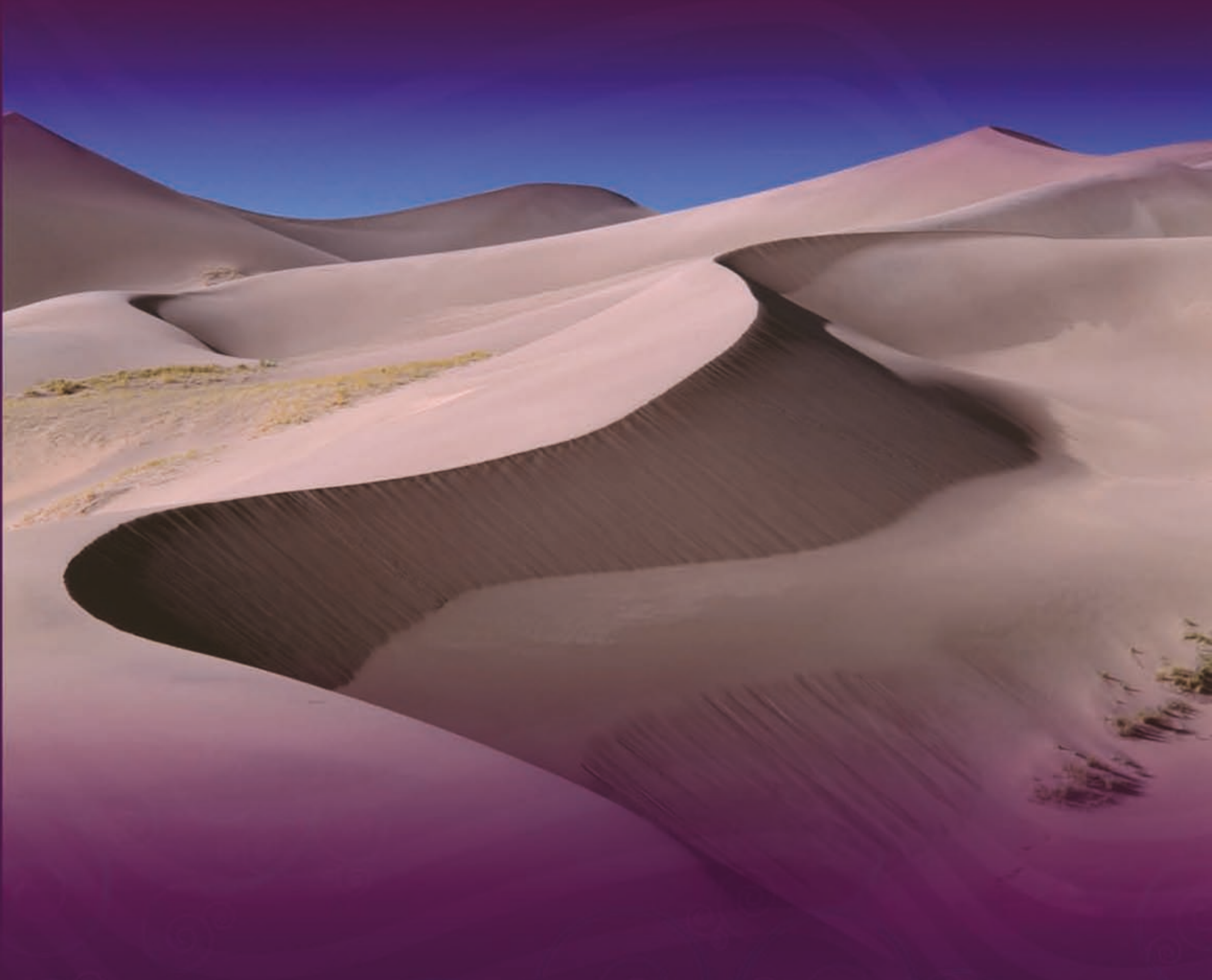
ECUACIONES
Diferenciales

quinta edición



Isabel Carmona Jover
Ernesto Filio López

PEARSON

Ecuaciones diferenciales

Ecuaciones diferenciales

Isabel Carmona Jover
Ernesto Filio López

REVISIÓN TÉCNICA

María de Jesús Rivera Flores
Instituto Tecnológico de Hermosillo

Félix Rodrigo Villegas Valenzuela
Instituto Tecnológico de Sonora

Jorge Sierra Cavazos
Ruth Rodríguez Gallegos
Salvador García Lumbreras
Víctor Segura Flores
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Campus Monterrey

José Manuel Nieto Jalil
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Campus Sonora Norte

Addison-Wesley

México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

Ecuaciones diferenciales
Isabel Carmona Jover, Ernesto Filio López

Quinta edición

Pearson Educación, México, 2011
ISBN: 978-607-32-0206-0
Área: Matemáticas
Formato: 20 × 25.5 cm. Páginas: 536

Editor: Rubén Fuerte Rivera
e-mail: ruben.fuerte@pearsoned.com
Editor de desarrollo: Felipe Hernández Carrasco
Supervisor de producción: Juan José García Guzmán

QUINTA EDICIÓN, 2011

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 1031

ISBN VERSIÓN IMPRESA: 978-607-32-0206-0
ISBN VERSIÓN E-BOOK: 978-607-32-0207-7
ISBN E-CHAPTER: 978-607-32-0208-4

Impreso en México. *Printed in Mexico*.
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 13 12 11 10

Addison-Wesley
es una marca de

PEARSON

Prólogo a la cuarta edición

El mundo es, en todas sus partes, una aritmética
viviente en su desarrollo, y una geometría
realizada en su reposo.

PLATÓN: "TIMEO"

Desde tiempo inmemorial, la matemática ha ejercido una fascinación especial sobre la mente humana. Casi todo ser que se enfrenta a ella toma partido, a favor o en contra: a favor por lo sugerente de su eficacia y la hermosura de su constitución; en contra, por sentirse, quizás, ante una tarea superior a las propias fuerzas.

Voy a decir algo a aquellas personas que piensan que la matemática no es para ellas: el cerebro del hombre trabaja exactamente como una estructura matemática, pues obtiene conclusiones acerca de hechos o suposiciones lógicas, compara, infiere, calcula, acopia datos, proyecta, mide, la mayor parte de las veces usando leyes lógicas, algebraicas, topológicas y otras que constituyen la base de esta formidable ciencia. La matemática posee, a su vez, tal armonía, proporción, exactitud y belleza que se identifica con la "música de las esferas", citando libremente a Pitágoras.

El libro que está en sus manos en este momento pretende presentarle una introducción, a nivel elemental y básico, de una parte de la matemática sumamente útil y aplicable a casi todas las ramas del saber: las ecuaciones diferenciales.

El texto contiene la exposición y desarrollo de las ecuaciones diferenciales de primero y segundo orden, enfatizando las aplicaciones de las primeras. También se estudian ecuaciones de orden superior a dos y se desarrollan los métodos de series y transformadas de Laplace.

El libro contiene problemas resueltos y ejercicios para que el estudiante ponga a prueba su aptitud y, cuando resuelva los de opción múltiple, podrá aquilatar la precisión del resultado evitando caer en errores bastante comunes. Cada capítulo contiene un *resumen* y un *examen de autoevaluación*; este último con un nivel de conocimiento medio, suficiente para detectar una clara comprensión del texto. Además, en esta quinta edición, aparecen algunas soluciones con el uso de computadoras utilizando Matemáticas 7, incorporando soluciones gráficas.

Se ha procurado rodear a cada capítulo de un ambiente humanístico mediante biografías, comentarios, curiosidades y pasatiempos.

El requisito para leer este libro es conocer el cálculo diferencial e integral.

Este libro nació, creció y salió a la luz gracias a la colaboración de mis maestros, colegas y alumnos, de mis amigos y de mi familia. Cada uno de ellos aportó lo que a su área competía. Especialmente agradezco al licenciado Juan Manuel Silva Ochoa, maestro, colega y amigo, su apoyo en todo momento y al doctor Christian Garrigoux Michel por su participación en la redacción de las biografías.

Espero del amable lector todas las sugerencias que mejoren esta obra que deseo disfrute y le sea útil en su formación profesional y en su trabajo.

Prólogo a la quinta edición

Vivimos en un planeta que necesita renovarse para alcanzar las metas de plenitud que por impulso interior tiene que alcanzar. El libro que tiene usted en sus manos ha madurado a través de los años, ayudando a muchas personas a comprender un poco mejor los temas que trata.

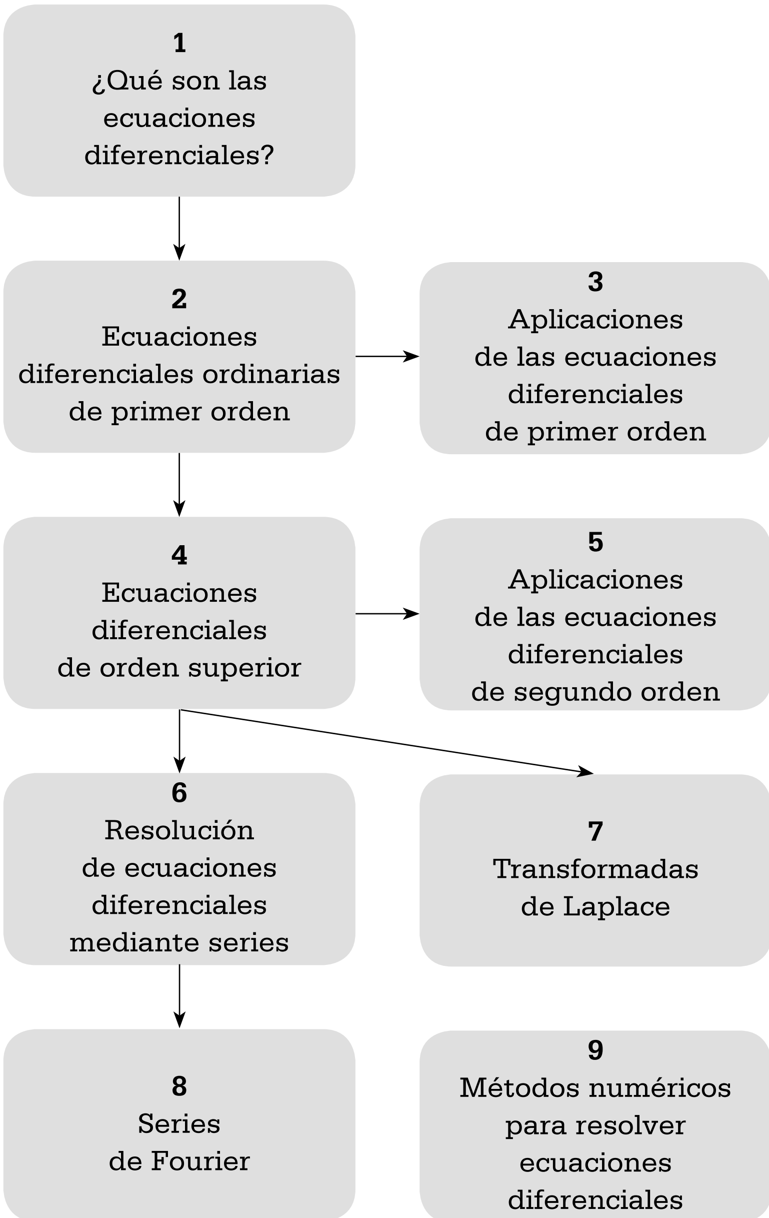
La revisión efectuada tiene por objetivo agregar algunas soluciones con el uso de computadoras utilizando el software Mathematica e incorporando soluciones gráficas. Se busca favorecer la rápida aproximación de las gráficas y así obtener el esquema exacto de los fenómenos de movimiento que se presentan en el área de ingeniería. También, una vez que se haya expuesto la teoría para la comprensión de los temas y se hayan resuelto algunos ejemplos, se presentan los comandos necesarios para resolver otros ejercicios.

Se añadieron, asimismo, algunos conceptos y se corrigieron aspectos señalados por los profesores para que el aprendizaje sea eficaz, sin perder por ello la riqueza didáctica e incluso amena que se procuró desde el primer momento.

Agradecemos la colaboración del doctor Jorge Sierra Cavazos y del doctor Salvador García Lumbreras en la revisión del texto, cuyo esfuerzo significa una invaluable aportación. También damos las gracias a la casa editorial Pearson Educación que tan amablemente nos brindó su apoyo y confianza.

ISABEL CARMONA JOVER
VÍCTOR SEGURA FLORES

Estructura lógica de los capítulos



Contenido

1 ¿Qué son las ecuaciones diferenciales?

Georg Friedrich Riemann
(1826-1866)

¿Cómo resolver una ecuación diferencial?

Definiciones básicas

Existencia y unicidad de las soluciones

— – — – —
—
– —
— —
– –
– — – — –

Lo que precede en el ladillo escrito en clave Morse, es la frase que tarde o temprano decimos y la que todos queremos oír: es un *lenguaje*.

Para representar la realidad en movimiento usamos también una clave especial, una simbología sintética que nos informa acerca de una velocidad, de un ascenso de temperatura, de un aumento de población, de un monto de intereses, hasta del menor cambio en cualquier aspecto de nuestro planeta. Las realidades cambiantes, antes mencionadas, tienen en común que son variaciones a través del tiempo, esa dimensión inmutable (en el sentido de la cuarta dimensión) en la cual se mueven la materia y la conciencia.

Así pues, en matemáticas usamos el *lenguaje* de las ecuaciones diferenciales para los hechos y los datos cambiantes.

¿Cómo resolver una ecuación diferencial?

Hay dos maneras de aprender a patinar sobre hielo. *Primera*: En una librería se compra uno de los siguientes manuales: *Cómo dominar el patinaje en 15 lecciones; Patinar y rascar, todo es empezar; Historia del patinaje sobre hielo en el Paleolítico y sus repercusiones en el mundo moderno; Agarre su patín; El patín, su constitución, desarrollo y reforzamiento, con bibliografía e ilustraciones a todo color*; se va uno a casa se instala en su lugar favorito y se sumerge en la lectura sin olvidar tomar apuntes, hacer análisis comparativos y aplicar el cálculo de probabilidades hasta agotar todos los aspectos del tema. Llegará un momento en el que ya está uno totalmente capacitado para estrenar los patines —regalo de la abuelita—, momento, repito, en el que quizá ya sufrió uno su primer reuma. *Segunda*: se toma el par de patines y amparándose en el instinto de conservación se lanza uno a la pista helada con los consiguientes riesgos y posibles huesos rotos.

Así se aprenden muchas cosas: *haciéndolas*.

Para resolver una ecuación diferencial primero hay que identificarla y después arriesgarse en su solución. Una realidad dinámica se caracteriza por sus cambios, los cuales se controlan en cálculo por medio de derivadas o diferenciales, por lo que una ecuación que contiene derivadas o diferenciales es una ecuación diferencial. Ya identificada intentemos integrarla, y si eso no resulta como un procedimiento inmediato, apliquemos cambios de variable o transformaciones que lleven a integrales más o menos familiares. Por ejemplo, si tenemos la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x$$

estamos ante una ecuación diferencial que contiene una segunda derivada, por lo que la llamamos de segundo orden. Si integramos

$$\frac{d^2y}{dx^2}=x \;\Rightarrow\; \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=x \;\Rightarrow\; d\left(\frac{dy}{dx}\right)=xdx \;\Rightarrow\; \int d\left(\frac{dy}{dx}\right)=\int xdx \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{2}+c_1$$

Y volvemos a integrar

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{2}+c_1 \;\Rightarrow\; dy=\left(\frac{x^2}{2}+c_1\right)dx \;\Rightarrow\; \int dy=\int\left(\frac{x^2}{2}+c_1\right)dx \;\Rightarrow\; y=\frac{x^3}{6}+c_1x+c_2$$

Obtenemos una función-solución que podemos comprobar al instante con sólo derivarla dos veces:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{6}+c_1x+c_2\right)=\frac{x^2}{2}+c_1$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}+c_1\right)=x$$

Por lo que

$$\frac{d^2y}{dx^2}=x$$

El resultado nos convence de la exactitud del método empleado. Así, en este capítulo se exponen las nociones generales acerca de las ecuaciones diferenciales y el método geométrico para obtener soluciones.

Definiciones básicas

Definición 1.1
Una *ecuación diferencial* es aquella ecuación que contiene *derivadas* o *diferenciales*.

Definición 1.2
Orden de una ecuación diferencial es el de la *derivada* de mayor orden contenida en la ecuación.

Definición 1.3
Grado de una ecuación diferencial es la potencia a la que está elevada la derivada de mayor orden, siempre y cuando la ecuación diferencial esté dada en forma polinomial.

Clasificación de las ecuaciones diferenciales

- **Tipo**
  - **Ordinarias**: La ecuación diferencial contiene derivadas de una o más variables dependientes con respecto a *una sola variable* independiente.
  - **Parciales**: La ecuación diferencial contiene derivadas parciales de una o más variables dependientes con respecto *a dos o más variables* independientes.
- **Orden**
  - Primer orden: $F(x, y, y') = 0$
  - Segundo orden: $F(x, y', y'') = 0$
  - Tercer orden: $F(x, y, y', y'', y''') = 0$
  - .
  - .
  - .
  - Orden n: $F(x, y, y', \ldots, y^{n}) = 0$
- **Grado**
  - **Lineales**:
    a) La variable dependiente y y todas sus derivadas son de primer grado.
    b) Cada coeficiente de y y sus derivadas depende solamente de la variable independiente x.
  - **No lineales**: Las que no cumplen las propiedades anteriores.

Ejemplos de ecuaciones diferenciales				
Ecuación diferencial	*Tipo*	*Orden*	*Grado*	*Lineal*
$\frac{dy}{dx} = 2e^{-x}$	Ordinaria	1	1	Sí
$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t} + kx - \frac{\partial y}{\partial s}$	Parcial	1	1	Sí
$x^2 y'' + xy' + y = 0$	Ordinaria	2	1	Sí
$yy'' + x^2 y = x$	Ordinaria	2	1	No
$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} = c$	Parcial	2	1	Sí
$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + \left(x^2 - v^2\right) y = 0$	Ordinaria	2	1	Sí

(*Continúa*)

(*Continuación*)

Ecuación diferencial	*Tipo*	*Orden*	*Grado*	*Lineal*
$\frac{\partial^4 v}{\partial t^4} = kv\left(\frac{\partial^2 m}{\partial n^2}\right)^2$	Parcial	4	1	No
$\left(y^{v}\right)^3 - y''' + y'' - y^2 = 0$	Ordinaria	5	3	No
$y' + y = \frac{x}{y}$	Ordinaria	1	1	No
$\operatorname{sen} y' + y = 0$	Ordinaria	1	?	No

EJERCICIOS 1.1

Elegir la opción que da la clasificación correcta de las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $y'' + xyy' = \operatorname{sen} x$

a. Ordinaria, orden 2, grado 1, lineal.
b. Parcial, orden 2, grado 1, lineal.
c. Ordinaria, orden 2, grado 1, no lineal.
d. Ordinaria, orden 3, grado −1, no lineal.

2. $c^2\frac{\partial^5 x}{\partial t^5} + \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} = cte$

a. Ordinaria, orden 2, grado 2, lineal.
b. Parcial, orden 5, grado 1, lineal.
c. Parcial, orden 2, grado 2, no lineal.
d. Parcial, orden 2, grado 1, lineal.

3. $x^3yy''' - x^2yy'' + y = 0$

a. Ordinaria, orden 2, grado 1, no lineal.
b. Parcial, orden 2, grado −1, no lineal.
c. Ordinaria, orden 3, grado 1, lineal.
d. Parcial, orden 1, grado 1, lineal.

4. $y'' + 2x^3y' - (x-1)y = xy^{3/2}$

a. Ordinaria, orden 2, grado 1, no lineal.
b. Parcial, orden 2, grado $\frac{3}{2}$, no lineal.
c. Ordinaria, orden 3, grado $\frac{3}{2}$, no lineal.
d. Parcial, orden 3, grado 1, lineal.
e. Ordinaria, orden 3, grado 1, lineal.

5. $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x}{y}$

a. Ordinaria, orden 2, grado 2, no lineal.
b. Parcial, orden 1, grado 2, lineal.
c. Ordinaria, orden 1, grado 2, lineal.
d. Parcial, orden 2, grado 1, no lineal.

Respuestas: 1. *c*; **2**. *b*; **3.** *c*; **4**. *a*; **5**. *d*.

Definición 1.4

Solución de una ecuación diferencial es una función que no contiene derivadas y que satisface a dicha ecuación; es decir, al sustituir la función y sus derivadas en la ecuación diferencial resulta una identidad.

Definición 1.5

Solución general de una ecuación diferencial es la función que satisface a la ecuación y que contiene una o más constantes arbitrarias (obtenidas de las sucesivas integraciones).

Definición 1.6

Solución particular de una ecuación diferencial es la función que satisface la ecuación y cuyas constantes arbitrarias toman un valor específico.

EJEMPLO 1

La función $x + y^2 = c$ es la *solución general* de la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2y}$$

Porque derivándola implícitamente se tiene: $1 + 2y\frac{dy}{dx} = 0$ o bien $2yy' = -1$.
Sustituyendo $y = 2\sqrt{c-x}$ y $y' = -\frac{1}{2y}$ se obtiene una identidad:

$$2\sqrt{c-x}\left(-\frac{1}{2\sqrt{c-x}}\right) = -1 \;\therefore\; -1 = -1$$

EJEMPLO 2

La función $y = e^{-x} + 8$ es *solución particular* de la ecuación diferencial $y' + e^{-x} = 0$ porque derivando la solución y sustituyéndola en la ecuación dada, se obtiene:

$$y' = -e^{-x}$$

$$-e^{-x} + e^{-x} = 0 \;\therefore\; 0 = 0$$

EJEMPLO 3

La función $y = 3x^2 + c_1x + c_2$ es *solución general* de la ecuación diferencial $y'' = 6$, porque:

$$y' = 6x + c_1$$

$$\text{y} \quad y'' = 6 \;\therefore\; 6 = 6$$

EJEMPLO 4

La función $t = 2xy^2 + 3x^2y + g(y) + f(x)$ es la *solución general* de la ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial y \partial x} = 4y + 6x$$

porque $\dfrac{\partial t}{\partial x} = 2y^2 + 6xy + f'(x)$

y $\dfrac{\partial^2 t}{\partial y \partial x} = 4y + 6x$; así que sustituyendo: $4y + 6x = 4y + 6x$.

EJEMPLO 5

La función $y = c_1e^{-x} + c_2e^{x} + c_3e^{-2x} + c_4e^{2x}$ es *solución general* de la ecuación diferencial:

$$y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$$

Porque:

$$\begin{aligned}
y' &= -c_1e^{-x} + c_2e^{x} - 2c_3e^{-2x} + 2c_4e^{2x} \\
y'' &= +c_1e^{-x} + c_2e^{x} + 4c_3e^{-2x} + 4c_4e^{2x} \\
y''' &= -c_1e^{-x} + c_2e^{x} - 8c_3e^{-2x} + 8c_4e^{2x} \\
y^{IV} &= +c_1e^{-x} + c_2e^{x} + 16c_3e^{-2x} + 16c_4e^{2x}
\end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$\underbrace{c_1e^{-x} + c_2e^{x} + 16c_3e^{-2x} + 16c_4e^{2x}}_{y^{IV}}$$

$$\underbrace{-5c_1e^{-x} - 5c_2e^{x} - 20c_3e^{-2x} - 20c_4e^{2x}}_{-5y''}$$

$$\underbrace{+4c_1e^{-x} + 4c_2e^{x} + 4c_3e^{-2x} + 4c_4e^{2x}}_{+4y} = 0 \quad \therefore \quad 0 = 0$$

EJEMPLO 6

La función $y = e^x(3\cos 2x + \text{sen } 2x)$ es *solución particular* de la ecuación diferencial $y'' - 2y' + 5y = 0$, porque:

$$y' = e^x(-6 \text{ sen } 2x + 2\cos 2x) + e^x(3\cos 2x + \text{sen } 2x)$$

$$y'' = e^x(-12\cos 2x - 4 \text{ sen } 2x) + e^x(-6 \text{ sen } 2x + 2\cos 2x) +$$
$$e^x(-6 \text{ sen } 2x + 2\cos 2x) + e^x(3\cos 2x + \text{sen } 2x);$$

sustituyendo:

$$e^x(-12\cos 2x - 4 \text{ sen } 2x) + 2e^x(-6 \text{ sen } 2x + 2\cos 2x) +$$
$$e^x(3\cos 2x + \text{sen } 2x) + e^x(12 \text{ sen } 2x - 4\cos 2x) +$$
$$e^x(-6\cos 2x - 2 \text{ sen } 2x) + e^x(15\cos 2x + 5 \text{ sen } 2x) =$$
$$e^x[-12\cos 2x - 4 \text{ sen } 2x - 12 \text{ sen } 2x + 4\cos 2x + 3\cos 2x + \text{sen } 2x +$$
$$12 \text{ sen } 2x - 4\cos 2x - 6\cos 2x - 2 \text{ sen } 2x + 5 \text{ sen } 2x +$$
$$15\cos 2x] = e^x(0) = 0$$

$\therefore\ 0 = 0.$

EJEMPLO 7

La función definida por tramos

$$y = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

es solución de la ecuación diferencial $(y')^2 = 9xy$ porque

$$y' = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \text{ así que}$$

$$\underbrace{\begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 9x^4 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}_{(y')^2} = 9x \underbrace{\begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}_{y} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 9x^4 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

EJEMPLO 8

El par de funciones $\begin{array}{l} x = e^{-2t} + 3e^{6t} \\ y = -e^{-2t} + 5e^{6t} \end{array}$ es solución del sistema de ecuaciones diferenciales $\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + 3y \end{array}$ porque sustituyendo las derivadas

$\dfrac{dx}{dt} = -2e^{-2t} + 18e^{6t}$ y $\dfrac{dy}{dt} = 2e^{-2t} + 30e^{6t}$ se tiene:

$$x+3y=\underbrace{(e^{-2t}+3e^{6t})}_{x}+3\underbrace{(-e^{-2t}+5e^{6t})}_{y}=-2e^{-2t}+18e^{6t}=\frac{dx}{dt}$$

y

$$5x+3y=5\underbrace{(e^{-2t}+3e^{6t})}_{x}+3\underbrace{(-e^{-2t}+5e^{6t})}_{y}=2e^{-2t}+30e^{6t}=\frac{dy}{dt}$$

EJEMPLO 9

`Mathematica` es de gran ayuda para la verificación de soluciones si el orden de la derivada es muy alto. Por ejemplo, si la función $y=xe^{5x}\cos 2x$ es solución de la ecuación diferencial $y^{iv}-20y'''+158y''-580y'+841y=0$, entonces:

```
In[1]Clear[y]
y[x_]:=x Exp[5x]Cos[2x]
y[x]
y''''-[x]-20y'''[x]+158y''[x]-580y'[x]+841y[x]//
Simplify
Out[3]e5xxCos[2x]
Out[4]841e5xxCos[2x]-580y'[x]+158y''[x]-20y'''[x]+
y''''[x]
```

EJERCICIOS 1.2

Averiguar si las siguientes funciones son solución de la correspondiente ecuación diferencial.

1.	$y=ce^{x}$	de	$y'-y=0$
2.	$y=2e^{-2x}+\frac{1}{3}e^{x}$	de	$y'+2y=e^{x}$
3.	$y=8\ln x+c$	de	$y'=\sqrt{\frac{64}{x^2}}$
4.	$y=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}$	de	$y''-y'-2y=0$
5.	$y=8e^{x}+xe^{x}$	de	$y''-2y'+y=0$
6.	$y=\frac{\operatorname{sen} x}{3x}$	de	$xy'+y=\cos x$
7.	$y-\frac{1}{\cos x}=0$	de	$y'-y\tan x=0$
8.	$y=-\frac{3}{3x+2}$	de	$y'=3y^2$
9.	$y=1+c\sqrt{1-x^2}$	de	$(1-x^2)y'+xy=x$
10.	$y=2x\sqrt{1-x^2}$	de	$yy'=4x-8x^3$
11.	$y=e^{-x}\cos\frac{1}{2}x$	de	$4y''+8y'+5y=0$

12. $y = e^{-x}\cos\frac{1}{2}x$ de $y'' + y' = e^{-x}\cos\frac{1}{2}x$

13. $\left.\begin{array}{l} x = \cos t \\ y = e^{t} \end{array}\right\}$ de $y' + \dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}} = 0$

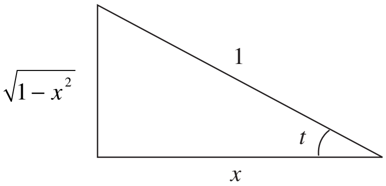
14. $y = \dfrac{x}{\cos x}$ de $xy' - y = x^2 \tan x \sec x$

15. $\left.\begin{array}{l} x = \cos t \\ y = 2\operatorname{sen} t \end{array}\right\}$ de $yy' + 4x = 0$

16. $y = e^{\operatorname{sen}^{-1} 2x}$ de $xy' - y \tan \ln y = 0$

Respuestas: Sí son solución, excepto las de los ejercicios 6, 8 y 12.

NOTA. Usando el triángulo:



Si $x = \cos t \rightarrow \operatorname{sen} t = \sqrt{1-x^2}$

y la regla de la cadena, se pueden verificar algunas de las soluciones anteriores.

Definición 1.7
Solución singular de una ecuación diferencial es una función cuya tangente a su gráfica en cualquier punto (x_0, y_0) con la tangente de otra solución, pero ya no coincide con esta última tangente en ninguna vecindad del punto (x_0, y_0), por pequeña que ésta sea.

Estas soluciones no se obtienen a partir de la solución general. Un método para encontrar dichas soluciones es derivar la ecuación diferencial dada con respecto a y', con lo cual formamos un sistema de ecuaciones:

$$F(x, y, y') = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y'} F(x, y, y') = 0$$

del que, eliminando y', se obtienen una o más soluciones singulares.

EJEMPLO

Hallar las soluciones singulares, si las hay, de la ecuación diferencial:

$$y'^2 = 16x^2$$

Derivando con respecto a y' se tiene:

$$2y' = 0$$

Por lo que $y' = 0$; sustituyendo en la ecuación, se obtiene $x = 0$, que es la solución singular.

En efecto, las soluciones generales de dicha ecuación son:

$$y = 2x^2 + c, \quad y = -2x^2 + c,$$

y para el punto (0, 0) su gráfica es $y = \pm\, 2x^2$

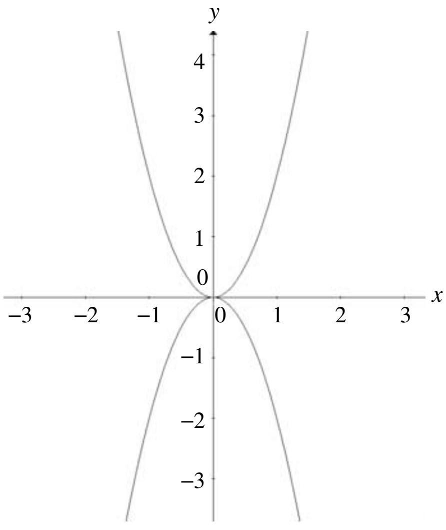


Figura 1-1.

y $x = 0$ es el punto de contacto con las pendientes de

$$y = \pm\, 2x^2$$

en el punto (0, 0).

Algunas soluciones de ecuaciones diferenciales se encuentran sometidas a ciertas condiciones previas que deben satisfacer. Un problema que implica resolver la ecuación

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \ldots, y^{n-1})$$

sometida a

$$y(x_0) = y_0;\ y'(x_0) = y_1;\ \ldots;\ y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}$$

donde $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ son números reales, se llama problema con condiciones iniciales.

Definición 1.8
Problema con valores iniciales es la ecuación diferencial acompañada de condiciones iniciales.

EJEMPLO 1

Resolver la ecuación diferencial:

$$y' - 4xy = 0$$

Para la condición inicial: $y = \frac{1}{5}$ cuando $x = 0$, o bien, brevemente:

$$y(0) = \frac{1}{5}$$

La ecuación puede expresarse como:

$$dy = 4xydx \quad \text{o bien} \quad \frac{dy}{y} = 4xdx,$$

integrando ambos lados de la igualdad, se obtiene:

$$\int \frac{dy}{y} = 4\int xdx$$

$$\ln y = 2x^2 + c$$

$$y = ce^{2x^2}$$

Sustituyendo los valores del punto $\left(0, \frac{1}{5}\right)$, se tiene que:

$$\frac{1}{5} = ce^0 \to c = \frac{1}{5}$$

Por lo que la solución particular es:

$$y = \frac{1}{5}e^{2x^2}$$

EJEMPLO 2

Resolver la ecuación diferencial:

$$y'' = x, \text{ para } y(-2) = 4$$

$$y'(0) = 1$$

Integrando ambos lados de la ecuación se tiene:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = x \;\Rightarrow\; \int d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \int xdx \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} + c_1$$

Y volviendo a integrar:

$$\int dy = \int \left(\frac{x^2}{2} + c_1 \right) dx \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2$$

La cual es una solución general.

Ahora, aplicando las condiciones iniciales dadas:

Para y' $\qquad 1 = 0 + c_1 \rightarrow c_1 = 1$

Para y $\qquad 4 = \frac{-8}{6} - 2c_1 + c_2$

$$4 = \frac{-4}{3} - 2(1) + c_2$$

$$c_2 = \frac{22}{3}$$

$$\therefore\ y = \frac{x^3}{6} + x + \frac{22}{3} \text{ es solución particular.}$$

Comprobación: derivando la solución particular y sustituyendo en la ecuación se tiene

$$y' = \frac{x^2}{2} + 1$$

$$y'' = x.$$

Observación: Se necesita igual número de condiciones iniciales que el del orden de la ecuación diferencial.

EJEMPLO 3

Dada la función:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x}$$

como solución (la forma de obtenerla se estudiará más adelante) de la ecuación diferencial:

$$y''' - 4y'' + y' + 6y = 0$$

encontrar la solución particular para las siguientes condiciones iniciales:

$$y(0) = 4, \;\; y'(0) = -1, \;\; y''(0) = 0$$

$$y(0) = c_1 + c_2 + c_3 \;\; \rightarrow \;\; c_1 + c_2 + c_3 = 4$$

$$y' = 2c_1 e^{2x} - c_2 e^{-x} + 3c_3 e^{3x}$$

$$y'(0) = 2c_1 - c_2 + 3c_3 \;\; \rightarrow \;\; 2c_1 - c_2 + 3c_3 = -1$$

$$y'' = 4c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + 9c_3 e^{3x}$$

$$y''(0) = 4c_1 + c_2 + 9c_3 \;\; \rightarrow \;\; 4c_1 + c_2 + 9c_3 = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 4 \\ 2c_1 - c_2 + 3c_3 &= -1 \\ 4c_1 + c_2 + 9c_3 &= 0 \end{aligned}$$

se obtiene: $c_1 = \frac{10}{3}$, $c_2 = \frac{29}{12}$, $c_3 = -\frac{7}{4}$

$\therefore \; y = \frac{10}{3}e^{2x} + \frac{29}{12}e^{-x} - \frac{7}{4}e^{3x}$ es la solución particular para las condiciones dadas.

EJERCICIOS 1.3

Dada la ecuación diferencial, su solución y las condiciones iniciales, determinar el valor de las constantes arbitrarias.

Respuestas:

1. $yy' + 6x = 0$	$y^2 = -6x^2 + c$	$y(0) = 4$	$c = 16$
2. $y^2y' - 4x = 0$	$y^3 = 6x^2 + c$	$y\left(\frac{1}{2}\right) = 0$	$c = -\frac{3}{2}$
3. $y' = 1 + y^2$	$y = \tan\,(x + c)$ $= \frac{\tan x + c}{1 - c\tan x}$	$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$	$c = 0$
4. $y' = 1 - y^2$	$\tanh^{-1} y = x + c$ Donde $-1 < y < 1$	$y(0) = 0$	$c = 0$
5. $yy' = e^{2x} + 1$	$y^2 = e^{2x} + 2x + c$	$y(0) = \frac{1}{2}$	$c = -\frac{3}{4}$
6. $2y'' + y' - y = 0$	$y = c_1e^{\frac{x}{2}} + c_2e^{-x}$	$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$	$c_1 = \frac{2}{3}$, $c_2 = -\frac{2}{3}$
7. $y'' + y = \cos x + 4$	$y = c_1x\ \text{sen}\ x + c_2$	$\begin{cases} y(0) = 4 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$	$c_1 = 1$, $c_2 = 4$

Elegir la opción correcta.

8. Ecuación — Condición inicial

$y' = 12x$ — $y\left(\sqrt{2}\right) = -1$

Solución general	Valor de las constantes
a. $24y = x^2 + c$	$c = -22$
b. $y = 6x^2 + c$	$c = -13$
c. $y = x^2 + c$	$c = -3$
d. $x = \frac{1}{6}\sqrt{y-c}$	$c = -4$

9. Ecuación — Condición inicial

$xy' = 7$ — $y(1) = 7$

Solución general	Valor de las constantes
a. $y = 7\ln x + c$	$c = 7$
b. $y = \frac{7}{2}x^2 + c\ \ 0$	$c = \frac{7}{2}$
c. $y = \ln x + c$	$c = 7$
d. $y = \ln cx^7$	$c = e^{-7}$

10. Ecuación — Condición inicial

$y'' = 2x + 1$ — $y(0) = 1$, $y'(1) = -1$

Solución general	Valor de las constantes
a. $6y = 2x^3 + 3x^2 + c_1x + c_2$	$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -12 \end{cases}$
b. $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + c_1x + c_2$	$\begin{cases} c_1 = -3 \\ c_2 = 1 \end{cases}$
c. $y = x^2 + c_1x + c_2$	$\begin{cases} c_1 = -3 \\ c_2 = 1 \end{cases}$
d. $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x + c_1x + c_2$	$\begin{cases} c_1 = -\frac{13}{6} \\ c_2 = 1 \end{cases}$

11. Ecuación — Condición inicial

$y'' = e^x$ — $y(0) = \ln 2$, $y'(\ln 2) = 0$

Solución general	Valor de las constantes
a. $y = e^x + c_1x + c_2$	$\begin{cases} c_1 = \ln 2 - 1 \\ c_2 = -2 + (\ln 2)(\ln 2 - 1) \end{cases}$
b. $y = c_1e^x + c_2$	$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = \ln 2 \end{cases}$
c. $y = c_1 + c_2x + e^{2x}$	$\begin{cases} c_1 = \ln 2 - 1 \\ c_2 = 0 \end{cases}$
d. $y = e^x + c_1x + c_2$	$\begin{cases} c_1 = -2 \\ c_2 = \ln 2 - 1 \end{cases}$

12. Ecuación — Condición inicial

$yy' = \cos x$ — $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$

Solución general	Valor de las constantes
a. $y^2 = 2\cos x + c$	$c = 9$
b. $\ln y = \cos x + c$	$c = \ln 3$
c. $\frac{y^2}{2} = \text{sen } x + c$	$c = \frac{7}{2}$
d. $\ln y = \text{sen } x + c$	$c = \ln 3 - 1$

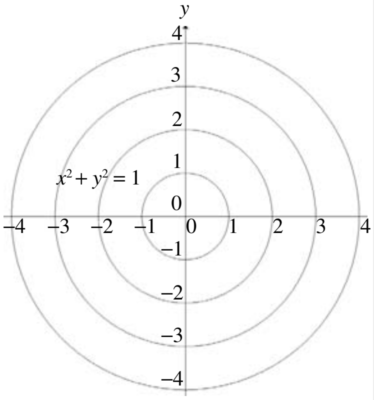


Figura 1-2.

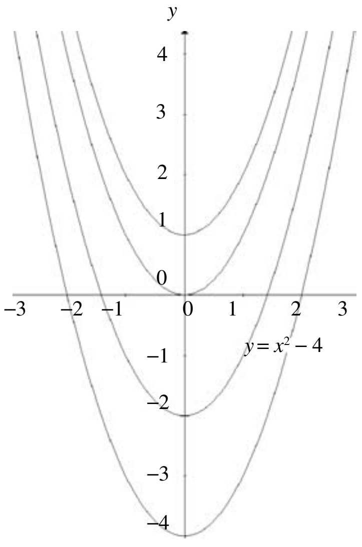


Figura 1-3.

Respuestas:

8. *b*. Solución particular $y = 6x^2 - 13$

9. *a*. Solución particular $y = 7\ln x + 7$

10. *b*. Solución particular $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$

11. *d*. Solución particular $y = e^x - 2x + \ln 2 - 1$

12. *c*. Solución particular $\frac{y^2}{2} = \text{sen}\, x + \frac{7}{2}$ o bien, $y^2 = 2\,\text{sen}\, x + 7$

Geométricamente, la solución general representa una familia de curvas; el caso de $x^2 + y^2 = c^2$ representa una familia de circunferencias (figura 1.2).

La solución general $y = x^2 + c$ es una familia de parábolas (figura 1.3). La *solución particular* es una de las curvas de la familia, precisamente la que se obtiene cuando las constantes arbitrarias toman un valor específico a causa de las condiciones iniciales. Así en las figuras 1.2 y 1.3 la forma que tiene la solución particular para $c = 1$ y $c = -4$, es $x^2 + y^2 = 1$ y $y = x^2 - 4$, respectivamente.

Definición 1.9
La terna $(x,\ y,\ y')$ determina la dirección de una recta que pasa por el punto (x, y). El conjunto de los segmentos de estas rectas es la representación geométrica del *campo direccional.*

Se pueden visualizar las soluciones de una ecuación diferencial trazando el campo direccional, en donde, para cada curva de la familia solución, la tangente en cada uno de sus puntos tiene la misma dirección que el campo en ese punto.

EJEMPLO 1

El campo direccional de la ecuación diferencial

$$y' = (y-1)x$$

se puede dibujar dando valores enteros para x y y para después calcular las pendientes correspondientes:

$y \backslash x$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
-3	12	8	4	0	-4	-8	-12	-16
-2	9	6	3	0	-3	-6	-9	-12
-1	6	4	2	0	-2	-4	-6	-8
0	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
3	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
4	-9	-6	-3	0	3	6	9	12

Figura 1-4.

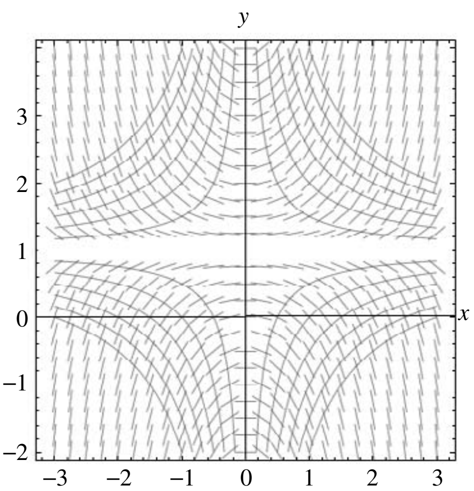


Figura 1-5.

El conjunto de trazos es el campo direccional (figura 1.5). Cruzando con una curva los segmentos de igual pendiente, se obtienen curvas con la propiedad de atravesar segmentos con igual pendiente; entonces:

Definición 1.10
Las *isóclinas* son curvas que atraviesan segmentos de pendientes iguales.

Las isóclinas de la ecuación diferencial $y' = (y-1)x$ son una familia de hipérbolas. Para obtener las isóclinas, se iguala y' a una constante:

$$y' = k$$

y dando valores a k se tiene:

si $y' = k \rightarrow (y-1)x = k$

o bien, $y = \dfrac{k}{x} + 1$ que es la familia de hipérbolas.

Para $k = 0,\quad y = 1$ asíntota horizontal

$k = 1,\quad y = \dfrac{1}{x} + 1$

$k = -1,\quad y = -\dfrac{1}{x} + 1$, etcétera

En los cuadrantes 1 y 3, $y' > 0$, (las soluciones crecen) y en los cuadrantes 2 y 4, $y' < 0$ (las soluciones decrecen). Con esto ya se puede trazar aproximadamente las curvas solución: una familia de funciones exponenciales que se ven como parábolas.

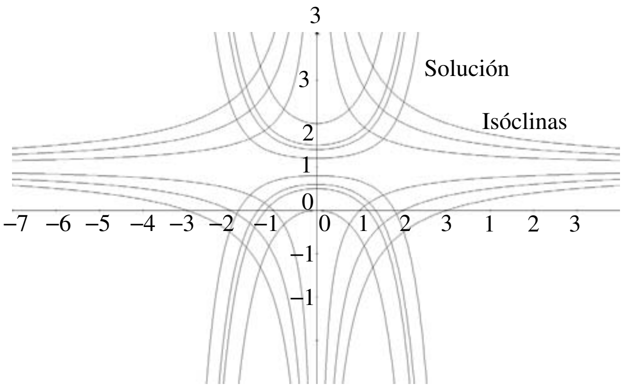
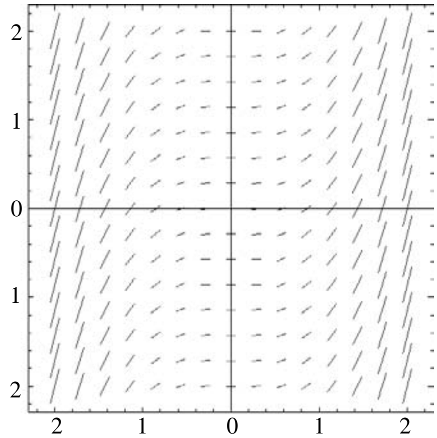


Figura 1-6.

La idea fundamental del campo direccional es que la derivada de una función proporciona su pendiente. Al tratar con ecuaciones diferenciales se trabaja con expresiones en las que la derivada aparece como una variable. Por ejemplo, la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = x^2$ se puede ver como *pendiente* $= x^2$, lo cual implica la búsqueda de una función cuya pendiente en cualquier punto (x, y) en el plano es igual a x^2 Así, por ejemplo, en el punto (1, 2) la pendiente es $1^2 = 1$, en el punto (5, 3) la pendiente es $5^2 = 25$ y en punto $(-3, 11)$ la pendiente es $(-3)^2 = 9$. Cada una de estas pendientes se pueden dibujar por medio de pequeñas rectas en cada punto con lo que, si se proponen suficientes puntos, se obtiene el campo direccional. `Mathematica` puede reducir este laborioso trabajo y mostrar la gráfica del campo direccional de esta ecuación con los comandos:

```
VectorPlot[{1,x^2},{x,2,2},{y,2,2},VectorStyle®Arrow
heads[0],Axes®True].
```

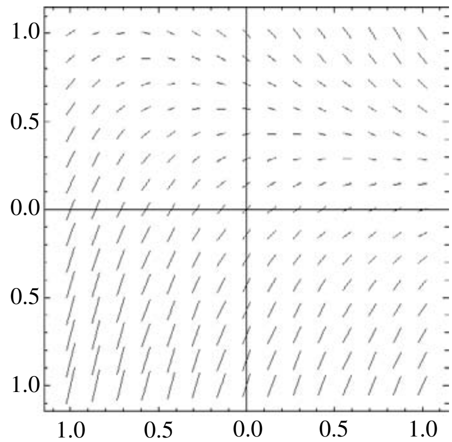


Trazar un campo direccional como el de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x} - 2y$$

realmente es una tarea titánica y es aquí donde `Mathematica` puede ser muy útil, con los comandos:

```
VectorPlot[{1,Exp[-x]-2y},{x,-1,1},{y,-1,1},Vector
Style®Arrowheads[0],Axes®True].
```



EJEMPLO 1

Obtener la solución aproximada de la ecuación diferencial

$$y' = x$$

por el método de las isóclinas

$y' = k$ o sea $x = k$

$k = 0$ $y' = 0$ donde $y' > 0$ para $x > 0$

$k = 1$ $y' = 1$

$k=-1 \quad y'=-1 \quad$ y $\; y'<0 \quad$ para $\; x<0$

$k=2 \quad y'=2$ etcétera.

Las isóclinas son rectas paralelas al eje y y las curvas solución forman una familia de parábolas. `Mathematica` muestra el campo de soluciones y las isóclinas con:

```
VectorPlot[{1,x},{x,-2,2},{y,-2,2},VectorStyle→
Arrowheads[0],Axes-True,Vector].
```

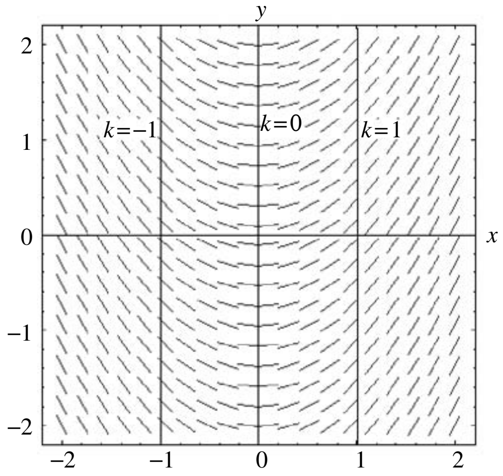


Figura 1-7.

EJERCICIOS 1.4

Identificar las isóclinas de las siguientes ecuaciones diferenciales.

	Familia de isóclinas
1. $y'=x-y$	$y=x-k$
2. $y'=x+3$	$x=k-3$
3. $y'=y+x$	$y=k-x$
4. $y'=ye^{x}$	$y=ke^{-x}$
5. $y'=y-x^{3}$	$y=k+x^{3}$
6. $y'=-\dfrac{x}{y}$	$y'=-\dfrac{x}{k}$
7. $y'=y(x+2)$	$y=\dfrac{k}{x+2}$
8. $y'=2y(x+y)$	$k=y^{2}+xy$
9. $y'=\dfrac{1}{y}$	$y=\dfrac{1}{k}$

10. $y' = \cos(x-y)$ $\qquad$ $\begin{cases} k=1 & x = 2n\pi \\ k=-1 & x=(2n+1)\pi \end{cases}$

$(n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots)$

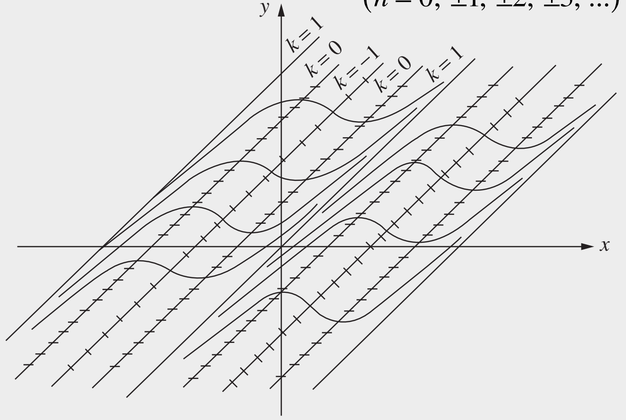


Figura 1-8.

11. $y' = y^2 - x^2$ $\qquad$ $y^2 = k + x^2$

12. $y' = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\qquad$ $x^2 + y^2 = k^2$

13. $y' = \sqrt{x^2 + 2x + 1 + y^2}$ $\qquad$ $k^2 = (x+1)^2 + y^2$

14. $y' = \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13}$ $\qquad$ $k^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2$

15. $y' = 1 - yx$ $\qquad$ $y = \dfrac{1-k}{x}$

16. $y' = y + x^2$ $\qquad$ $y = k - x^2$

En los siguientes ejercicios, trazar el campo direccional y algunas curvas solución.

17. $y' = \dfrac{x}{y}$

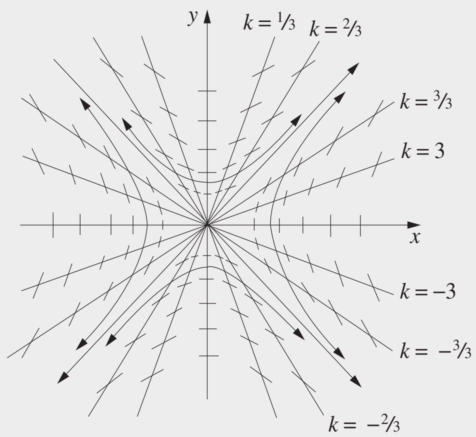


Figura 1-9.

18. $y' = \dfrac{y - x}{y + x}$

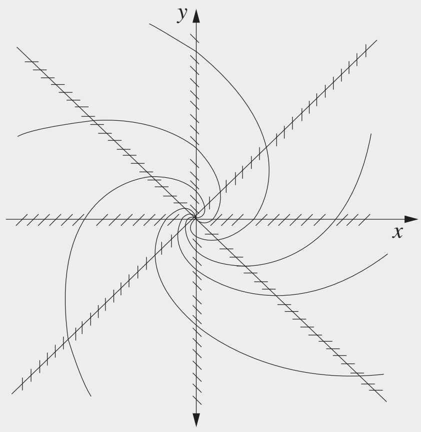


Figura 1-10.

19. $y' = xy$

Respuesta: El campo direccional es semejante al de la figura 1.6, observar que la asíntota horizontal está en $y = 0$.

20. $y' = 3x - y$

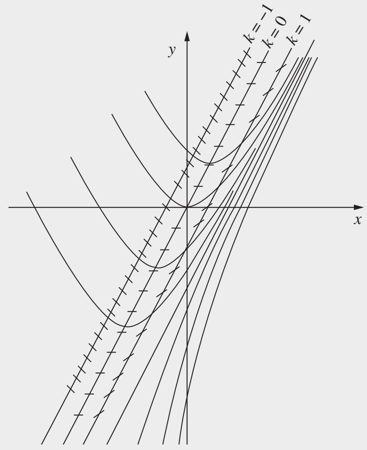


Figura 1-11.

Además del método de isóclinas para obtener soluciones de las ecuaciones diferenciales, también existen otros: el de Euler y el de aproximaciones sucesivas, aparte de los métodos numéricos iterativos tan rápidamente elaborados por una computadora.

Definición 1.11

Dos curvas son *ortogonales* en un punto si, y sólo si, sus tangentes son perpendiculares en el punto de intersección.

Las pendientes de estas tangentes son recíprocas y de signo contrario, excepto en el caso en el que las tangentes sean paralelas a los ejes de coordenadas.

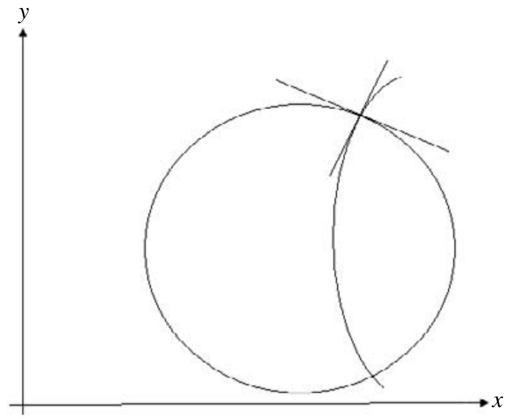


Figura 1-12.

EJEMPLO 1

Dadas las funciones $y = \frac{1}{x}$ y $y = \frac{1}{3}x^3$, averiguar si son ortogonales en los puntos de intersección.

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{3}x^3,\ 1 = \frac{1}{3}x^4,\ 3 = x^4,\ x = \sqrt[4]{3}$$

$y = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ los puntos de intersección en los reales son:

$$P_1\left(3^{\frac{1}{4}}, \frac{1}{3^{\frac{1}{4}}}\right) \text{ y } P_2\left(-3^{\frac{1}{4}}, -\frac{1}{3^{\frac{1}{4}}}\right)$$

Derivando las funciones para obtener su pendiente, se tiene:

$$m_1 = \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

$$m_2 = \frac{dy}{dx} = x^2 \qquad \rightarrow \qquad m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

Y $\quad m_1(P_1) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad m_2(P_1) = \sqrt{3}$

$$m_1(P_2) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad m_2(P_2) = \sqrt{3}$$

En ambos puntos se cumple que $m_1 = -\frac{1}{m_2}$

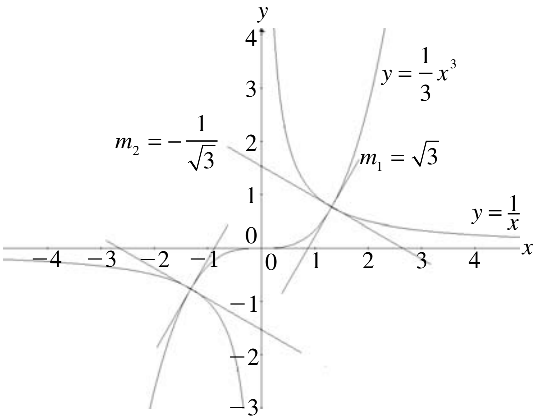


Figura 1-13.

EJEMPLO 2

Las funciones $y = e^x$ y $y = e^{-x}$ tienen su punto de intersección en (0,1)

$$m_1 = \frac{dy}{dx} = e^x \qquad m_2 = \frac{dy}{dx} = -e^x$$

$$m_1(0) = 1 \qquad m_2(0) = -1$$

$$\therefore m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

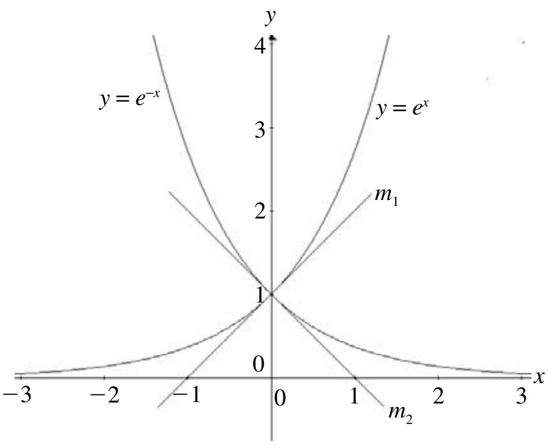


Figura 1-14.

Definición 1.12

Trayectorias ortogonales son las curvas que se intersecan formando un ángulo recto. Si una familia de curvas tiene la ecuación $F(x, y, y') = 0$, la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales a ella es otra familia de la forma:

$$F(x, y, -\frac{1}{y'}) = 0$$

Para obtener trayectorias ortogonales de una ecuación diferencial, se toma $m_1 = \frac{dy}{dx} = f(x, y)$, y como $m_2 = -\frac{1}{m_1} \rightarrow m_2 = \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x, y)}$ da la trayectoria ortogonal a la primera ecuación.

EJEMPLO 1

Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de rectas $y = cx$.

Su pendiente es $m_1 = \frac{dy}{dx} = c$; es decir, $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$.

Entonces una familia ortogonal a estas rectas será la que tenga como pendiente:

$$m_2 = \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{c} \text{ o sea } \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Que también se puede expresar como:

$$ydy = -xdx$$

Integrando: $\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c$, o bien, $y^2 + x^2 = c$

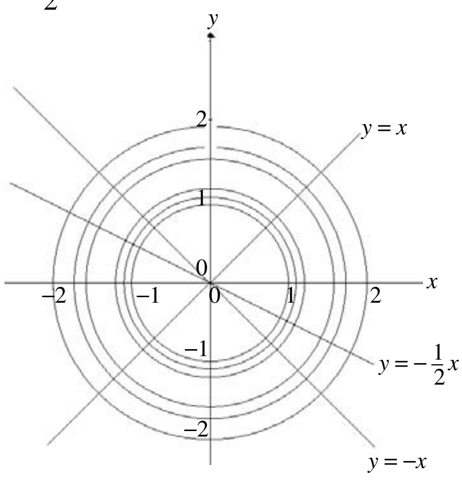
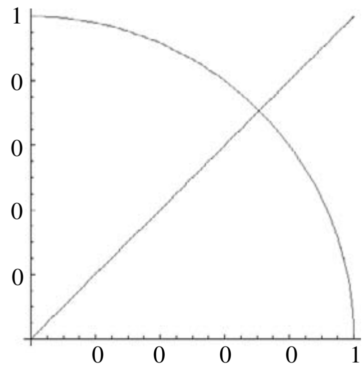


Figura 1-15.

∴ La familia de circunferencias con centro en el origen y la familia de rectas que pasan por el origen son mutuamente trayectorias ortogonales. `Mathematica` proporciona gráficas de curvas ortogonales para $y = \sqrt{1 - x^2}$ y $y = x$ usando la instrucción:

```
Plot[{x, Sqrt[1-x²]}.{x,0,1}AspectRatio -1]
```



EJEMPLO 2

Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de parábolas $y = cx^2$.

Se tiene: $m_1 = \dfrac{dy}{dx} = 2cx$ y como $c = \dfrac{y}{x^2} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 2\left(\dfrac{y}{x}\right)x \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 2\dfrac{y}{x}$

Se busca: $m_2 = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x}{2y}$, o bien, $2ydy = -xdx$, así que integrando:

$$y^2 = -\frac{x^2}{2} + c \text{ o bien, } x^2 + 2y^2 = c$$

Observamos que es una familia de elipses.

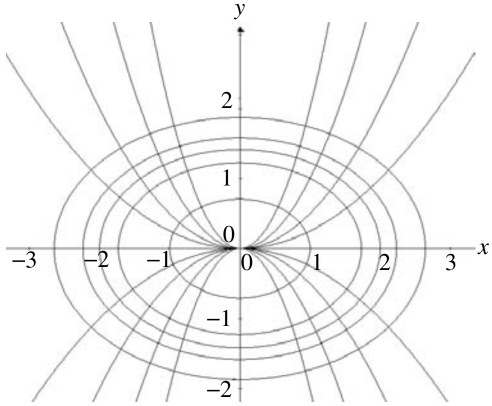


Figura 1-16.

EJERCICIOS 1.5

Obtener las trayectorias ortogonales de las siguientes familias de curvas.

		Trayectorias ortogonales:
1.	$y = cx^2$	$2y^2 + x^2 = c$
2.	$y = \frac{4}{7}x + c$	$4y + 7x = c$
3.	$y = (x^2 + c)^2$	$\frac{8}{3}y^{3/2} + \ln x = c$
4.	$y^2 - x^2 = c$	$xy = c$
5.	$y^3 - 6x^2 = c$	$y(\ln x + c) = 4$
6.	$y \ln cx = 3$	$2y^3 - 9x^2 = c$
7.	$y = ce^x$	$y^2 + 2x = c$
8.	$y = \sqrt{x} + c$	$y = -\frac{4}{3}x^{3/2} + c$
9.	$r^2 = c\cos 2\theta$	$r^2 = c\,\text{sen}\,2\theta$
	Referencia: (vea cap. 3, pág. 93)	
10.	$r = c(1 - \cos\theta)$	$r = c(1 + \cos\theta)$
	Referencia: (vea cap. 3, pág. 93)	
11.	$r = c - \text{sen}\,\theta$	$r = \dfrac{1}{\left(\ln \dfrac{c}{\sec\theta + \tan\theta}\right)}$
	Referencia: (vea cap. 3, pág. 93)	
12.	$y = c\cos x$	$y^2 = 2\ln(c\,\text{sen}\,x)$
13.	$y^2 + x^2 = c$	$y = cx$
14.	$y^2 = 2cx + 4$	$\frac{y^2}{2} + x^2 = \ln cy^4$
15.	$y = c\cosh x$	$y^2 = 2\ln(c\,\text{csc}\,hx)$
16.	$y = c\ln\lvert x\rvert$	$2y^2 = -2x^2\ln\lvert x\rvert + x^2 + c$
17.	$\text{sen}\,y = ce^{-x}$	$\cos y = ce^{-x}$
18.	$y = ce^{x^2}$	$y^2 = \ln cx^{-1}$
19.	$e^x\cos y = c$	$e^x\,\text{sen}\,y = c$

20. $2y = x\sqrt{x^2-1} - \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) + c$ $\quad y = -\cosh^{-1}x + c$

21. $x^2 + b^2y^2 = 1$ $\quad y^2 + x^2 = 2\ln cx$

22. Para la familia $x^2 = 2(y-c)$, determinar qué curva de las trayectorias ortogonales pasa por el punto (1, 2). ***Respuesta:*** $y + \ln x = 2$

23. Para la familia $y^2 = 2ax$ (parábolas que pasan por el origen), determinar qué curva de las trayectorias ortogonales pasa por el punto (2, 4). ***Respuesta:*** $y^2 + 2x^2 = 24$, elipse con centro en el origen.

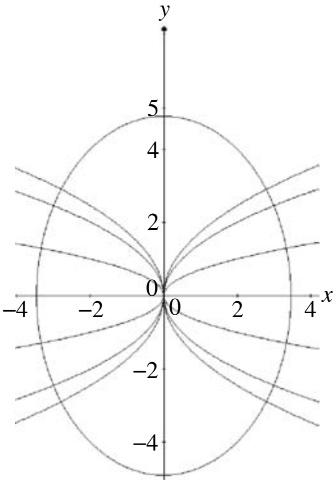


Figura 1-17.

Existencia y unicidad de las soluciones

En álgebra lineal nos encontramos con tres tipos de sistemas de ecuaciones en el plano:

$$\begin{cases} 2y+3x=0 \\ -\dfrac{2}{5}y-\dfrac{3}{5}x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y-x=5 \\ y-x=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2y+3x=0 \\ y=x+5 \end{cases}$$

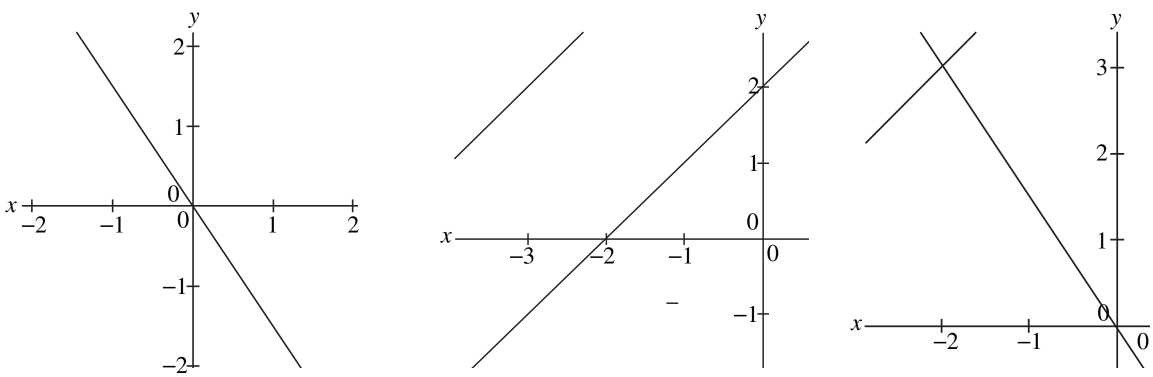


Figura 1-18.

Estos sistemas tienen: un número infinito de soluciones (cada punto de las rectas en el plano satisface ambas ecuaciones), ninguna solución (ningún punto en el plano es común a las dos ecuaciones) y una solución única (las dos ecuaciones tienen uno y sólo un punto en común), respectivamente.

Los dos primeros sistemas no nos ayudan mucho para obtener respuestas consistentes. Las soluciones de las ecuaciones diferenciales que nos interesan son aquellas que tienen una sola forma y un único valor para ciertas condiciones iniciales. ¿Bajo qué condiciones se puede garantizar que una ecuación diferencial de primer orden tenga una y sólo una solución?

Teorema 1. Existencia y unicidad

Dada una ecuación diferencial

$$y' = f(x, y)$$

donde $f(x, y)$ está definida en una región rectangular R que contiene al punto (x_0, y_0).

Si $f(x, y)$ satisface las condiciones:

1. $f(x, y)$ es continua en R,

2. $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ es continua en R,

$\rightarrow$ existe un intervalo I con centro en x_0 y existe una y sólo una función $y = g(x)$ definida en el intervalo I que satisface la condición inicial $y(x_0) = y_0$.

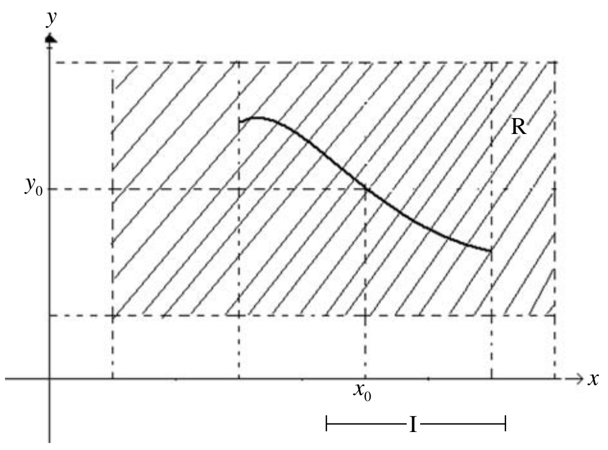


Figura 1-19.

Dicho de otra manera, las condiciones para la *existencia* de soluciones son:

- Continuidad de $f(x, y)$ en R.
- Acotamiento de $f(x, y)$ por R.

Y las condiciones para la *unicidad* son:

- Continuidad de $f(x,y)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en R.
- Acotamiento de $f(x,y)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ por R.

Estas condiciones son suficientes pero no necesarias, porque puede existir una solución única que satisface $y(x_0)=y_0$, pero que no cumple la condición **1**, o la condición **2**, o ninguna de las dos.

EJEMPLO 1

Si $y'=\dfrac{3}{y^2} \to f(x,y)=\dfrac{3}{y^2}, \ \dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{-6}{y^3}$

En todos los puntos del eje x no se cumplen las condiciones **1** y **2** porque $f(x,y)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ son discontinuas en $y=0$; sin embargo, por cada punto del eje x pasa una sola curva solución.

$$y=\sqrt[3]{9x+c}, \text{ o bien, } y=\sqrt[3]{9(x-x_0)}$$

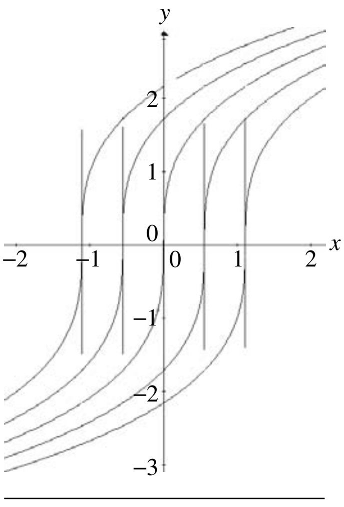


Figura 1-20.

EJEMPLO 2

Hallar la región del plano xy en la cual la ecuación diferencial:

$$y'=xy$$

tiene una solución única en un punto $(x_0,\ y_0)$ de esa región.

Entonces, $f(x,y)=xy$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}=x$; ambas son continuas en todos los puntos del plano *xy*, y por cualquier punto $(x_0,\ y_0)$ en el plano pasa una y sólo una solución $y=ce^{x^2/2}$, o bien, $y_0=ce^{x^2/2}$ de donde:

$$c=\frac{y_0}{e^{\frac{(x_0)^2}{2}}},\qquad y=y_0e^{\left[\frac{x^2}{2}-\frac{(x_0)^2}{2}\right]}=y_0e^{\frac{\left[x^2-(x_0)^2\right]}{2}}$$

EJEMPLO 3

Dada la ecuación diferencial

$$y'=\sqrt[3]{y^2}$$

Averiguar en qué región:

1. Tiene más de una solución.

2. Tiene solamente una solución.

SOLUCIÓN:

$$f(x,y)=y^{2/3},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2}{3\sqrt[3]{y}}$$

f es continua en todo el plano *xy*.

$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ es discontinua en el eje *x*.

1. En el eje *x* hay dos ecuaciones solución $y=0$ y $y=\dfrac{(x+c)^3}{27}$ que dan origen a un número infinito de parábolas cúbicas.

2. En todo el plano excepto en el eje *x* porque

$$\frac{dy}{y^{2/3}}=dx,\ 3y^{1/3}=x+c$$

$$y=\frac{(x+c)^3}{27}$$

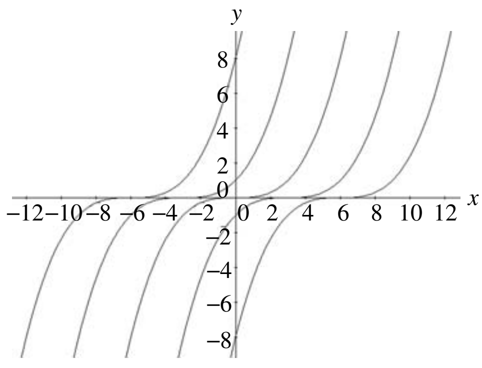


Figura 1-21.

Resumen

Definiciones

Ecuación diferencial: la que contiene *derivadas* o *diferenciales*.

Orden: el de la *derivada* más alta.

Grado: el *exponente* de la derivada más alta.

Solución: *función sin derivadas* que satisface la ecuación.

Solución general: con *constantes* arbitrarias.

Solución particular: las constantes toman un *valor* determinado.

Solución singular: su pendiente tiene un punto en *común* con la pendiente de otra solución.

Problema con valor inicial: ecuación diferencial más condiciones iniciales.

Campo direccional: conjunto de segmentos de la terna $(x,\ y,\ y')$.

Isóclinas: curvas que satisfacen $y' = f(x, y) = k$.

Curvas ortogonales: sus pendientes son *perpendiculares* en el punto de intersección.

Trayectorias ortogonales: familias de curvas cuyas pendientes son *perpendiculares entre sí*.

Clasificación:

$$\text{Tipo} \begin{cases} \text{Ordinarias: } \textit{una} \text{ sola variable independiente.} \\ \text{Parciales: } \textit{dos} \text{ o } \textit{más} \text{ variables independientes.} \end{cases}$$

$$\text{Orden} \quad \{\, 1°, 2°, \ldots , n, \ldots$$

$$\text{Grado} \begin{cases} \text{Lineales} & \begin{cases} a)\ y',\ y'',\ y''',\ \ldots ,\ y^{(n)},\ \text{de primer grado.} \\ b)\ \text{Cada coeficiente depende sólo de } x. \end{cases} \\ \text{No lineales} & \{\ \text{No cumplen lo anterior.} \end{cases}$$

Teorema: Existencia y unicidad de las soluciones. *Continuidad y acotamiento* de $f(x, y)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en la región R.

Autoevaluación 1

1. Definir: isóclinas.
2. Definir: campo direccional.
3. Enunciar el teorema de existencia y unicidad de las soluciones.
4. Elegir la opción que contiene la definición correcta de: trayectorias ortogonales.
   a. Familias de curvas paralelas entre sí.
   b. Familias de curvas cuyas pendientes las cortan en ángulo recto.
   c. Dos familias de curvas de la forma $F\left(x, y, -\dfrac{1}{y'}\right) = 0.$
   d. Familias de curvas que se intersecan formando un ángulo recto.

5. Clasificar las siguientes ecuaciones por su tipo, orden y grado:

a. $\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \dfrac{xt}{y} e^t$

b. $(x-1)y'' + y(y')^3 - x = 0$

6. Elegir la opción que contiene la clasificación correcta de la siguiente ecuación diferencial: $x(x^2-1)y''' + (xy')^2 = \dfrac{y}{x}$

a. Ordinaria, orden 3, grado 2, lineal.
b. Ordinaria, orden 3, grado 1, no lineal.
c. Ordinaria, orden 4, grado 2, lineal.
d. Parcial, orden 4, grado 1, no lineal.

7. Verificar si la función $e^y = cx(y+2)^2$ es solución de la ecuación diferencial $xyy' = y+2$.

8. Elegir la opción que da la solución general de la ecuación diferencial correspondiente:

a. $y = e^{-x^2} + c$ de $y' = 2xy = 0$
b. $x^2 + y = c$ de $yy' = -x$
c. $x^2 + e^{-x^2} = c$ de $yy' = xe^{y^2}$
d. $y = ce^{\cos x}$ de $y' - y \text{ sen } x = 0$

9. Sustituir la función $y = \text{sen}^{-1} 2x$ en la siguiente ecuación diferencial para ver si la satisface: $y' = 2\sec y$.

10. Elegir la opción que contiene la correcta solución particular de la ecuación diferencial $(x+1)y' = xy$ para $y(0) = 1$.

a. $y = \ln(x+1)$
b. $y = e^x - x$
c. $y = e^x(x+1)$
d. $y(x+1) = e^x$

11. Resolver el problema con valores iniciales $y(0) = 7$, $y'' = 6x - 12$.

12. Seleccionar la opción que contiene la solución particular correcta del problema con valores iniciales.

	Ecuación diferencial	*Condición inicial*	*Respuestas*
a.	$xy'' = y'$	$y(0) = 1,\ y'(1) = 4$	$y = 2x^2 + 1$
b.	$yy'' = (y')^2$	$y(0) = 1,\ y'(0) = 3$	$y = e^{x/3}$
c.	$yy' = y' + 2xy$	$y(0) = 1$	$y = \ln y + x^2 + c$
d.	$y' = 2x\sec^2 x^2$	$y(0) = 12$	$y = \tan x^2$

13. Encontrar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas:

$$y = c(\tan x + \sec x)$$

14. Seleccionar la opción que contiene la familia de trayectorias ortogonales de: $y' = 2xy$.

a. $y = ce^{x^2}$
b. $y = xy^{y^2}$

c. $y = \ln x^2 + c$
d. $y = \ln cx$

15. Señalar la región donde la siguiente ecuación diferencial tiene solución única: $y' = -5x/y$.

Respuestas de la autoevaluación 1

1, **2** y **3**, vea el texto.

4. *d*. La *a* es falsa porque la condición es la perpendicularidad, no el paralelismo. La *b* es falsa porque una pendiente es tangente y nunca corta a la curva. La *c* es falsa porque está incompleta, debe ser una familia de la forma $F(x, y, y')$ con otra familia de la forma $F(x, y, -\frac{1}{y'})$.

5. *a*. Parcial, orden 2, grado 1, no lineal.
b. Ordinaria, orden 2, grado 1, no lineal.

6. *b*. La *a* es falsa porque el grado de la ecuación es el exponente de y''', es decir, 1. La *c* es falsa porque el orden no es la suma de los órdenes de las derivadas que existan en la ecuación; el grado es 1 no es lineal porque y' está al cuadrado. La *d* es falsa porque la ecuación es ordinaria, sólo hay una variable independiente $y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$ y $y' = \frac{dy}{dx}$; el orden es 3.

7. Sí lo es. Derivando implícitamente:

$$e^y \frac{dy}{dx} = 2cx(y+2)\frac{dy}{dx} + c(y+2)^2$$

Sustituyendo $c = \frac{e^y}{x(y+2)^2}$ y tomando factor común $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx}\left(e^y - \frac{2e^y}{y+2}\right) = \frac{e^y}{x}$$

Dividiendo entre e^y y simplificando

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{y}{y+2}\right) = \frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad xyy' = y+2$$

8. *c*. La solución de la opción *a* debe ser $y = ce^{-x^2}$, aplicando correctamente las leyes de los exponentes. La solución de la opción *b* es $y^2 + x^2 = c$.

La solución de la opción *d* es $y = ce^{-\cos x}$

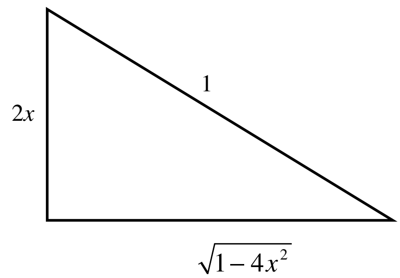
9. Sí. Derivando $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$

Si $y = \text{sen}^{-1} 2x \rightarrow 2x = \text{sen } y$

y $\sqrt{1-4x^2} = \cos y$

derivando $2x = \text{sen } y$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\cos y} \rightarrow y' = 2\sec y$



10. *d*. Solución general $y(x+1)=ce^x$ para $y(0)=1 \rightarrow c=1$. Por lo tanto, la solución particular es $y(x+1)=e^x$.

11. $y=x^3-6x^2+7$.

12. *a*. La opción *b* tiene intercambiados los valores de las condiciones iniciales y le falta el coeficiente 3 para satisfacer dicho cambio. En la opción *c* no se aplicó la condición inicial. Por error en la opción *d* se tomó $y(0)=0$.

13. Derivando:

$$\frac{dy}{dx}=c\left(\sec^2 x+\sec x\tan x\right), \text{ sustituyendo } c=\frac{y}{\tan x+\sec x}$$

$$\frac{dy}{dx}=y\sec x$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{\cos x}{y}, \quad ydy=-\cos x dx, \quad y^2+2\text{sen } x=c$$

14. *b*. La solución de *a* contiene la solución de la ecuación dada. Las soluciones *c* y *d* emplean función logaritmo en vez de función exponencial.

15. Tomamos $f(x,y)=-\frac{5x}{y}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{5x}{y^2}$; f es discontinua en $y=0$, es decir, en el eje *x*; en el eje *x* se infringe la condición **2** del teorema de existencia y unicidad, de hecho la solución es $y^2+5x^2=c$; en $y(0)$ no hay soluciones. ¿En qué parte del plano existe una y sólo una solución, en cada punto del mismo? En todo el plano *xy*, excepto en el eje *x*.

Georg Friedrich Riemann

Georg Friedrich Riemann (1826-1866)

Ejemplo vivo de la timidez y de la fragilidad física, Riemann impactó, sin embargo, el mundo de las matemáticas como pocos lo han hecho en la historia. Hijo del pastor de un pequeño pueblo en Alemania, recibió no obstante una buena educación que lo llevó a presentar su tesis doctoral delante de Gauss en Göttingen.

Este último, reconocido como difícil de sorprender, quedó entusiasmado por el desarrollo que hizo Riemann sobre la teoría de la función de una variable compleja. Este episodio se recuerda como la única vez en la que Gauss haya expresado admiración por un trabajo ajeno.

Ahí aparecen las famosas superficies de Riemann, las cuales generarían el enfoque topológico del análisis. Un poco más tarde clarificó la noción de integral mediante una nueva definición conocida como la *integral de Riemann*. Sus trabajos sobre los fundamentos de la geometría le permitieron generalizar la noción de espacio y son precursores de las teorías del siglo XX sobre los espacios abstractos.

Pero su complexión débil lo hizo presa de la tuberculosis, un mal entonces incurable, y Riemann murió en 1866 a los 40 años. Sus obras, que caben en pocas páginas, son de una densidad tal que dejan trabajo e ideas incluso para los matemáticos de hoy en día.

Estos acertijos, en cierto modo, más
que ninguna otra rama de las matemáticas,
reflejan el espíritu siempre joven,
inquisitivo e intacto, de esta ciencia. Cuando un
hombre deja de maravillarse, de preguntar
y jugar, está acabado.

E. KASNER Y J.R. NEWMAN

Averiguación

La función $y = a^x$ hija de ________________________ y vio la luz en 1679.

a. Descartes
b. Leibniz
c. Euler

Demostración de la falacia: $n = n+1$

Sabemos que $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$

$$(n+1)^2 - (2n+1) = n^2;$$

restando de ambos miembros $2n^2 + n$:

$$(n+1)^2 - 2n - 1 - 2n^2 - n = n^2 - 2n^2 - n$$

sacando factor común:

$$(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) = n^2 - n(2n+1)$$

sumando $(2n+1)^2/4$ a ambos miembros:

$$(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) + (2n+1)^2/4 = n^2 - n(2n+1) + (2n+1)^2/4;$$

es decir:

$$[(n+1) - (2n+1)/2]^2 = [n - (2n+1)/2]^2$$

elevando a la ½

$$n + 1 - (2n+1)/2 = n - (2n+1)/2$$

$$n + 1 = n$$

¿Dónde se generó el error?

La escala de la sabiduría tiene sus
peldaños hechos de números.

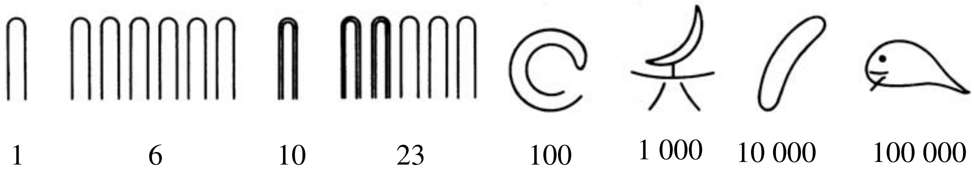
BLAVATSKY

Propiedades metafísicas del número 1

Representa el principio de unicidad, de lo indivisible e ilimitado: Dios. Pitágoras dice que es el padre, creador de todas las cosas; el pensamiento, creador de todas las ideas; la memoria, el fundamento del conocimiento. Como número, representa al hombre, el único animal que camina erecto.

El 1 es lo determinado, la iniciación, lo que insta para que las cosas sean, la voluntad. Es la identidad, la igualdad, la existencia y la persistencia. Representa lo espiritual, la luz, la inteligencia y la aptitud para proponer, considerar y resolver. Es meditación, reflexión y decisión, obrando como trabajo en la mano de obra y como volición en el pensamiento.

Remontándonos a los orígenes: Sistema de numeración del antiguo Egipto (posiblemente 3000 a. C.).

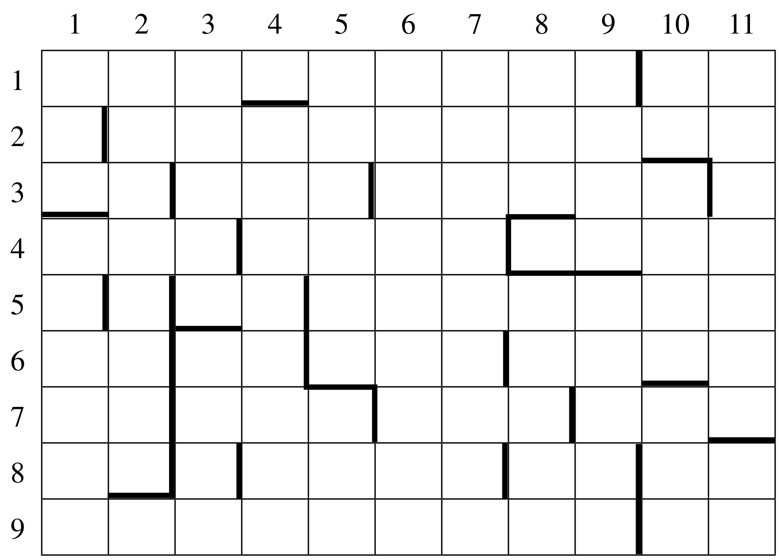


HORIZONTALES

1. Curvas con pendiente constante. Nota musical.
2. Mil. Cierto tipo de ecuaciones diferenciales.
3. Artículo masculino singular. Entreguen. Exponente de la derivada de mayor orden en la ecuación diferencial. Vocal.
4. Pronombre relativo. Pasar la vista por lo escrito. (Al revés). Ser supremo.
5. Símbolo de "unión" en la teoría de conjuntos. Letra que se usa para designar la constante de integración. Conjunción copulativa que indica negación. Examiné, investigué, estudié.
6. El que profesa la ingeniería.
7. Descripción, cuento, relato.
8. Piedra sagrada del altar. Símbolo químico del azufre. Bonita, agradable.
9. Participio del verbo ser. Signo muy usado en las ecuaciones matemáticas.
10. Artículo. (Al revés). Descanso, paro del trabajo. Corriente caudalosa de agua.
11. Tipo de queso. Símbolo químico del aluminio.

VERTICALES

1. Ingeniero mecánico electricista. Amo.
2. Función sin derivadas que satisface a una ecuación diferencial. Constante.
3. Lo da la derivada más alta de la ecuación diferencial. (Al revés). Clase, muestra.
4. Cien. Fino, exquisito.
5. Ecuación diferencial donde la y y sus derivadas son de primer grado y cada coeficiente depende solamente de x. Logaritmo decimal.
6. Dos. Lengua provenzal o lemosín. Abreviatura de licenciado. Nombre de varón.
7. Vocales. Pieza heráldica en forma de paja estrecha. Las tres primeras letras de Einstein. Especie de toro salvaje.
8. Símbolo químico del Radón. Uno en números romanos. Recubro en oro. Otorga. Vocales.
9. Perpendicular. Terminación propia de alcoholes.



2 Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

Agustín Louis, barón de Cauchy
(1789-1857)

Ecuaciones diferenciales de variables separables

Ecuaciones diferenciales homogéneas

Ecuaciones diferenciales exactas

Ecuaciones diferenciales con factores integrantes

Ecuaciones diferenciales lineales

En el mundo de las bacterias se desató impensadamente un conflicto. Cuatro de entre las más jóvenes de éstas decidieron intervenir en la dimensión de los humanos, con el firme propósito de sumergirse en su sangre y mediante una rapidísima proliferación segregar una sustancia alrededor del corazón que lo inmunizara del mal, de la mentira y de la fealdad.

A pesar de la oposición de la colonia bacteriana, las cuatro amigas estudiaron su plan. Vieron que si su rapidez de crecimiento era proporcional a la cantidad de bacterias presente en cada momento, en corto tiempo llegarían a recubrir un corazón humano con la sustancia que llamaron *biverbe*. Observaron que se duplicaban al cabo de cinco minutos y su pregunta siguiente fue qué cantidad de bacterias debía tener la nueva y revolucionaria colonia para que en 20 minutos hasta el corazón más renuente fuera recubierto de *biverbe*.

Aquí es donde acudimos a nuestro lenguaje simbólico para resolver a nuestras amigas su problema.

Sea x la cantidad de bacterias presente en cada momento del proceso, entonces, la proporcionalidad observada viene dada por la relación $\frac{dx}{dt} \propto x$.

Para establecer una igualdad, usamos una constante k llamada constante de proporcionalidad y así obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

la cual se resuelve por integración inmediata:

$$\int \frac{dx}{x} = k\int dt$$

de donde $\ln x = kt + c$

$$x = ce^{kt}$$

Esta función exponencial convenció a las bacterias de que su crecimiento iba a ser rápido, pero esta solución general les resultó ambigua porque había demasiadas incógnitas. Utilizando las condiciones iniciales de su experimento, se encontraron los valores de c y k de la siguiente manera: para $t = 0$, que fue el momento inicial, había $x = 4$ bacterias. Sustituyendo en la solución:

$$4 = ce^0 \qquad c = 4 \qquad x = 4e^{kt}$$

Y para $t = 5$ minutos el número de bacterias se duplicó $x = 2(4)$. Al sustituir estos nuevos datos:

$$8 = 4e^{5k}$$

$$2 = e^{5k}$$

$$k = \frac{\ln 2}{5}$$

Así, la solución general tiene la forma:

$$x = 4e^{(\ln 2/5)t} = (4)2^{t/5}$$

Y la respuesta a la última pregunta quedaría: para $t = 20$ minutos $x = ?$ entonces $x = (4)2^{20/5}$; $x = 64$ bacterias.

Por tanto, sólo 64 bacterias en un lapso de 20 minutos pueden inmunizar un corazón humano. Entonces las bacterias se desparramaron, comenzaron su trabajo y…

En este capítulo trataremos especialmente las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden: *variables separables, homogéneas* (reducidas a variables separables), *exactas,* con *factores integrantes* (reducibles a exactas), y *lineales*.

Ecuaciones diferenciales de variables separables

Definición 2.1
Una ecuación diferencial de variables separables tiene la forma $f(x)dx + g(y)dy = 0,$ donde cada diferencial tiene como coeficiente una función de su propia variable, o una constante.

MÉTODO DE SOLUCIÓN: integración directa.

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = 0$$

Cuando no pueden separarse las variables de una ecuación y no pueden agruparse en términos, en cada uno de los cuales estén las mismas variables, habrá que usar otros métodos para encontrar la solución.

EJEMPLO 1

Resolver $e^{x+y}y' = x,$ con las condiciones iniciales $y = \ln 2$ cuando $x = 0.$

1. Separar las variables usando las propiedades de las funciones involucradas y los artificios algebraicos necesarios:

$$e^x e^y \frac{dy}{dx} = x, \; e^y dy = xe^{-x}dx$$

2. Integrar cada miembro de la ecuación:

$$\int e^y dy = \int xe^{-x}dx$$

$e^y = -xe^{-x} - e^{-x} + c,$ solución general en la forma *implícita* porque no está despejada la variable dependiente y, pero:

$y = \ln\left|e^{-x}(-x-1)+c\right|,$ solución general en forma *explícita:*

$$y = f(x)$$

3. Aplicar las condiciones iniciales: $y(0) = \ln 2$ en la solución general, ya sea en su forma explícita o implícita.

En la forma implícita: $e^{\ln 2} = -0 - 1 + c$

$$2 = -1 + c$$

$$c = 3$$

$$\therefore e^y = -xe^{-x} - e^{-x} + 3, \text{ solución particular.}$$

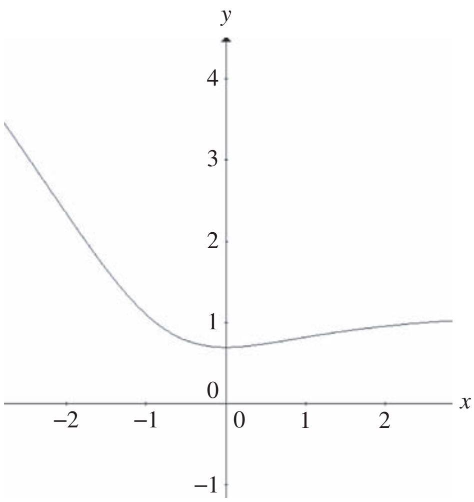
En la explícita $\ln 2 = \ln\left|1(0-1)+c\right|;$ aplicando exponencial, se tiene:

$$2 = -1 + c$$

$$c = 3$$

$$\therefore y = \ln\left|e^{-x}(-x-1)+3\right|$$

cuya curva solución es



EJEMPLO 2

Resolver $xyy' = 1 + y^2$, para $y = 3$ cuando $x = 1$, o bien, $y(1) = 3$.

1. Separar variables:

$$xy\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$$

$$\frac{y}{1+y^2}\,dy = \frac{dx}{x}$$

2. Integrar $\frac{1}{2}\ln\left|1+y^2\right| = \ln|x| + \ln|c|$

OBSERVACIÓN: La constante de integración no pierde su arbitrariedad, su carácter de *cualquier número*, si está afectada por funciones. Así, $\ln|c| = c$ porque el logaritmo natural de una constante también es una constante; del mismo modo se puede usar e^c, c^2, $\operatorname{sen} c$, $\cosh c$, etcétera.

Usando las propiedades de los logaritmos (por eso se introdujo "$\ln|c|$":

$$\ln\left|1+y^2\right|^{1/2} = \ln|cx|$$

Aplicando exponencial:

$$\left|1+y^2\right|^{1/2} = |cx|$$

Elevando al cuadrado:

$$1+y^2 = cx^2$$

$\therefore cx^2 - y^2 = 1$, solución general implícita.

3. Aplicar las condiciones iniciales $y(1) = 3$

$$c(1) - 9 = 1$$

$$c = 10$$

$$\therefore 10x^2 - y^2 = 1$$

EJEMPLO 3

Resolver $\operatorname{sen} x \cos^2 y dx - \cos x \operatorname{sen} y dy = 0$

1. Separar variables:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx - \frac{\operatorname{sen} y}{\cos^2 y} dy = 0$$

2. Integrar término a término:

$$-\ln|\cos x| - \frac{1}{\cos y} = c$$

$\ln|\cos x| + \sec y = c$, solución general.

En este caso no se dieron condiciones iniciales, así que vamos a comprobar la solución. Derivando implícitamente:

$$-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}dx + \sec y \tan y dy = 0$$

$$-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}dx + \frac{1}{\cos y}\frac{\operatorname{sen} y}{\cos y}dy = 0$$

$$-\operatorname{sen} x \cos^2 y dx + \cos x \operatorname{sen} y dy = 0$$

O bien,

$$\operatorname{sen} x \cos^2 y dx - \cos x \operatorname{sen} y dy = 0$$

EJEMPLO 4

Resolver:

$$e^{-x} + y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + 6x \text{ para } y(0) = e$$

1. Separar variables:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + 6x - e^{-x}$$

$$dy = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) + 6x - e^{-x}dx$$

2. Integrar $y = \operatorname{sen} h^{-1} x + 3x^2 + e^{-x} + c$, solución general explícita.

3. Aplicar condiciones iniciales: $c = e + 1$

$\therefore y = \operatorname{sen} h^{-1} x + 3x^2 + e^{-x} + e + 1$, solución particular.

EJEMPLO 5

Hallar una curva que pase por el punto $(0,-6)$, de tal forma que la pendiente de la tangente en cualquiera de sus puntos sea igual a la ordenada del punto más 7 unidades.

SOLUCIÓN: la primera derivada se representa geométricamente por la pendiente de la tangente; aprovechando esta identificación podemos plantear la ecuación diferencial que cumple con la condición pedida:

$$\frac{dy}{dx} = y + 7$$

Separando variables e integrando:

$$\frac{dy}{y+7} = dx$$

$$\ln|y+7| = x + c$$

Aplicando la condición de que la curva debe pasar por el punto $(0,-6)$:

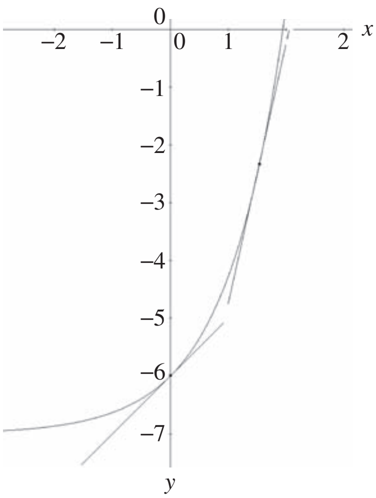
$$\ln|-6+7| = c, \qquad c = 0$$

$$\therefore \ln|y+7| = x,$$

o bien,

$$y = e^x - 7$$

En la gráfica se muestran la curva solución y las pendientes en los puntos $(0, -6)$ y $(3/2, -5/2)$.



EJEMPLO 6

Elegir la opción que contiene la ecuación diferencial, junto con su solución, de la curva para la cual la pendiente de la tangente en cualquier punto es proporcional a la abscisa de dicho punto.

1. $y' = ky \quad y = ce^{kx}$
2. $y' = x \quad y = \dfrac{x^2}{2} + c$
3. $y' = kx \quad y = k\dfrac{x^2}{2} + c$
4. $y' = \dfrac{k}{x} \quad y = k\ln|x| + c$

SOLUCIÓN: la opción correcta es la C, el resultado es una parábola. La opción A planteó el problema con respecto a la ordenada y no a la abscisa. La opción B no expresa correctamente el enunciado porque le falta la constante de proporcionalidad. La opción D considera el recíproco de la abscisa en vez de la abscisa que pide el enunciado del problema.

La solución de una ecuación diferencial como $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2y^2}{\sqrt{3-x^2}}$ separación de variables con `Mathematica`, se visualiza como:

```
DSolve[y'[x]==(x^2 y[x]^2)/Sqrt[3-x^2],y,x]
```

$$\left\{\left\{y\to \text{Function}\left[\{x\},\frac{2}{x\sqrt{3-x^2-3\text{ArcSin}\left[\frac{x}{\sqrt{3}}\right]}-2C[1]}\right]\right\}\right\}$$

EJERCICIOS 2.1

Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales.

		Solución general
1.	$y'=4x-6$	$y=2x^2-6x+c$
2.	$y'=1-7x^2$	$y=x-\frac{7}{3}x^3+c$
3.	$y'=8+2x-3x^2$	$y=8x+x^2-x^3+c$
4.	$y'=x^5-\frac{1}{x^2}+x$	$y=\frac{x^6}{6}+\frac{1}{x}+\frac{x^2}{2}+c$
5.	$y'=\frac{9x^2-6}{x^2}$	$y=9x+\frac{6}{x}+c$
6.	$y'=(4+3x)^4$	$y=\frac{1}{15}(4+3x)^5+c$
7.	$y'=e^{-3x}+2x$	$y=-\frac{1}{3}e^{-3x}+x^2+c$
8.	$y'=2\cos 5x$	$y=\frac{2}{5}\operatorname{sen}5x+c$
9.	$\frac{ds}{dt}=-\operatorname{sen}3t$	$s=\frac{1}{3}\cos 3t+c$
10.	$\frac{ds}{dt}=\ln t+4t$	$s=t\ln t-t+2t^2+c$
11.	$\frac{ds}{dt}=2\sqrt{s}$	$s=(t+c)^2$

12. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{y}-y}$ $\quad 4y^{3/2}-3y^2=4x^{3/2}+3x^2+c$

13. $y'=\dfrac{3x^2\sqrt{16+y^2}}{y}$ $\quad \sqrt{16+y^2}=x^3+c$

14. $y'=\dfrac{x^3\sqrt{x^4-1}}{y^3}$ $\quad y^4=\dfrac{2}{3}\left(x^4-1\right)^{3/2}+c$

15. $y'=e^{x-y}$ $\quad e^y=e^x+c$

16. $y'=4e^{x+y}$ $\quad 4e^x+e^{-y}=c$

17. $y'=\dfrac{y}{1+x^2}$ $\quad \ln y=\tan^{-1}x+c$

18. $y'=\dfrac{y^2}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad \dfrac{1}{y}+\operatorname{sen}^{-1}x=c$

19. $y'=\dfrac{\cos^2 x}{y}$ $\quad y^2=x+\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}2x+c$

20. $y'=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+1}}$ $\quad \ln y=\operatorname{sen}h^{-1}x+c$

En los siguientes ejercicios hallar la solución particular correspondiente a las condiciones iniciales dadas.

21. $y'=4-9x^2-6x^5$ $\quad y(1)=2$ $\quad y=4x-3x^3-x^6+2$

22. $y'=4-9x^2-6x^5$ $\quad y(1)=0$ $\quad y=4x-3x^3-x^6$

23. $y'=\dfrac{6x-12}{x^2}$ $\quad y(1)=20$ $\quad y=6\ln x+\dfrac{12}{x}+8$

24. $y'=e^{4x}-5\operatorname{sen}x$ $\quad y(0)=5$ $\quad y=\dfrac{1}{4}e^{4x}+5\cos x-\dfrac{1}{4}$

25. $\dfrac{dr}{dt}=\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{1}{2}t$ $\quad r(\pi)=0$ $\quad r=\operatorname{sen}\dfrac{1}{2}t-1$

26. $\dfrac{dr}{dt}=2\operatorname{sen}t-e^{-t}$ $\quad r(0)=4$ $\quad r=-2\cos t+e^{-t}+5$

27. $y'=\dfrac{x}{y}$ $\quad y(1)=0$ $\quad y^2=x^2-1$

28. $y'=\dfrac{x\sqrt{x^2-1}}{y}$ $\quad y(-1)=1$ $\quad y^2=\dfrac{2}{3}\left(x^2-1\right)^{3/2}+1$

29. $y'=\ln x-9x^2$ $\quad y(1)=7$ $\quad y=x\ln x-x-3x^3+11$

30. $y' = e^x \cos^2 y$	$y(0) = \dfrac{\pi}{4}$	$\tan y = e^x$
31. $y' = \dfrac{e^{-x}}{\operatorname{sen} y}$	$y(1) = 0$	$\cos y = e^{-x} + 1 - \dfrac{1}{e}$
32. $y' = \dfrac{y^2}{1+x^2}$	$y(1) = -\dfrac{4}{\pi}$	$\dfrac{1}{y} = -\tan^{-1} x$
33. $y' = e^{3x+2y}$	$y(0) = 0$	$2e^{3x} + 3e^{-2y} = 5$
34. $y' = \dfrac{\cos^2 x}{y^2}$	$y(\pi) = -1$	$4y^3 = 6x + 3\operatorname{sen} 2x - 4 - 6\pi$
35. $y' = \dfrac{y}{1-x^2}$	$y(0) = 1$	$\ln y = \tanh^{-1} x$

Elegir la opción que contiene la solución general o particular de la ecuación diferencial dada:

36. $y' = xe^{x^2-y}$

a. $e^y = 2e^{x^2}$, solución general

b. $e^y = \frac{1}{2}e^{x^2} + 4$, solución particular

c. $e^y = \frac{1}{2} - e^{2x}$, solución particular

d. $e^y = \frac{1}{2}e^{x^2}$, solución general

37. $10xyy' = 1 - y^2$

a. $1 - y^2 = cx^{-1/5}$, solución general

b. $1 - y^2 = x^{-1/5} + c$, solución general

c. $\ln\left|1 - y^2\right|^{-5} = x + c$, solución general

d. $1 - y^2 = x^{-1/5}$, solución general

38. $y \ln y y' - \ln x = 0$ para $y(1) = 1$

a. $\dfrac{y^2}{2} \ln y = x \ln x - x + 1$

b. $\dfrac{y^2}{2} \ln y - \dfrac{1}{4} y^2 = x \ln x - x + c$

c. $\dfrac{y^2}{2} \ln y - \dfrac{1}{4} y^2 = x \ln x - x + \dfrac{3}{4}$

d. $y \ln y - y = x \ln x - x$

39. $dx = x\sqrt{x^2-16}\,dy$ para $y(4)=0$

a. $x = 4\sec 4y + c$

b. $x = 4\sec 4y$

c. $x = 4\cos 4y$

d. $\ln\left(x+\sqrt{x^2-16}\right) = \dfrac{y^2}{2} + \ln 4$

40. $(1-\ln x)dx + (1-\ln y)dy = 0$ para $y(e)=e$

a. $x\ln x + y\ln y = 2e$

b. $x(2-\ln x) + y(2-\ln x) = 2e$

c. $x - x\ln x + y - y\ln y = 0$

d. $2x - x\ln x + 2y - y\ln y = 0$

41. $y' + 3y + 5 = 0$

a. $y = \left(ce^{-x}-5\right)/3$

b. $y = \left(ce^{-3x}-5\right)/3$

c. $y = \left(e^{-3x}+c-5\right)/3$

d. $y = \left(e^{-x}+c-5\right)/3$

Respuestas: 36. *d* **37.** *a* **38.** *c* **39.** *b* **40.** *b* **41.** *b*

Ecuaciones diferenciales homogéneas

Definición 2.2
Polinomios homogéneos son aquellos en los que todos los términos son del mismo grado.

EJEMPLO 1

$$x^2y^1 + 8x^1y^2 - x^3 + y^3$$

La suma de los exponentes del primer término es $2+1=3$, lo mismo para el segundo $1+2=3$; por lo tanto, los cuatro términos son de grado 3.

EJEMPLO 2

$$xyz^2 - x^2y^2$$

Es un polinomio homogéneo de grado 4.

Definición 2.3

La ecuación diferencial **homogénea** es de la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

donde M y N tienen la propiedad de que para toda $t > 0$, la sustitución de x por tx y la de y por ty hace que M y N sean del mismo grado n.

$$M(tx,ty) = t^n M(x,y)$$

$$N(tx,ty) = t^n M(x,y)$$

Este tipo de ecuaciones puede reducirse a ecuaciones de variables separables mediante sustituciones apropiadas.

EJEMPLO 3

Determinar si la función $f(x,y) = 2\sqrt{xy} + x$ es homogénea; si lo es, indicar su grado:

$$\begin{aligned} f(tx,ty) &= 2\sqrt{(tx)(ty)} + tx \\ &= 2t\sqrt{xy} + tx \\ &= t\left[2\sqrt{xy} + x\right] \end{aligned}$$

como $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$, $n \in R$

$\rightarrow$ la función es homogénea de grado 1.

EJEMPLO 4

Sea la función $f(x,y) = \sqrt{x+y}$; averiguar si es homogénea y su grado.

$$f(tx,ty) = \sqrt{tx+ty} = \sqrt{t(x+y)} = t^{1/2}\sqrt{x+y}$$

como $f(tx,ty) = t^{1/2} f(x,y)$, la función es homogénea de grado $\frac{1}{2}$.

EJEMPLO 5

Sea la función $f(x,y) = x^3 + x^2 y + y$;

$$f(tx,ty) = (tx)^3 + (tx)^2(ty) + ty$$

$= t^3x^3 + t^3x^2y + ty \neq t^3 f(x,y)$; la función no es homogénea.

EJEMPLO 6

Determinar el grado de la siguiente ecuación: $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$

Sean $M(x, y) = x^2 + y^2$ y $N(x, y) = xy$

entonces, $M(tx, ty) = (tx)^2 + (ty)^2 = t^2\left(x^2 + y^2\right)$ es de segundo grado

y $N(tx, ty) = (tx)(ty) = t^2xy$ es de segundo grado; la ecuación es homogénea de orden 1.

Definición 2.4

Las *ecuaciones diferenciales homogéneas* también tienen la forma:

$$\frac{dy}{dx} + g(u) = 0 \quad \text{donde} \quad u = f(x, y)$$

MÉTODO DE SOLUCIÓN: usando sustituciones algebraicas apropiadas, las ecuaciones diferenciales homogéneas se convierten en ecuaciones de variables separables. Una de las sustituciones más comunes es:

$$\frac{y}{x} = \upsilon \;\rightarrow\; y = \upsilon x$$

EJEMPLO 1

Resolver la ecuación diferencial $\left(x^2 + y^2\right)dx - xydy = 0$

Usando $y = \upsilon x$ y $dy = \upsilon dx + xd\upsilon$

$$\left(x^2 + \upsilon^2 x^2\right)dx = \upsilon x^2\left(\upsilon dx + xd\upsilon\right)$$

Dividiendo entre x^2

$$\left(1 + \upsilon^2\right)dx = \upsilon\left(\upsilon dx + xd\upsilon\right)$$

Separando variables:

$$\left(1 + \upsilon^2 - \upsilon^2\right)dx = \upsilon xd\upsilon$$

$$\frac{dx}{x} = \upsilon d\upsilon$$

Integrando:

$$\ln|x| = \frac{\upsilon^2}{2} + c$$

Como $v=\dfrac{y}{x} \rightarrow \ln|x|=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{y^2}{x^2}+c$

Entonces: $\ln|x|=\dfrac{y^2}{2x^2}+c$

EJEMPLO 2

Resolver $(x+y)dx+(x+y-4)dy=0$

para $y=0$ cuando $x=-1$

Usando $v=x+y \rightarrow y=v-x$ y $dy=dv-dx$

$$vdx+(v-4)(dv-dx)=0$$

$$vdx+(v-4)dv-(v-4)dx=0$$

Separando variables:

$$(v-4)dv=-4dx$$

Integrando:

$$\frac{v^2}{2}-4v=-4x+c$$

$$v^2-8v=-8x+c$$

Como: $v=x+y \rightarrow (x+y)^2-8(x+y)=-8x+c$

$$\therefore\ (x+y)^2-8y=c$$

Aplicando condiciones iniciales:

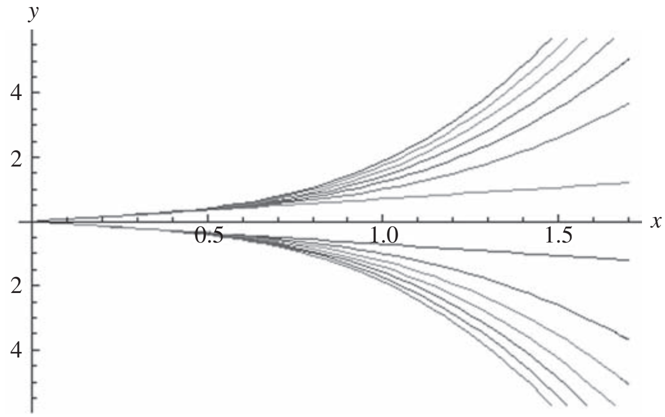
$$(-1)^2-0=c \rightarrow c=1 \ \therefore\ (x+y)^2-8y=1$$

La ecuación diferencial homogénea $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3y^2-x^2}{xy}$ puede resolver con `Mathematica` con los comandos:

```
eqn=y'[x]Š-(x^2-3y[x]^2)/(x*y[x]);
sol=DSolve[eqn,y,x]
```

$$\{\{y®Function[\{x\},\sqrt{\frac{x^2}{2}?x^6C1}\ ]\},\{y®Function[\{x\},\sqrt{\frac{x^2}{2}?x^6C1}\ ]\}\}$$

Las curvas de solución de esta ecuación diferencial que aporta `Mathematica` se muestran enseguida:



EJERCICIOS 2.2

Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

	Solución general
1. $xy' = y - x$	$y = x\ln\dfrac{c}{x}$
2. $xy' = y + x$	$y = x\ln cx$
3. $(x-y)dx + (x-y+1)dy = 0$	$2(x+y) = \ln c(2x-2y+1)$
4. $y' = \dfrac{y^2+x^2}{2xy}$	$y^2 - x^2 = cx$
5. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$	$\dfrac{y^2}{x^2} = 2\ln\lvert x\rvert + c$
6. $\left(y + \sqrt{x^2+y^2}\right)dx = xdy$	$\ln x = \operatorname{sen}h^{-1}\dfrac{y}{x} + c$
7. $x(x+y)dy = \left(x^2+y^2\right)dy$	$-\dfrac{y}{x} = \ln cx\left(1-\dfrac{y}{x}\right)^2$
8. $xy' - y = x^2e^x$	$y = xe^x + cx$
9. $xy' = x^2\operatorname{sen} x + y$	$y = -x\cos x + cx$
10. $(y+x)y' = x - y$	$y^2 + 2xy - x^2 = c$
11. $(7x+2y)y' = -2x - 7y$	$y^2 + 7xy + x^2 = c$
12. $\left(3y^2+x^2\right)y' + 2xy + 3x^2 = 0$	$y^3 + x^2y + x^3 = c$
13. $\left(2xy+x^2+3y^2\right)y' + \left(y^2+2xy+3x^2\right) = 0$	$(y+x)\left(y^2+x^2\right) = c$

14. $\left(2xy+2y^2+x^2+y^2\right)y'+\left(2x^2+2xy+x^2+y^2\right)=0$ $\qquad\left(y+x\right)\left(y^2+x^2\right)=c$

15. $y'=\dfrac{3y-4x}{2y-3x}$ $\qquad\left(y-x\right)\left(y-2x\right)=c$

16. $x^2-y^2=xyy'$ $\qquad x^2\left(x^2-2y^2\right)=c$

17. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-x+1}{y-x-6}$ $\qquad\left(y-x^2\right)-12y-2x=c$

18. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y+2}{x+y-4}$ $\qquad y=3\ln\left|x+y-1\right|+x+c$

19. $\left(x^2+2xy\right)y'=-3x^2-y^2-2xy$ $\qquad x^3+x^2y+xy^2=c$

20. $\left(x^2+2xy\right)y'=-2y^2-3xy$ $\qquad x^2y^2+x^3y=c$

Encontrar la solución particular correspondiente a las condiciones iniciales dadas:

Respuestas:

21. $\left(3xy^2+x^3\right)y'=3y^3+x^2y$ $\qquad y=2x$

para $y(1)=2$ $\qquad y^3+x^2y=10x^3$

22. $\left(3xy^2-x^3\right)y'=3y^3-x^2y$

para $y(1)=0$ $\qquad y=0$

23. $y'=\dfrac{y-x+8}{y-x-1}$

para $y(1)=-2$ $\qquad\left(y-x\right)^2-2\left(y-x\right)=18x-3$

24. $y'=\dfrac{y-x-2}{y-x+7}$

para $y\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$ $\qquad\left(y-x\right)^2+14y+4x=9$

25. $\left(y-x\right)y'+y=0$

para $y(0)=1$ $\qquad ye^{\frac{x}{y}}=1$

26. $x^2y'=y^2+xy$

para $y(1)=1$ $\qquad xe^{\frac{x}{y}}=e$

27. $\left(x^2+xy\,\text{sen}\,\dfrac{y}{x}\right)y'=y^2\,\text{sen}\,\dfrac{y}{x}$

para $y(1)=\dfrac{\pi}{2}$ $\qquad y=\dfrac{\pi}{2}e^{\cos\frac{y}{x}}$

28. $\left[1-2(x+y)\right]y'+x+y+1=0$ para $y(1)=0$

Sugerencia: $v=x+y$ $\ln(x+y)+x-2y=1$

29. $x\cos\frac{y}{x}y'=y\cos\frac{y}{x}-x\operatorname{sen}\frac{y}{x}$

para $y(1)=\frac{\pi}{2}$ $x\operatorname{sen}\frac{y}{x}=1$

30. $\left(xy\cos\frac{y}{x}+x^2\operatorname{sen}\frac{y}{x}\right)y'=y^2\cos\frac{y}{x}$

para $y(1)=\frac{\pi}{2}$ $y\operatorname{sen}\frac{y}{x}=\frac{\pi}{2}$

Elegir la opción que contiene la solución particular de la ecuación diferencial dada:

31. $x\left(e^{\frac{y}{x}}-1\right)y'=e^{\frac{y}{x}}(y-x)$ para $y(1)=0$

a. $y=e^{\frac{y}{x}}+1$

b. $y=xe^{\frac{y}{x}}-1$

c. No puede usarse cambio de variable.

d. No se puede integrar por los métodos directos.

32. $xe^{\operatorname{sen}\frac{y}{x}}\cos\frac{y}{x}y'=x^2+ye^{\operatorname{sen}\frac{y}{x}}\cos\frac{y}{x}$ para $y(1)=0$

a. $x=e^{\operatorname{sen}\frac{y}{x}}+1$

b. $x=e^{\operatorname{sen}\frac{y}{x}}-2$

c. $x=e^{\operatorname{sen}\frac{y}{x}}$

d. $x=e^{\operatorname{sen}\frac{y}{x}}-1$

33. $y'=\frac{y-2x+1}{y-2x-1}$ para $y(0)=2$

a. $x-y-2\ln|3-y+2x|=-2$

b. $x-y+2\ln|y-2x-1|=-2$

c. $x-y+2\ln|3-y+2x|=c$

d. $x-y+2\ln|y-2x-1|=c$

34. $(x+2y)y'=-y-2x$ para $y(-2)=2$

a. $xy^2+x^2y+x^3=c$

b. $\dfrac{y^2}{x^2} = \ln \dfrac{cx^2}{2y+x}$

c. $\dfrac{y^2}{x^2} = \ln \dfrac{4x^2}{2y+x}$

d. $y^2 + xy + x^2 = 4$

35. $(2x+3y)y' = 2(x-y)$ para $y(-1)=1$

a. $3y^2 + 4xy - 2x^2 + 5 = 0$

b. No puede aplicarse la sustitución $y = vx$ porque la ecuación no es homogénea.

c. No puede aplicarse la sustitución $x - y = v$ porque la ecuación no es homogénea.

d. $3y^2 + 4xy - 2x^2 = -3$

Respuestas:

31. *a*. La opción *a* no consideró la constante de integración.

La opción *c* niega el hecho de que sí puede usarse el cambio de variable $y = vx$ La *d* opina que $\dfrac{e^v - 1}{v - e^v} dv = \dfrac{dx}{x}$ no puede integrarse, siendo que ya es de variables separables y la integración es inmediata.

32. *c*. En las opciones *a*, *b* y *d* se aplicaron mal las condiciones iniciales.

33. *a*. La opción *b* no tomó la integral correspondiente al diferencial de *v*. En la opción *c* no se aplicaron las condiciones iniciales. La opción *d* contiene los errores de las opciones *b* y *c*.

34. *d*. En la opción *a* faltan las condiciones iniciales. En las opciones *b* y *c* hay error en la integración de la variable *v*.

35. *d*. En la opción *a* están mal aplicadas las condiciones iniciales. La opción *b* ignora que la ecuación sí es homogénea y permite el uso de $y = vx$. La opción *c* contempla una sustitución no apropiada.

Ecuaciones diferenciales exactas

Definición 2.5

Dada la función $z = f(x, y)$ se dice que la expresión $dz = f_x dx + f_y dy$ es su *diferencial total.*

Donde f_x y f_y son las derivadas parciales de la función $f(x, y)$ con respecto a cada una de las dos variables independientes; además, se supone que estas derivadas parciales son continuas en una región R del plano *xy*.

EJEMPLO 1

Sea $z = 4x^2y - 2xy^3 + 3x$

$$\Rightarrow\ dz = \left(8xy - 2y^3 + 3\right)dx + \left(4x - 6xy^2\right)dy$$

es la diferencial total de la función z.

EJEMPLO 2

Sea $z = e^{\frac{x}{y}} + xy$

$$\Rightarrow\ dz = \left(\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}} + y\right)dx - \left(\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}} - x\right)dy$$

es la diferencial total de la función z.

Si se toma el lado derecho de la expresión y se iguala a cero, entonces:

Definición 2.6
La igualdad $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ es una ecuación diferencial exacta, el primer miembro es una diferencial total.

Es decir: Si $df = f_x dx + f_y dy \Rightarrow f_x dx + f_y dy = 0$ es una ecuación diferencial exacta y $f_x = M(x, y)$, $f_y = N(x, y)$. Encontrar la solución de una ecuación diferencial exacta es hallar una función $f(x, y)$ tal que su diferencial total sea exactamente la ecuación diferencial dada. Usando la notación de la derivación parcial, se tiene:

$$M = \frac{\partial f}{\partial x},\ N = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Si se vuelve a derivar estas igualdades, pero cada una con respecto a la otra variable:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},\ \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Por el cálculo se sabe que si las derivadas parciales son continuas entonces:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Esto significa que: $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$

Por tanto, si la ecuación es exacta se cumple esta condición. Por eso se establece el siguiente teorema.

TEOREMA 1. La condición *necesaria* y *suficiente* para que la ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ sea exacta es que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

La explicación anterior demuestra el teorema. Para ver si una ecuación diferencial es exacta se aplicará inmediatamente.

EJEMPLO 1

Sea la ecuación diferencial: $x \operatorname{sen} y dx + y \cos x dy = 0$. ¿Es exacta?
Sean $M = x \operatorname{sen} y$ y $N = y \cos x$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = x \cos y\,,\ \frac{\partial N}{\partial x} = -y \operatorname{sen} x$$

Como $x \cos y \neq -y \operatorname{sen} x$, no es exacta.

EJEMPLO 2

Averiguar si la ecuación diferencial

$$\underbrace{e^y}_{M} dx + \underbrace{xe^y}_{N} dy = 0 \text{ es exacta}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^y,\ \frac{\partial N}{\partial x} = e^y$$

como $M_x = N_y = e^y$, sí es exacta.

EJEMPLO 3

Dada la ecuación diferencial $xdy - ydx = 0$, aplicar el teorema para probar que no es exacta.

$$M_x = 1\,,\ N_y = -1\,,\ M_x \neq N_y$$

Si se intercambian los diferenciales, las derivadas parciales deben obtenerse con respecto a la variable independiente que no está multiplicando a la función.

Así, en este caso $M = x$, $N = -y$, en vez de tomar $\frac{\partial M}{\partial y}$ y $\frac{\partial N}{\partial x}$ como indica el teorema, se toma $\frac{\partial M}{\partial y}$ y $\frac{\partial N}{\partial x}$.

MÉTODO DE SOLUCIÓN:

1. Dada la ecuación diferencial se ve si es exacta.
2. Se aplica la definición:

   $f_x = M(x,y)$ o bien $f_y = N(x,y)$
3. Se integra con respecto a x o con respecto a y.

   $f = \int M dx$ o bien $f = \int N dy$
4. Al resultado se deriva con respecto a y o bien con respecto a x.

   $f_y = \frac{\partial}{\partial y}\int M dx \quad f_x = \frac{\partial}{\partial x}\int N dy$
5. Se iguala el nuevo resultado a N o bien a M.
6. Se integra por última vez la ecuación.

EJEMPLO 4

Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$\left(6xy - 2y^2\right)dx + \left(3x^2 - 4xy\right)dy = 0, \text{ si es exacta.}$$

1. $M = 6xy - 2y^2,\ N = 3x^2 - 4xy$

   $M_y = 6x - 4y,\ N_x = 6x - 4y$

   Es exacta porque $M_y = N_x$.
2. Existirá una función f tal que $f_x = M(x,y)$ y $f_y = N(x,y)$, por definición; se toma cualquiera de las dos igualdades, por ejemplo:

$$f_x = M(x,y) \Rightarrow f_x = 6xy - 2y^2$$

3. Integrando con respecto a x

$$\int f_x = \int\left(6xy - 2y^2\right)dx$$

$$f = 3x^2y - 2xy^2 + f(y)$$

   La constante arbitraria de integración será una función de y, puesto que y funge como constante en esta integral.
4. Derivando con respecto a y:

$$f_y = 3x^2 - 4xy + f'(y)$$

5. Se sabe que $f_y = N(x,y)$ por definición, entonces:

$$f_y = 3x^2 - 4xy$$

Como dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí:

$$3x^2 - 4xy + f'(y) = 3x^2 - 4xy \Rightarrow f'(y) = 0$$

6. Integrando: $f(y) = c$

$\therefore$ La solución es: $f(x, y) = 3x^2y - 2xy^2 + c$

o bien, $3x^2y - 2xy^2 + c = 0$, o bien, $3x^2y - 2xy^2 = c$

La comprobación se reduce a encontrar la diferencial total de la función solución.

Se obtiene el mismo resultado, si en vez de tomar la ecuación

$$f_x = M(x, y), \text{ se toma } f_y = N(x, y)$$

EJEMPLO 5

Verificar la solución del problema del ejemplo 6, tomando $f_y = N(x, y)$:

1. Se vio que $M_y = N_x$.

2. $f_y = 3x^2 - 4xy$.

3. Integrando con respecto a y:

$$\int f_y = \int \left(3x^2 - 4xy\right)dy$$

$$f = 3x^2y - 2xy^2 + f(x)$$

4. Derivando con respecto a x:

$$f_x = 6xy - 2y^2 + f'(x)$$

5. $f_x = 6xy - 2y^2 + f'(x) = 6xy - 2y^2 \Rightarrow f'(x) = 0.$

6. Integrando: $f(x) = c$

$\therefore 3x^2y - 2xy^2 = c$ es la misma solución obtenida anteriormente.

EJEMPLO 6

Resolver la siguiente ecuación diferencial, si es exacta:

$$\left(2y - 2xy^3 + 4x + 6\right)dx + \left(2x - 3x^2y^2 - 1\right)dy = 0 \text{ para } y(-1) = 0$$

1. $M_y = 2 - 6xy^2 = N_x$, sí es exacta.

2. $f_x = M(x, y)$ por definición, entonces:

$$f_x = 2y - 2xy^3 + 4x + 6$$

3. Integrando con respecto a x:

$$f = 2xy - x^2y^3 + 2x^2 + 6x + f(y)$$

4. Derivando con respecto a y:

$$f_y = 2x - 3x^2y^2 + f'(y)$$

5. $f_y = N(x, y)$

$$2x - 3x^2y^2 + f'(y) = 2x - 3x^2y^2 - 1 \Rightarrow f'(y) = -1$$

6. Integrando:

$f(y) = -y + c$

$\therefore$ la solución es:

$2xy - x^2y^3 + 2x^2 + 6x - y = c$; para $y(-1) = 0$

$2(-1)^2 + 6(-1) = c$

$c = -4$

$\therefore$ $2xy - x^2y^3 + 2x^2 + 6x - y + 4 = 0$ es solución particular.

EJEMPLO 7

Resolver $\left(2x + 6x^2y\right)dx + \left(3x^3 - 2xy\right)dy = 0$

1. $M = 2x + 6x^2y$ $\qquad N = 3x^3 - 2xy$

$M_y = 6x^2$ $\qquad N_x = 9x^2 - 2y$

$M_y \neq N_x$ $\qquad \therefore$ No es exacta.

Observando la ecuación, vemos que puede dividirse entre $x \neq 0$ por lo que:

$\left(2 + 6xy\right)dx + \left(3x^2 - 2y\right)dy = 0$

$\Rightarrow M_y = 6x = N_x$ ya es exacta.

2. $f_x = M(x, y)$

$f_x = 2 + 6xy$

3. Integrando con respecto a $x: f = 2x + 3x^2y + f(y)$

4. Derivando con respecto a $y: f_y = 3x^2 + f'(y)$

5. $f_y = N(x, y)$

$$3x^2 + f'(y) = 3x^2 - 2y \Rightarrow f'(y) = -2y$$

6. Integrando: $f(y) = -y^2 + c$

$\therefore 2x + 3x^2y - y^2 = c$

Solución que satisface a las dos ecuaciones diferenciales.

`Mathematica` empieza por definir las funciones M y N como P y Q, y después verifica las condiciones de exactitud. Por ejemplo, para la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{11 + 5x^2 - 2y^2}{3 + \operatorname{sen} y + 4xy}$

```
P[x_,y_]:=-(5 x^2-2 y^2+11)

Q[x_,y_]:=(Sin[y]+4 x*y+3)

Simplify[D[P[x,y],y]-D[Q[x,y],x]]

0
```

$$\texttt{eqn = y'[x]==}{}^{\texttt{-P[x,y[x]]}}/_{\texttt{Q[x,y[x]]}}$$

$$\texttt{y'[x]==}\frac{\texttt{11+5x}^2\texttt{-2y[x]}^2}{\texttt{3+Sin[y[x]]+4xy[x]}}$$

```
sol = DSolve[eqn,y[x],x]
```

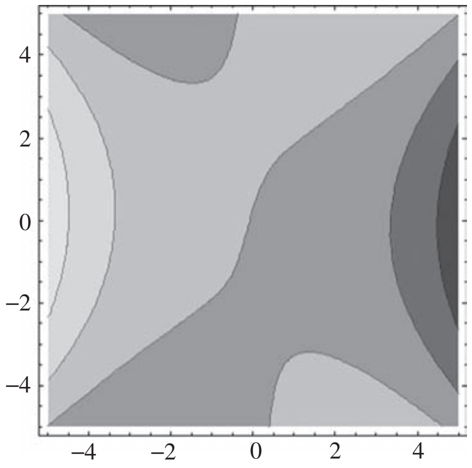
$$\texttt{Solve}\left[\texttt{-11x-}\frac{\texttt{5x}^3}{\texttt{3}}\texttt{-Coscos[y[x]]+3y[x]+2xy[x]}^2\texttt{==C[1],y[x]}\right]$$

Para verificar esta solución:

$$\frac{\dfrac{\texttt{Solve[D[sol[[1]],x],y'[x]]}}{\square}}{\texttt{Simplify}}$$

$$\left\{\texttt{\{y'[x]}\rightarrow\frac{\texttt{11+5x}^2\texttt{-2y[x]}^2}{\texttt{3+Sin[y[x]]+4xy[x]}}\right\}$$

$$\texttt{ContourPlot}\left[\texttt{Evaluate}\left[\frac{\texttt{sol[[,1]]}}{\texttt{.\{y[x]}\rightarrow\texttt{y}}\right]\texttt{,\{x,-5,5\},\{y,-5,5\}}\right]$$



EJERCICIOS 2.3

Determinar si las siguientes ecuaciones diferenciales son exactas; resolverlas si lo son.

1. $(2x-5y+2)dx+(1-6y-5x)dy=0$

   Respuesta: $x^2+2x-3y^2+y-5xy=c$

2. $(2xy^3-4y+4x-3)dx+(3x^2y^2-4x)dy=0$

   Respuesta: $x^2y^3-4xy+2x^2-3x=c$

3. $(16xy-3x^2)dx+(8x^2+2y)dy=0$

   Respuesta: $8x^2y-x^3+y^2=c$

4. $(-20xy^2+6x)dx+(3y^2-20x^2y)dy=0$

   Respuesta: $3x^2-10x^2y^2+y^3=c$

5. $(e^x+y)dx+(e^y+x)dy=0$

   Respuesta: $e^x+xy+e^y=c$

6. $\left(y-\dfrac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}}\right)dx+\left(x+\dfrac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}\right)dy=0$

   Respuesta: $xy+e^{\frac{y}{x}}=c$

7. $\left(1-\dfrac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}}\right)dx+\left(1+\dfrac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}\right)dy=0$

   Respuesta: $e^{\frac{y}{x}}+y+x=c$

8. $\left(1-\dfrac{y}{x}e^{\frac{y}{x}}\right)dx+e^{\frac{y}{x}}dy=0$

   Respuesta: $xe^{e^{\frac{y}{x}}}=c$ ecuación diferencial no exacta.

9. $y(1+\cos xy)dx + x(1+\cos xy)dy = 0$

Respuesta: $xy + \text{sen } xy = c$

10. $(6xy^3 + y \text{ sen } xy + 1)dx + (9x^2y^2 + x \text{ sen } xy)dy = 0$

Respuesta: $3x^2y^3 - \cos xy + x = c$

11. $(3x^2 + y\cos xy)dx + (3y^2 + x\cos xy)dy = 0$

Respuesta: $x^3 + \text{sen } xy + y^3 = c$

12. $(4x^3 - 4xy^2 + y)dx + (4y^3 - 4x^2y + x)dy = 0$

Respuesta: $(x^2 - y^2)^2 + xy = c$

13. $\left(\text{sen } y + \dfrac{y}{x^2}\text{ sen } \dfrac{y}{x}\right)dx + \left(x\cos y - \dfrac{1}{x}\text{ sen } \dfrac{y}{x}\right)dy = 0$

Respuesta: $x \text{ sen } y + \cos\dfrac{y}{x} = c$

14. $(y\cosh xy + 2x)dx + (x\cosh xy - 2y)dy = 0$

Respuesta: $\text{sen } hxy + x^2 - y^2 = c$

15. $e^x \cos ydx - xe^x \text{ sen } ydy = 0$ para $y(0) = \pi$

Respuesta: No es exacta.

16. $e^x \cos ydx - e^x \text{ sen } ydy = 0$ para $y(0) = \pi$

Respuesta: $e^x \cos y = -1$

17. $[\cos(x+y) - 1]dx + \cos(x+y)dy = 0$ para $y(0) = \frac{\pi}{2}$

Respuesta: $\text{sen } (x+y) = 1 + x$

18. $e^x \text{ sen } ydx + (e^x\cos y + e^y)dy = ($ para $y(0) = 0$

Respuesta: $e^x \text{ sen } y + e^y = 1$

19. $(2x \text{ sen } y + ye^{xy})dx + (x\cos y + e^{xy})dy = 0$ para $y(1) = 1$

Respuesta: No es exacta.

20. $(2x \text{ sen } y + ye^{xy})dx + (x^2\cos y + xe^{xy})dy = 0$ para $y(0) = \pi$

Respuesta: $x^2 \text{ sen } y + e^{xy} = 1$

21. $(\sqrt{y} + 1)dx + \left(\dfrac{x}{2\sqrt{y}} + 1\right)dy = 0$ para $y(1) = 4$

Respuesta: $x\sqrt{y} + x + y = 7$

22. $(4+5y)dx + (1+5x)dy = 0$ para $y(-1) = -1$

Respuesta: $4x + 5xy + y = 0$

23. $\left(1-\dfrac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\right)dx+\left(1-\dfrac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\right)dy=0$ para $y(0)=-2$

Respuesta: $x+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+y+\dfrac{3}{2}=0$

24. $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+y\right)dx+\left(x-\dfrac{1}{2y^{3/2}}\right)dy=0$ para $y(9)=1$

Respuesta: $\sqrt{x}+xy+\dfrac{1}{\sqrt{y}}=13$

25. $\left(\dfrac{-1-y^2}{x^2}-1\right)dx+\dfrac{2y}{x}dy=0$ para $y(1)=2$

Respuesta: $1+y^2-x^2=4x$

26. $y\cos xy\,dx+\left(x\cos xy+\operatorname{sen} y\right)dy=0$ para $y(3)=0$

Respuesta: $\operatorname{sen} xy-\cos y+1=0$

27. $\left(\dfrac{1}{x}+2x\right)dx+\left(\dfrac{1}{y}-1\right)dy=0$ para $y(1)=1$

Respuesta: $\ln|xy|+x^2-y=0$

28. $\left(\dfrac{1}{x}+ye^{xy}\right)dx+\left(\dfrac{1}{y}+xe^{xy}\right)dy=0$ para $y\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$

Respuesta: $\ln|xy|+e^{xy}=e$

29. $\left(2x-\dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}\right)dx+\left(2y+\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x}\right)dy=0$ para $y(1)=0$

Respuesta: $y^2+\operatorname{sen}\dfrac{x}{y}+x^2=1$

30. $\left(\dfrac{xy}{\sqrt{1+x^2}}+2x\right)dx+\sqrt{1+x^2}\,dy=0$ para $y(0)=6$

Respuesta: $y\sqrt{1+x^2}+x^2=6$

Elegir la opción que contiene la solución de la ecuación diferencial dada:

31. $\left(y-\dfrac{1}{y}\right)dx+\left(x+\dfrac{x}{y^2}\right)dy=0$

a. $1+\dfrac{1}{y^2}$

b. $xy-\dfrac{y}{x}=c$

c. $xy-\dfrac{x}{y}=c$

d. $1-\ln y+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^2}{2y^2}=c$

32. $(2x-4y)dx+\left(-\dfrac{5}{y^2}-4x\right)dy=0$ para $y(1)=5$

a. $x^2-4xy+\dfrac{5}{y}=c$

b. $\dfrac{5}{y}-4xy=0$

c. $f_x=-4$

d. $x^2-4xy+\dfrac{5}{y}+18=0$

33. $\left(e^{y/x}-\dfrac{y}{x}e^{y/x}-1\right)dx+\left(e^{y/x}+2y\right)dy=0$

a. $xe^{y/x}+y^2-x=0$

b. $-\dfrac{y}{x^2}e^{y/x}$

c. $xe^{y/x}+y^2-x=c$

d. $-\dfrac{1}{x^2}e^{y/x}-\dfrac{y}{x^3}e^{y/x}+2x=c$

34. $\left(\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{y}{x^2}\right)dx+\left(\operatorname{sen}^{-1}x+\dfrac{1}{x}\right)dy=0$

a. $y\operatorname{sen}^{-1}x+\dfrac{y}{x}=c$

b. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{1}{x^2}=c$

c. $y\operatorname{sen}^{-1}x+\dfrac{y}{x}=1$

d. No es diferencial exacta.

35. $\left(\cos^{-1}y-\dfrac{y}{x^2}e^{y/x}\right)dx+\left(\dfrac{-x}{\sqrt{1-y^2}}+\dfrac{1}{x}e^{y/x}\right)dy=0$

a. No es diferencial exacta.

b. $\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}-\dfrac{1}{x^2}e^{y/x}-\dfrac{y}{x^3}e^{y/x}$

c. $x\cos^{-1}y+e^{y/x}=c$

d. $\dfrac{x^2y}{2\left(1-y^2\right)^{3/2}}+\dfrac{1}{x}e^{y/x}=c$

Respuestas:

31. *c*. La opción *a* no es solución sino la parcial de M con respecto a y o la parcial de N con respecto a x. La opción *b* tiene un error de integración. La opción *d* tomó $f_y = y - \frac{1}{y}$ en vez de $f_x = y - \frac{1}{y}$.

32. *d*. La opción *a* no tomó en cuenta las condiciones iniciales. En la opción *b* no se terminó el proceso para encontrar f_y. La opción *c* da el teorema $M_y = N_x = -4$ pero no es la solución.

33. *c*. La opción *a* supone unas condiciones iniciales que no fueron dadas. La opción *b* representa $M_y = N_x$ pero no es la solución. En la opción *d* se tomó mal f_x que debe ser $e^{y/x} - \frac{y}{x}e^{y/x} - 1$.

34. *a*. La opción *b* contiene $M_y = N_x$ pero no es la solución. La opción *c* satisface a la ecuación diferencial pero no nos dieron condiciones iniciales, así que no es la opción correcta. La opción *d* está incorrecta porque sí es exacta.

35. *c*. La opción *a* es falsa, si es exacta. La opción *b* representa $M_y = N_x$ pero no es la solución. La opción *d* tomó $f_x = \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{1}{x}e^{y/x}$ por error.

Ecuaciones diferenciales con factores integrantes

Como se vio en el ejemplo 9 de la sección anterior, una ecuación diferencial que no es exacta puede convertirse en exacta mediante un factor apropiado.

Definición 2.7
Si existe una función $F(x, y)$ tal que $F(x, y)Mdx + F(x, y)Ndy = 0$ es exacta, entonces $F(x, y)$ se llama *factor de integración* de la ecuación diferencial $Mdx + Ndy = 0$.

Conviene notar que una ecuación diferencial no exacta puede tener varios factores integrantes; es decir, puede convertirse en exacta multiplicándola por x^2, xy, $\frac{y}{x}$, $\frac{x}{y}$, x^2y, etcétera.

Métodos para encontrar el factor integrante $F(x, y)$:

1. Por inspección de la ecuación diferencial se supone una función que luego se prueba por el teorema 1 de la página 56.
2. Si el factor es sólo función de x.

$$\Rightarrow F(x) = e^{\int p(x)dx}$$

donde $p(x) = \frac{M_y - N_x}{N}$

3. Si el factor es sólo función de y.

$$\Rightarrow F(y) = e^{\int p(y)dy}$$

donde $p(y) = \dfrac{N_x - M_y}{M}$

EJEMPLO 1

Hallar el factor de integración de la ecuación: $3ydx + 4ydy = 0$

$$M = 3y \qquad\qquad N = 4x$$

$$M_y = 3 \qquad\qquad N_x = 4$$

Como $M_y \neq N_x$ no es exacta.

Se observa que es de variables separables y su solución es $x^3y^4 = c$, pero también se puede encontrar su factor integrante.

Sea $F(x, y) = x^2y^3$ sugerido por la forma de la solución.

$$\Rightarrow \underbrace{3x^2y^4}_{M}dx + \underbrace{4x^3y^3}_{N}dy = 0$$

$$M_y = 12x^2y^3 = N_x, \text{ ya es exacta,}$$

$$f_x = 3x^2y^4$$

$$f = x^3y^4 + f(y)$$

$$f_y = 4x^3y^3 + f'(y) = 4x^3y^3$$

$$f'(y) = 0$$

$$f(y) = c$$

$$\therefore x^3y^4 = c$$

que es la solución que ya se había obtenido por el método de variables separables.

Por lo tanto, se puede usar la siguiente regla: Si la ecuación diferencial es de la forma $pydx + qxdy = 0$ donde $p, q \in \Re$

$$\Rightarrow F(x, y) = x^{p-1}y^{q-1}$$

Si la ecuación diferencial es de la forma $ydx - xdy = 0$

$\Rightarrow \dfrac{1}{y^2}, \dfrac{1}{x^2}, \dfrac{1}{xy}$ son posibles factores integrantes.

EJEMPLO 2

Hallar el factor de integración de $4ydx - xdy = 0$

$$M_y = 4,\ N_x = -1, \text{ no es exacta.}$$

Sea $F(x, y) = \dfrac{1}{xy}$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{4}{x}}_{M} dx - \underbrace{\frac{1}{y}}_{N} dy = 0$$

$$M_y = 0 = N_x, \text{ ya es exacta.}$$

$$f_x = \frac{4}{x}$$

$$f = 4\ln x + f(y)$$

$$f_y = f'(y) = -\frac{1}{y}$$

$$f(y) = -\ln y + \ln c$$

$$4\ln x - \ln y = \ln c$$

$$\frac{x^4}{y} = c$$

$$x^4 = cy$$

que es el mismo resultado que se obtiene usando separación de variables.

EJEMPLO 3

Encontrar el factor de integración de: $3x^2ydx + ydy = 0$

$$M_y = 3x^2,\ N_x = 0$$

Probamos si $F(x) = e^{\int p(y)dy}$ es factor de integración.

$p(x) = \dfrac{M_y - N_x}{N} = \dfrac{3x^2}{y}$ es función de x, por lo que se busca $F(y) = e^{\int p(y)dy}$ con:

$p(y) = \dfrac{N_x - M_y}{M} = \dfrac{0 - 3x^2}{3x^2y} = -\dfrac{1}{y}$, si lo es,

$$\Rightarrow F(y) = e^{\int \frac{-dy}{y}} = e^{-\ln y} = \frac{1}{y} \text{ con } y \neq 0$$

Multiplicando la ecuación diferencial por este factor se tiene:

$$3x^2dx + dy = 0$$

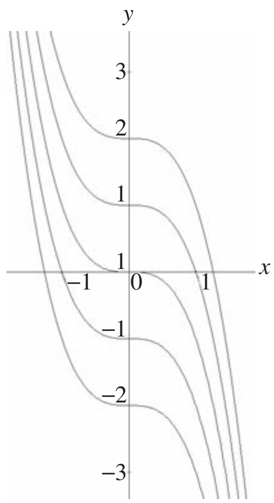
$$M = 3x^2 \quad N = 1$$

$$M_y = 0 \qquad N_x = 0, \text{ ya es exacta.}$$

$$f_x = 3x^2,\ f = x^3 + f(y),\ f_y = f'(y) = 1,\ f(y) = y + c$$

$$x^3 + y = c$$

La familia de curvas solución para algunos valores de c es:



EJEMPLO 4

Resolver mediante un factor integrante:

$x \tan x dx - y \cos x dy = 0$ para $y(0) = 2$

$$M = x \tan x \qquad N = -y \cos x$$

$$M_y = 0 \qquad N_x = y \operatorname{sen} x$$

¿Existirá una $F(x)$ o una $F(y)$ que convierta en exacta esta ecuación diferencial?:

$$p(x) = \frac{0 - y \operatorname{sen} x}{-y \cos x} = \tan x$$

$$\rightarrow F(x) = e^{\int \tan x dx} = e^{-\ln|\cos x|} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

$$x \sec x \tan x dx - y dy = 0, \text{ ya es exacta}$$

$$f_x = x\sec x\tan x dx$$

$$f = x\sec x - \ln|\sec x + \tan x| + f(y)$$

$$f_y = f'(y) = -y$$

$$f(y) = -\frac{y^2}{2} + c$$

$$\therefore x\sec x - \ln|\sec x + \tan x| - \frac{y^2}{2} = c$$

Sustituyendo las condiciones iniciales $y(0) = 2$

$$0(1) - \ln|1+0| - \frac{4}{2} = c \text{ de donde } c = -2$$

$$\therefore 2x\sec x - 2\ln|\sec x + \tan x| - y^2 = -4$$

EJERCICIOS 2.4

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales usando un factor de integración apropiado.

1. $x^{-2}y^{-5}dx + x^{-3}y^{-4}dy = 0$

Respuesta: factor x^3y^5. Solución: $x^2 + y^2 = c$

2. $x^2 \operatorname{sen} x dx + xy dy = 0$

Respuesta: factor $\frac{1}{x}$. Solución: $2\operatorname{sen} x - 2x\cos x + y^2 = c$

3. $(y + x + 2)dx + dy = 0$

Respuesta: factor e^x. Solución: $e^x(y + x + 1) = c$

4. $(e^x + y^2)dx + \left(xy - \frac{e^x}{y} - 2y^2\right)dy = 0$

Respuesta: factor $\frac{1}{y}$. Solución: $e^x + xy^2 - y^3 = cy$

5. $(xy + y + y^2)dx + (x + 2y)dy = 0$

Respuesta: factor e^x. Solución: $xye^x + y^2e^x = c$

6. $\left(2\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x + \frac{1}{x}\cos x\right)dx + \left(\frac{1}{y}\cos x + x\cos y + \frac{x}{y}\operatorname{sen} y\right)dy = 0$

Respuesta: factor xy. Solución: $xy\cos x + x^2y\operatorname{sen} y = c$

7. $(2xy + y^4)dx + (3x^2 + 6xy^3)dy = 0$

Respuesta: factor y^2. Solución: $x^2y^3 + xy^6 = c$

8. $(6x^2y^2 - 4y^4)dx + (2x^3y - 4xy^3)dy = 0$

Respuesta: factor x^3. Solución: $x^4y^2(x^2 - y^2) = c$

9. $\left(\dfrac{y}{x^2}+2\right)dx+\dfrac{1}{x}(1+\ln xy)\,dy=0$

Respuesta: factor x. Solución: $y\ln xy+x^2=c$

10. $\dfrac{1}{y^2}(1+\ln xy)dx+\left(\dfrac{x}{y^3}-3\right)dy=0$

Respuesta: factor y^2. Solución: $x\ln xy-y^3=c$

11. $y(1+\ln xy+2x)dx+\left(x-2y^2\right)dy=0$

Respuesta: factor $\dfrac{1}{y}$. Solución: $x\ln xy-y^2+x^2=c$

Encontrar la solución particular:

12. $\left(xy+1+\dfrac{2x}{e^{xy}}\right)dx+x^2dy=0$ para $y(-3)=0$

Respuesta: factor e^{xy}. Solución: $xe^{xy}+x^2=6$

13. $\left(4y^2-5xy\right)dx+\left(6xy-5x^2\right)dy=0$ para $y(1)=2$

Respuesta: factor x^3y^4. Solución: $x^4y^6-x^5y^5=32$

14. $(ye^{2y}+x+1)dx+(ye^{2y}+e^{2y}-x)dy=0$ para $y(1)=0$

Respuesta: factor e^{x-y}. Solución: $ye^{x+y}+xe^{x-y}=e$

15. $[-y-\cot(x+y)]dx-ydy=0$ para $y(\pi)=\pi$

Respuesta: factor $\operatorname{sen}(x+y)$. Solución: $y\cos(x+y)-\operatorname{sen}(x+y)=\pi$

En los siguientes ejercicios probar, mediante el teorema 1, si la función $F(x,y)$ es factor integrante de la ecuación dada:

16. $F(x,y)=xy$ de $\left(ye^{xy}+\dfrac{1}{x}\right)dx+\left(xe^{xy}+\dfrac{1}{y}\right)dy=0$

Respuesta: Sí, pero no lo necesita porque ya es exacta.

17. $F(x,y)=xy$ de $-\dfrac{1}{x}dx-\dfrac{1}{y}dy=0$

Respuesta: Sí, pero no lo necesita, se integra directamente.

18. $F(y)=y$ de $(-\operatorname{sen}x+y)dx+\left(\dfrac{\cos x}{y}+2x\right)dy=0$

Respuesta: Sí.

19. $F(x)=x$ de $\left(y\cosh x+\dfrac{y}{x}\operatorname{sen}hx\right)dx+\operatorname{sen}hxdy=0$

Respuesta: Sí.

20. $F(x)=e^x$ de $(e^x\operatorname{sen}y+2xy)dx+(e^x\cos y+x^2)dy=0$

Respuesta: No, pero la ecuación es exacta.

21. $F(x,y)=xy^2$ de $(6y-24xy^5)dx+(9x-56x^2y^4)dy=0$

Respuesta: Sí.

22. $F(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ de $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\right)dx+\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+x\right)dy=0$

Respuesta: No, pero la ecuación es exacta.

En los siguientes ejercicios elegir la opción que contiene un factor de integración de la ecuación diferencial dada:

23. $(y-x^2y^5)dx+\left(\dfrac{3}{5}x-x^3y^4\right)dy=0$

a. x^2y^4
b. x^4y^2
c. xy^2
d. x^2y

24. $dx+(x-y+6)dy=0$

a. e^x
b. $e^{\frac{y}{x}}$
c. $e^{\frac{x}{y}}$
d. e^y

25. $(xy^2\operatorname{sen}hxy+y\cosh xy)dx+(x^2y\operatorname{sen}hxy+2x\cosh xy)dy=0$

a. y
b. x
c. $\dfrac{y}{x}$
d. $\dfrac{x}{y}$

26. $(1+xy)dx+\left(\dfrac{x}{y}+x^2\right)dy=0$

a. $\dfrac{1}{y}$
b. x
c. y
d. $\dfrac{1}{x}$

En los ejercicios siguientes, elegir la opción que contiene el factor integrante y la solución de la ecuación diferencial dada:

27. $\left(2+\dfrac{y}{x}\right)dx+\left(\dfrac{x}{y}+2\right)dy=0$

a. Factor: x^2y^2. Solución $x^2y+xy^2=c$
b. Factor: xy. Solución $2x+2y=c$
c. Factor: xy. Solución $x^2y+xy^2=c$
d. Factor: x^2y^2. Solución $\dfrac{2}{3}x^3y^2+\dfrac{1}{2}x^2y^3=c$

28. $\left(y+\frac{1}{e^{xy}}\right)dx+\left(x+\frac{1}{e^{xy}}\right)dy=0$

a. Factor: e^x. Solución $\frac{x}{y}e^{xy}-\frac{1}{x^2}e^{xy}=c$

b. Factor: e^{xy}. Solución $e^{xy}+x+y=c$

c. Factor: e^y. Solución $e^{xy}+\frac{y^2}{2}=c$

d. Factor: e^{xy}. Solución $e^{xy}+\frac{y^2}{2}=c$

29. $\left(\frac{y}{x}\cos xy+\frac{1}{x^2}\operatorname{sen} xy+3y^3\right)dx+\left(\cos xy+3xy^2\right)dy=0$

a. Factor: x. Solución $x\operatorname{sen} xy+x^3y^3=c$

b. Factor: x^2. Solución $-x^2y\operatorname{sen} xy+2x\cos xy+9x^2y^2=c$

c. Factor: x. Solución $-x^2y\operatorname{sen} xy+2x\cos xy+9x^2y^2=c$

d. Factor: x^2. Solución $x\operatorname{sen} xy+x^3y^3=c$

30. $\left(\frac{y}{2}+5x^4y\sqrt{xy}\right)dx+\left(\frac{x}{2}+x^5\sqrt{xy}\right)dy=0$

a. Factor: $\sqrt{xy}$. Solución $\frac{x}{3}\sqrt{\frac{x}{y}}+\frac{x^6}{6}=c$

b. Factor: xy. Solución $xy+\frac{5}{2}x^6y^2\sqrt{xy}+10x^5y\sqrt{xy}=c$

c. Factor: $\frac{1}{2\sqrt{xy}}$. Solución $\sqrt{xy}+x^5y=c$

d. Factor: $\sqrt{xy}$. Solución $-\frac{xy}{4(xy)^{3/2}}+\frac{1}{2\sqrt{xy}}+5x^4=c$

Respuestas:

23. *b*. El resto de las opciones no satisface el teorema de exactas.

24. *d*.

25. *a*.

26. *c*. y *d*.

27. *c*. La opción *a* muestra la solución correcta, de hecho, derivando y sustituyéndola en la ecuación, la satisface; sin embargo, el factor no es correcto; no cumple con el teorema de exactas. La opción *b* tiene el factor correcto, pero la expresión dada como solución es, en realidad, $M_y=2x+2y=N_x$ lo que demuestra que con el factor integrante la ecuación diferencial dada se convierte en exacta pero no es la solución. La opción *d* presenta una solución dependiendo de que estuviera correcto el factor de integración que propone.

28. *b*. La opción *a* presenta una exponencial que no es factor de integración y una solución equivocada, pues se tomó $f_x=N$ suponiendo el factor correcto. La opción *c*, además de no tener un factor correcto, tiene en la solución el resultado de igualar $f_y=M$ suponiendo el factor correcto. La opción *d* tiene el factor adecuado, pero error de la solución de la opción *c*.

29. *d*. La opción *a* tiene mal el factor de integración. La *b* tiene un correcto factor integrante; pero la expresión que funge como solución es $M_y = N_x$ y no la solución. La *c* tiene los errores de *a* y *b*.

30. *c*. La opción *a* tiene un factor correcto, pero la solución errónea proviene de haber igualado f_x a N. La opción *b* supone correcto el factor que propone y toma M_x como la solución. La opción *d* tiene el factor correcto, pero toma como solución $M_y = N_x$.

Ecuaciones diferenciales lineales

Se vio en el capítulo 1 que las condiciones para que una ecuación diferencial fuese *lineal* son: *a*) la variable dependiente *y* y todas sus derivadas son de primer grado, y *b*) cada coeficiente depende solamente de la variable independiente *x* (o constante).

Definición 2.8

La forma general de una ecuación lineal de primer orden es $y' + f(x)y = r(x)$. Si $r(x)$ es idénticamente igual a cero, entonces la ecuación se llama *lineal homogénea* (no en el sentido de polinomio homogéneo, sino como el nombre que da el álgebra lineal a las ecuaciones igualadas a cero); si $r(x) \neq 0$ entonces es *lineal no homogénea.*

MÉTODOS DE SOLUCIÓN

Si $r(x) = 0 \Rightarrow$ es de variables separables.

Si $r(x) \neq 0 \Rightarrow$ **1.** Método del factor integrante.

2. Método de variación de parámetros.

Y la forma de la solución es:

Para $r(x) = 0 \Rightarrow r(x) = 0$

Para $r(x) \neq 0 \Rightarrow y = e^{-\int f(x)dx}\left[\int e^{\int f(x)dx} r(x)dx + c\right]$

Se obtendrá la solución para $r(x) \neq 0$, usando el método de factor integrante y el de variación de parámetros.

1. **Método del factor integrante.** Buscaremos un factor que nos convierta la ecuación diferencial $y' + f(x)y = r(x)$ en exacta y se resolverá por el método de las exactas.

El hecho de que la solución general de la ecuación diferencial homogénea correspondiente sea $y = e^{-\int f(x)dx}$, sugiere la posibilidad de que un factor para la no homogénea sea de la forma $e^{\int f(x)dx}$.

Se probará esto. Multiplicando la ecuación por este factor, tenemos:

$$e^{\int f(x)dx}y' + f(x)ye^{\int f(x)dx} = r(x)e^{\int f(x)dx}$$

Al observar el primer miembro de la ecuación, se ve que está y en un término, su derivada y' en otro y la exponencial que acompaña a la y es la derivada de la exponencial que acompaña a y', realmente se puede expresar como la derivada de un producto de funciones:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int f(x)dx}y\right)$$

Entonces: $\frac{d}{dx}\left(e^{\int f(x)dx}y\right) = r(x)e^{\int f(x)dx}$

Integrando con respecto a $x: e^{\int f(x)dx}y = \int r(x)e^{\int f(x)dx} + c$

Despejando $y: y = e^{-\int f(x)dx}\left[\int e^{\int f(x)dx}r(x) + c\right]$ que es la solución general ya indicada y satisface a la ecuación lineal.

Como $e^{\int f(x)dx}$ nos llevó a la solución propuesta, es el *factor de integración* que convierte en *exacta* a la ecuación diferencial *lineal no homogénea*. Por ello, no es necesario memorizar la fórmula de la solución, basta buscar el factor, multiplicar la ecuación por él y resolver por exactas.

EJEMPLO 1

Dada la ecuación diferencial $dy + \left(3x^2y - x^2\right)dx = 0$, ver si es lineal y resolverla por medio del factor integrante.

Se acomoda según la forma indicada: $y' + f(x)y = r(x)$ quedando:

$$\frac{dy}{dx} + 3x^2y = x^2$$

Si es lineal, con $f(x) = 3x^2y$ y $r(x) = x^2$

Su factor integrante tiene la forma:

$$F(x) = e^{\int f(x)dx} = e^{\int 3x^2dx} = e^{x^3}$$

Multiplicando la ecuación, tenemos:

$e^{x^3}dy + e^{x^3}\left(3x^2y - x^2\right)dx = 0$

$M = e^{x^3}\left(3x^2y - x^2\right)$ $\qquad N = e^{x^3}$

$M_y = 3x^2e^{x^3}$ $\qquad N_x = 3x^2e^{x^3}$, ya es exacta.

Entonces:

$f_x = e^{x^3}3x^2y - e^{x^3}x^2$ $\qquad f = ye^{x^3} - \frac{1}{3}e^{x^3} + f(y)$

$f_y = e^{x^3} + f'(y) = e^{x^3}$ $\qquad f'(y) = 0$ y $f(y) = c$

$\therefore y = \frac{1}{3} + ce^{-x^3}$

Aplicando directamente la fórmula obtenida mediante el factor de integración, llegamos a la misma solución:

$$y = e^{-\int 3x^2dx}\left[\int e^{\int 3x^2dx}\left(x^2\right)dx + c\right]$$

$$y = e^{-x^3}\left[\int e^{x^3}x^2dx + c\right]$$

$$y = e^{-x^3}\left[\frac{1}{3}e^{x^3} + c\right]$$

$$y = \frac{1}{3} + ce^{-x^3}$$

2. **Método de variación de parámetros.** Es un procedimiento bastante usual en matemáticas introducir cambios de variables, hacer sustituciones o reemplazar funciones por otras más sencillas que faciliten el proceso operativo.

Se sabe que la solución general de la ecuación diferencial homogénea de primer orden $y' + f(x)y = 0$, es: $y = ce^{-\int f(x)dx}$.

Como nos interesa una solución general para la ecuación diferencial lineal no homogénea:

$$y' + f(x)y = r(x)$$

se realizará la siguiente *variación de parámetros* en la solución general de la homogénea:

$$\text{Sea } c = u(x) \text{ y } v = e^{-\int f(x)dx}$$

Entonces, $y(x) = u(x)v(x)$ será una solución de la no homogénea, siempre y cuando podamos encontrar una función $u(x)$ tal que dicha solución satisfaga a la ecuación. Si es solución, lo cual se supondrá de momento, entonces derivándola y sustituyéndola en la ecuación homogénea, se tiene:

$$y' = uv' + u'v$$

$$\Rightarrow uv' + u'v + fuv = r$$

$$u'v + (v' + fv)u = r$$

Como v es la solución de la homogénea, el paréntesis se hace idénticamente cero, ya que siempre que se sustituye la raíz o solución en una ecuación, ésta se hace cero. Se obtiene entonces: $u'v = r$ de donde $u' = \frac{r}{v}$.

Integrándola, $u = \int \frac{r}{v}dx + c$.

La función u existe porque $v \neq 0$ es solución, entonces $y = uv$ es solución de la lineal no homogénea y toma este aspecto:

$$y = e^{-\int f(x)dx}\left[\int \frac{r(x)}{e^{-\int f(x)dx}}dx + c\right]$$

Es decir, $y = e^{-\int f(x)dx}\left[\int e^{\int f(x)dx} r(x)dx + c\right]$, que es hacia donde se quería llegar.

EJEMPLO 2

Resolver por variación de parámetros: $y' = 2y + x$.

Se ve que $y' - 2y = x$ es lineal, donde $f(x) = -2$, $r(x) = x$.

La ecuación diferencial homogénea correspondiente es $y' - 2y = 0$ que tiene como solución: $y = ce^{2x}$.

Tomando $c = u(x)$, $v(x) = e^{2x}$ y sabiendo que la función u está dada por

$$u = \int \frac{r(x)}{v(x)}dx + c$$

$$\Rightarrow u = \int \frac{x}{e^{2x}}dx + c = -\frac{x}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + c$$

Como la solución de la homogénea es $y = uv$, entonces:

$$y = \left(-\frac{x}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + c\right)e^{2x} \text{ y } y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{4} + ce^{2x}$$

Aplicando directamente la fórmula obtenida mediante el factor de integración, se llega a la misma solución.

$$y = e^{\int 2dx}\left[\int e^{\int -2dx} xdx + c\right]$$

$$y = e^{2x}\left[\int e^{-2x} xdx + c\right]$$

$$y = e^{2x}\left[-\frac{x}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + c\right]$$

$$y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{4} + ce^{2x}$$

EJEMPLO 3

Resolver por variación de parámetros:

$$(x^2+16)y' - xy = x$$

$$y' - \frac{x}{x^2+16}y = \frac{x}{x^2+16}$$

La ecuación homogénea correspondiente es:

$$y' - \frac{x}{x^2+16}y = 0$$

Con la solución: $y = c\sqrt{x^2+16}$

Sea $v(x) = \sqrt{x^2+16}$ y $c = u(x) = \int \frac{\frac{x}{\cancel{(x^2+16)}}}{\sqrt{x^2+16}}dx + c$

$$\Rightarrow u = \int \frac{x}{\left(x^2+16\right)^{3/2}}dx + c$$

$$u = -\frac{1}{\sqrt{x^2+16}} + c$$

$$\Rightarrow y = uv = \left(-\frac{1}{\sqrt{x^2+16}} + c\right)\sqrt{x^2+16}$$

$$y = c\sqrt{x^2+16} - 1$$

que es la solución general de la ecuación dada.

EJEMPLO 4

Resolver por cualquiera de los dos métodos: factor integrante o variación de parámetros; o bien, aplicando la fórmula general:

$$y' = \frac{1}{x+y^3}$$

Se ve que no es lineal, pero tampoco se puede resolver por variables separables, no es exacta ni homogénea. ¿Qué se puede hacer? Tomando la función recíproca:

$$\frac{dx}{dy} = x + y^3 \quad \text{y} \quad \frac{dx}{dy} - x = y^3$$

Ya es una ecuación diferencial lineal en x.

Usando el factor integrante $F = e^{\int g(y)dy} = e^{-\int dy} = e^{-y}$ multiplicando la ecuación:

$$e^{-y}dx - e^{-y}\left(x + y^3\right)dy = 0$$

$$M = e^{-y} \qquad N = -e^{-y}\left(x + y^3\right)$$

$$M_y = -e^{-y} \qquad N_x = -e^{-y}, \text{ ya es exacta.}$$

$$f_x = e^{-y}$$

$$f = xe^{-y} + f(y)$$

$$f_y = -xe^{-y} + f'(y) = -xe^{-y} - y^3e^{-y}$$

$$f'(y) = -y^3e^{-y}$$

$$f(y) = y^3e^{-y} + 3y^2e^{-y} + 6ye^{-y} + 6e^{-y} + c$$

$$\therefore\ xe^{-y} + e^{-y}\left(y^3 + 3y^2 + 6y + 6\right) = c$$

$$e^{-y}\left(x + y^3 + 3y^2 + 6y + 6\right) = c$$

$$\text{o bien } \left(x + y^3 + 3y^2 + 6y + 6\right) = ce^{y}$$

Comprobación: derivando la variable x con respecto a y:

$$\frac{dx}{dy} + 3y^2 + 6y + 6 = ce^{y}$$

$$\frac{dx}{dy} + 3y^2 + 6y + 6 = e^{y}\left(\frac{x + y^3 + 3y^2 + 6y + 6}{e^{y}}\right)$$

$$\frac{dx}{dy} = x + y^3$$

EJERCICIOS 2.5

Resolver por el método de factor integrante o por la fórmula general.

1. $\left(3\frac{y}{x}-8\right)dx+3dy=0$

   Respuesta: factor x. Solución: $3xy-4x^2=c$

2. $\left(x+\frac{y}{x}\right)dx-dy=0$

   Respuesta: factor $\frac{1}{x}$. Solución: $y=x^2+cx$

3. $\left(\frac{5y}{x}-24x^2\right)dx+5dy=0$

   Respuesta: factor x. Solución: $5xy-6x^4=c$

4. $\frac{dy}{dx}-y=e^{2x}$

   Respuesta: factor e^{-x}. Solución: $y=e^{2x}+ce^{x}$

5. $\frac{dy}{dx}+y=e^{2x}$

   Respuesta: factor e^{x}. Solución: $y=\frac{1}{3}e^{2x}+ce^{-x}$

6. $y'+3x^2y=x^2$

   Respuesta: factor e^{x^3}. Solución: $y=\frac{1}{3}+ce^{-x^3}$

7. $y'+(\cos x)y=\cos x$

   Respuesta: factor $e^{\operatorname{sen} x}$. Solución: $y=1+ce^{-\operatorname{sen} x}$

8. $y'-\frac{y}{x}=x^4$

   Respuesta: factor $\frac{1}{x}$. Solución: $y=\frac{x^5}{4}+cx$

9. $xy'-2y=3x^2+2x$

   Respuesta: factor $\frac{1}{x^2}$. Solución: $y=3x^2\ln x-2x+cx^2$

10. $xy'+4y=9x^5+2x^3$

    Respuesta: factor x^4. Solución: $y=x^5+\frac{2}{7}x^3+cx^{-4}$

11. $xy'-3y=5x^5+x^2$

    Respuesta: factor $\frac{1}{x^3}$. Solución: $y=\frac{5}{2}x^5-x^2+cx^3$

12. $xy'+4y=x^{-3}e^{x}$

    Respuesta: factor x^3. Solución: $x^4y=e^{x}+c$

13. $xy'-3y=x^4\operatorname{sen} x$

    Respuesta: factor $\frac{1}{x^3}$. Solución: $y=x^3\left(-\cos x+c\right)$

14. $xy' - 5y = x^6 \sec^2 x$

Respuesta: factor $\dfrac{1}{x^5}$. Solución: $y = x^5 \tan x + cx^5$

15. $x^2 y' + 2xy = 3e^{3x}$

Respuesta: factor x^2. Solución: $3x^2 y = e^{3x} + c$

Resolver por el método de variación de parámetros o por la fórmula general.

16. $y' - 2y = -6,\ u = 3e^{-2x} + c$. Solución: $y = 3 + ce^{2x}$

17. $y' - 2y = x,\ u = e^{-2x}\left(-\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}\right) + c$. Solución: $y = -\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4} + ce^{2x}$

18. $y' - xy = x^2 e^{x^2/2},\ u = \dfrac{x^3}{3} + c$. Solución: $y = e^{x^2/2}\left(\dfrac{x^3}{3} + c\right)$

19. $xy' - 2x^2 y = e^{x^2},\ u = \ln x + c$. Solución: $y = e^{x^2}(\ln x + c)$

20. $y' + (\cos x)y = (\sec^2 x)e^{-\operatorname{sen} x},\ u = \tan x + c$. Solución: $y = (\tan x + c)e^{-\operatorname{sen} x}$

21. $y' - (\operatorname{sen} hx)y = xe^{\cosh x},\ u = \dfrac{x^2}{2} + c$. Solución: $y = e^{\cosh x}\left(\dfrac{x^2}{2} + c\right)$

22. $y' - \dfrac{1}{1+x^2}y = \dfrac{1}{1+x^2}$. Solución: $y = ce^{\tan^{-1} x} - 1$

23. $y' + (\ln x)y = \ln x$. Solución: $y = 1 + ce^{x(1-\ln x)}$

24. $y' + (1 + 3x^2)y = 3 + 9x^2$. Solución: $y = 3 + ce^{x(-1-x^2)}$

25. $y' + (\sec x)y = \cos x$. Solución: $y = \dfrac{x - \cos x + c}{\sec x + \tan x}$

Resolver las siguientes ecuaciones para las condiciones iniciales dadas y usando dos métodos (como comprobación uno del otro).

26. $y' + y = e^{-x}$ para $y(0) = -\dfrac{1}{4}$

Respuesta: $y = e^{-x}\left(x - \dfrac{1}{4}\right)$

27. $y' - (\tan x)y = x \sec x$ para $y(0) = \sqrt{\pi}$

Respuesta: $y = \sec x\left(\dfrac{x^2}{2} + \sqrt{\pi}\right)$

28. $y' + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}y = \dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}}$ para $y(0) = 4$

Respuesta: $y = 3 + e^{-\operatorname{sen}^{-1} x}$

29. $y' + \dfrac{1}{1+x^2}y = e^{\tan^{-1} x}$ para $y(0) = 0$

Respuesta: $y = xe^{-\tan^{-1} x}$

30. $y'+(\sec x\tan x)y=\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$ para $y(0)=6$

Respuesta: $y=1+5e^{1-\sec x}$

En los siguientes ejercicios elegir la opción correcta.

31. Dada la ecuación diferencial de primer orden: $yy'-x^2=xe^x$

a. Es lineal en *y* porque *y* y y' son de primer grado.

b. Es lineal en *y* porque cada coeficiente depende solamente de *x*.

c. No es lineal en *y* porque *y* no está elevada al exponente 1, sino al exponente -1.

d. No es lineal en *x* porque es lineal en *y*.

32. Sea la ecuación diferencial lineal: $y'+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}y=1$; el factor integrante que le convierte en exacta es:

a. $e^{-\operatorname{sen}^{-1}x}$

b. $e^{\operatorname{sen}^{-1}x}$

c. $e^{\operatorname{sen}^{-1}y}$

d. $e^{-\operatorname{sen}^{-1}y}$

33. Dada la ecuación $y'-\dfrac{8y}{x}=888x^8$, el factor integrante que la convierte en exacta es:

a. x^8

b. x^{-8}

c. No necesita factor integrante porque ya es exacta.

d. No necesita factor integrante porque puede resolverse por la fórmula general de las lineales.

34. Sea la ecuación diferencial $y'-(\tan x)y=x$ ¿qué forma tiene $u(x)$ para que $y=uv$ sea solución de esta ecuación?

a. $u=\displaystyle\int\frac{x}{\cos x}dx$

b. $u=\displaystyle\int x\cos x dx$

c. $u=\dfrac{1}{\cos x}$

d. $u=x$

35. Sea la ecuación diferencial $y'-(\ln x)y=1$ ¿qué forma tiene $v(x)$ para que $y=uv$ sea solución de esta ecuación?

a. $v=e^{x(1-\ln x)}$

b. $v=\displaystyle\int\frac{e^x}{e^{x\ln x}}dx$

c. $v=e^{x(\ln x-1)}$

d. $v=\displaystyle\int\frac{e^{x\ln x-x}}{e^x}dx$

36. Sea la ecuación diferencial $xy' - 2x^2 y = e^{x^2}$ (vea ejercicio 19) ¿qué función $u(x)$ es la que debemos tomar para hallar la solución por el método de variación de parámetros?

a. $u = e^{x^2}$

b. $u = -2x$

c. $u = \ln x$

d. $u = \ln x + c$

37. Las condiciones de linealidad en x son:

a. y y sus derivadas son de primer grado.
Las funciones forman una combinación lineal.

b. Los coeficientes son funciones de x solamente.
y y sus derivadas son de primer grado.

c. La ecuación debe ser de primer orden.
Los coeficientes son funciones de x solamente.

d. Las funciones forman una combinación lineal.
La ecuación debe ser de primer orden.

38. Dada la ecuación $x^2 y' + 2xy = e^x$, encontrar la opción que contiene un paso intermedio de la solución, usando la fórmula general.

a. $y = x^{-2}\left(\int e^x dx + c\right)$

b. $y = x^{-2}\left(\int \frac{e^x}{x^2} dx + c\right)$

c. $y = x^{2}\left(\int x^{-2} \frac{e^x}{x^2} dx + c\right)$

d. $y = e^{-\int f(x)dx}$

39. Sea la ecuación lineal $xy' - y = x^2 \sec^2 x$, encontrar la opción que contiene un paso intermedio de la solución, usando la fórmula general.

a. $y = x^{-1}\left(\int x^2 \sec^2 x dx + c\right)$

b. $y = x^{-1} \tan x$

c. $y = x\left(\int \sec^2 x dx + c\right)$

d. $y = x\left(\int x^2 \sec^2 x dx + c\right)$

40. Dada la ecuación lineal $xy' + y = \cos x$, ¿qué opción contiene la solución general?

a. $y = x^{-1}(x \operatorname{sen} x + \cos x + c)$

b. $y = \operatorname{sen} x + c$

c. $y = x^{-1} + c$

d. $y = x^{-1}(\operatorname{sen} x + c)$

Respuestas:

31. *c*. La ecuación debe tener la forma $y' + f(x)y = r(x)$ despejando y' se tiene:

$$y' - \frac{x^2}{y} = \frac{xe^x}{y} \Rightarrow$$

a es falsa porque el grado de *y* es -1. *b* es falsa porque $-x^2$ y xe^x coeficientes de y^{-1}, no de *y*. *d* es falsa porque si tomamos el recíproco:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{xe^x + x^2}$$

tampoco cumple la linealidad en *y*.

32. *b*. La forma del factor integrante es (para las lineales en *x*) $F(x) = e^{\int f(x)dx}$. Por eso no pueden ser ni *a*, ni *c*, ni *d*.

33. *b*. La *a* está mal porque la integral es positiva (ver ejercicio anterior). La *c* sugiere que es exacta, lo cual es falso, como puede comprobarse por el teorema de las exactas. La *d* no está del todo bien, puesto que la solución general siempre involucra a dicho factor, aunque obviamente puede resolverse la ecuación sin obtenerlo en primer lugar.

34. *b*. Porque $u = \int \frac{r(x)}{v(x)} dx = \int \frac{x}{\frac{1}{\cos x}} dx$

En *a* no se considera el cociente correcto. En *c* se toma, en realidad, la función *u* con la forma de la función *v*. En *d*, se toma $r(x)$ nada más en lugar de la integral antedicha.

35. *c*. En *a* se tomó mal el signo. En *b* aparece la forma de la función $u(x)$. En *d* todos los conceptos están revueltos.

36. *d*. En *a* se toma $v(x)$ en lugar de $u(x)$. En *b* se toma $f(x)$ en lugar de $u(x)$. La opción *c* tiene la función correcta, pero le falta la constante de integración para que aparezca como solución general al multiplicar por $v(x)$.

37. *b*. *a* y *c* presentan, cada una, una condición correcta. *d* no responde a la definición.

38. *a*. $y = e^{-\int \frac{2}{x}dx}\left[\int e^{\int \frac{2}{x}dx} \frac{e^x}{x^2} dx + c\right]$. Automáticamente no cumplen *b*, *c* y *d*.

39. *c*. $y = e^{-\int \frac{-dx}{x}}\left[\int e^{\int \frac{-dx}{x}} x \sec^2 x dx + c\right]$. Por eso no cumplen *a*, *b* y *d*.

40. *d*. La opción *a* toma como $r(x) = x\cos x$; en vez de $\frac{\cos x}{x}$. La opción *b* contiene a la función $u(x)$ por el método de variación de parámetros, pero no es solución. La opción *c* muestra a la función $r(x)$ del mismo método.

Resumen

Variables separables

$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

Método de solución: integración directa.

Homogéneas

$y' + g(u) = 0$, donde $u = f(x, y)$.

Método de solución: sustitución apropiada.

Muy usual: $y = vx$.

Exactas

$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.

Definición: $\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M$, $\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N$

Teorema: es exacta si $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$

Método de solución:

1. Tomar $f_x = M$ o $f_y = N$
2. Integrar en x o integrar en y.
3. Derivar con respecto a y o con respecto a x.
4. Igualar el resultado a N o igualar a M.
5. Integrar.

Factores integrantes

$F(x, y)$ es factor integrante si $FMdx + FNdy = 0$ es exacta. Si el factor es función de x:

$\rightarrow F(x) = e^{\int p(x)dx}$ donde $p(x) = \dfrac{M_y - N_x}{N}$

Si el factor es función de y:

$\rightarrow F(y) = e^{\int p(y)dy}$ donde $p(y) = \dfrac{N_x - M_y}{M}$

Si el factor es función de x y y, se obtiene por inspección, por tanteo o por métodos que no se van a considerar en este curso.

Método de solución: Multiplicada la ecuación por el factor integrante, se resuelve por exactas o por variables separables según el caso.

Lineales

Condiciones de linealidad:

1. La variable y y todas sus derivadas son de primer grado.
2. Cada coeficiente depende solamente de x (o constante).

Forma general: $y' + f(x)y = r(x)$

Si $r(x) = 0 \rightarrow y = ce^{-\int f(x)dx}$, es solución.

Si $r(x) \neq 0 \rightarrow y = e^{-\int f(x)dx}\left[\int e^{\int f(x)dx} r(x)dx + c\right]$, es solución.

1. Método del factor integrante: si la ecuación es lineal en $x \rightarrow F(x) = e^{\int f(x)dx}$. Si la ecuación es lineal en $y \rightarrow F(y) = e^{\int f(y)dy}$. Al multiplicar la ecuación por este factor se convierte en exacta y se resuelve por exactas.
2. Método de variación de parámetros: $y = uv$ es la solución, donde:

$$v = e^{-\int f(x)dx}$$

$$\rightarrow u = \int \frac{r(x)}{v(x)} dx + c$$

Por lo tanto, una lineal puede resolverse: *a*) Aplicando directamente la fórmula general; *b*) por medio de un factor integrante, y *c*) usando variación de parámetros.

Autoevaluación 2

Elegir la opción u opciones que contienen la forma general de las ecuaciones que se indican:

1. *a*. $4x^2 ydx + xydy = 0$, variables separables.

   b. $4x^2y^2dx + x^3ydy = 0$, homogénea y variable separable.

   c. $x^2y' + xy = y^2$, homogénea y variables separables.

   d. $y' + y = y^2$, homogénea.

2. *a*. $y' + e^x y = 0$, lineal, variables separables.

   b. $e^x\left(ydx + dy\right) = 0$, exacta, lineal.

   c. $e^x\left(ydx + dy\right) = 0$, variables separables.

   d. $2\sqrt{x^2 + y^2}dx + \sqrt{x^2 + y^2}dy = 0$, exacta.

3. Elegir la opción u opciones que presentan un factor de integración apropiado para la ecuación $\left(\cosh xy + \frac{x}{y}\right)dx + \frac{x}{y}\cosh xydy = 0$.

   a. $F(y) = y$

   b. $F(x) = x$

   c. $F(x, y) = \frac{y}{x}$

   d. $F(x, y) = xy$

4. Demostrar el siguiente teorema: Dada la ecuación

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

la condición suficiente y necesaria para que sea exacta es:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

5. Establecer las propiedades de linealidad.

6. Resolver la siguiente ecuación diferencial por el método apropiado:

$$e^{y}y' = \ln x$$

7. Encontrar la opción que contiene la solución general de:

$$(x+y)\,dx-(x+y+3)\,dy=0$$

a. $x = x + y + \frac{3}{4}\ln\left|2(x+y)+3\right| + c$

b. $x = x + y + \frac{3}{2}\ln\left|2(x+y)+3\right| + c$

c. $y = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + xy + 3y + c$

d. $x = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{3}{4}\ln\left|2(x+y)+3\right| + c$

8. Resolver la siguiente ecuación diferencial: $\left(y^4 - x^4\right)dx + xy^3dy = 0$ con la condición inicial: $y(1) = 1$

9. Resolver por el método apropiado: $(x+y)\,dx + (x+y-2)\,dy = 0$

10. Elegir la opción que contiene la solución de la siguiente ecuación diferencial: $\left(e^x - y\right)dx - \left(e^y - x\right)dy = 0$

a. $e^x - xy = c$

b. $e^y - xy = c$

c. $e^x - xy + e^y = c$

d. $e^x - xy + e^y = 0$

11. ¿Cuáles son los posibles factores integrantes de la ecuación?:

$$\left(\frac{y}{1+x^2} + \frac{y}{x}\tan^{-1}x\right)dx + \tan^{-1}x\,dy = 0$$

a. $\tan^{-1}y$

b. $\frac{1}{y}$

c. $\frac{1}{x}$

d. x

12. Hallar la forma que debe tener la función $u(x)$ para que $y = u(x)v(x)$ sea solución de la siguiente ecuación:

$$y' - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,y = xe^{\operatorname{sen}^{-1}x}$$

13. Escoger la opción que contiene un paso intermedio de la solución de la siguiente ecuación diferencial por fórmula general de las lineales:

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}\cos x$$

a. $y = e^{-\int dx/x}\left[\int e^{\int dx/x}\cos x dx + c\right]$

b. $y = e^{\int dx/x}\left[\int e^{-\int dx/x}\cos x dx + c\right]$

c. $y = x\left[\int x^{-2}\cos x dx + c\right]$

d. $y = x^{-1}\left[\int \cos x dx + c\right]$

14. Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$y' + e^{-x}y = e^{e^{-x}} \text{ para } y(0) = e$$

15. Elegir la opción que contiene la solución de la siguiente ecuación:

$$xydx - \left(x^2 - x\right)dy = 0$$

a. $y = (x-1)$

b. $y(x-1) = c$

c. $y = c(x-1)$

d. $cy = x - 1$

Respuestas de la autoevaluación 2

1. Son correctas *a* y *b*. La opción *c* falla al decir que es de variables separables. La opción *d* contiene una ecuación que sí es de variables separables y no es homogénea.

2. Son correctas *a*, *b* y *c*.

3. *a*. Las demás opciones no cumplen el teorema $M_y = N_x$.

4. Ver el texto.

5. Ver el texto.

6. La ecuación es de variables separables:

$$e^y dy = \ln x dx$$
$$e^y = x\ln x - x + c$$
$$y = \ln\left[x\ln x - x + c\right]$$

7. Es homogénea. Tomando $v = x + y$ y $dy = dv - dx$, se obtiene como paso intermedio:

$$dx = \frac{v+3}{2v+3}dv,$$

y como solución, la opción *d*. La opción *c* fue resuelta como exacta y no lo es.

8. Es homogénea. Tomando $y = vx$, se obtiene como paso intermedio:

$$\frac{dx}{x} = -\frac{v^3 dv}{2v^4 - 1}$$

Y como solución general:

$$x^{-8} = c\left(2\frac{y^4}{x^4} - 1\right)$$

Para $y(1) = 1,\ c = 1$

$\therefore$ la solución particular es:

$$x^{-8} = 2\frac{y^4}{x^4} - 1$$

9. Es exacta, ya que $M_y = 1 = N_x$

$$\begin{aligned}
&f_x = x + y\\
&f = \frac{x^2}{2} + xy + f(y)\\
&f_y = x + f'(y) = x + y - 2\\
&f'(y) = y - 2\\
&f(y) = \frac{y^2}{2} - 2y + c
\end{aligned}$$

$\therefore x^2 + y^2 + 2xy - 4y = c$, solución general.

10. Es exacta $M_y = -1 = N_x$. La correcta es c. Las opciones a y b presentan parte de la solución nada más y la opción d supone condiciones iniciales que no nos han dado. La solución debe quedar en su forma general, con la constante de integración.

11. d. Como se comprueba por el teorema de exactas.

12. La solución de la homogénea es:

$y = ce^{sen^{-1}x} \quad v = e^{sen^{-1}x}$

$u = \int \frac{r(x)}{v(x)}dx = \int \frac{xe^{sen^{-1}x}}{e^{sen^{-1}x}}dx$

$\rightarrow u = \frac{x^2}{2} + c$ es la forma que debe tener u para que

$y = uv = e^{sen^{-1}x}\left(\frac{x^2}{2} + c\right)$ sea la solución general.

13. d. En la a falta un factor de la $r(x)$. En la b además del error anterior, tiene cambiados los signos. En la c el error es de signos intercambiados.

14. $y = e^{-\int e^{-x}dx}\left[\int e^{\int e^{-x}dx} e^{e^{-x}}\, dx + c\right]$

$y = e^{e^{-x}}(x + c)$

para $y(0) = e \to c = 1.$

$y = e^{e^{-x}}(x + 1).$

15. *c* y *d*. La opción *a* no tiene la constante de integración y no se dieron condiciones iniciales. La *b* contiene un error en el manejo de funciones logarítmicas.

Agustín Louis, barón de Cauchy

Cauchy nació en París el 21 de agosto de 1789, un mes después de la toma de la Bastilla. A los pocos días, el padre llevó a toda su familia a la provincia para escapar de la Revolución y del régimen de terror. A los 11 años regresó a París para estudiar y Lagrange reconoció en él grandes cualidades matemáticas

En contraste con sus ideas políticas y religiosas —conservadoras hasta la terquedad—, Cauchy fue un gran innovador en matemáticas. El cálculo diferencial tal como lo legaron Newton y Leibniz contenía aún algunos conceptos nebulosos y de poco rigor. Cauchy emprendió la tarea de reestructurarlo sobre bases sólidas y rigurosas, con la doble meta de poder "enseñar el análisis con la claridad de la geometría" y de dejar la materia sentada sobre buenos cimientos. Esta tarea fue llevada a su último término por Weierstrass en Alemania. El trabajo de Cauchy apareció por primera vez en 1821 en el curso de análisis que impartió en la escuela politécnica.

A pesar de su constitución débil, Cauchy fue un trabajador infatigable; de hecho uno de los matemáticos más prolíficos junto con Euler y Cayley. Entre otras muchas cosas, destacó su contribución a la teoría de las permutaciones, al establecimiento de la noción de grupo y al desarrollo de todas las bases de la teoría de la función de variable compleja. Se interesó también en la teoría de las ecuaciones diferenciales y dejó su nombre a la famosa ecuación de Cauchy-Euler, ecuación resuelta por Euler antes que naciera Cauchy, pero investigada por este último en el caso más general de la variable compleja.

Con toda seguridad, el lector conoce también otro de sus legados de importancia: el conjunto de conceptos de límite, continuidad y derivada. El que se enseña en los textos actuales es, esencialmente, el que estableció Cauchy. Cuando murió, el 22 de mayo de 1857, sus capacidades extraordinarias para las matemáticas lo habían hecho miembro de diez de las academias más famosas de Europa.

Agustín Louis, barón de Cauchy (1789-1857)

3 Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden

Daniel Bernoulli
(1700-1782)

Geometría

Ecuación de Bernoulli

Ecuación de Lagrange

Ecuación de Clairaut

Química

Biología

Física

Les gustaba practicar porque era rápido y excitante y les satisfacía esa hambre por aprender que crecía con cada lección. Pero ni uno de ellos, ni siquiera Pedro Pablo Gaviota, había llegado a creer que el vuelo de las ideas podía ser tan real como el vuelo del viento y las plumas.

JUAN SALVADOR GAVIOTA, R. BACH

La matemática es una abstracción de la realidad. Es poner en símbolos lo que nos rodea. Es una herramienta poderosa que nos conduce a través de la aplicación rigurosa de sus leyes y de la lógica a soluciones precisas. Ante una situación real: ajuste de especificaciones en las áreas de ingeniería, sistemas computacionales, economía, etc. El camino a seguir es:

- Establecer la ecuación diferencial que traduce fielmente al lenguaje simbólico el fenómeno a estudiar.
- Catalogar y resolver dicha ecuación.
- Analizar la solución.

Para mayor facilidad se expondrán juntos los problemas concernientes a varias ramas del saber.

Geometría

1. Un problema típico de esta área es obtener la *ecuación de una curva* que pase por un punto prefijado y de la que conocemos su pendiente.

EJEMPLO 1

La pendiente de una curva en cualquier punto (x, y) vale $x + 2y$. Determinar la ecuación de dicha curva si, además sabemos que pasa por el origen de coordenadas.

1. "Traducimos" al lenguaje simbólico la primera parte de la información. La pendiente se representa en geometría analítica por la letra m y en cálculo diferencial por la expresión $\frac{dy}{dx}$,

$\rightarrow \frac{dy}{dx} = x + 2y$ es la traducción literal del enunciado.

La simbología de la segunda parte de la información es $y(0) = 0$, puesto que la curva pasa por el origen.

2. Esta ecuación es lineal, no homogénea y de primer orden

$$\frac{dy}{dx} - 2y = x$$

donde $f(x) = -2$, $r(x) = x$

$$\to y = e^{-\int -2dx}\left[\int e^{\int -2dx} x dx + c\right]$$

$$y = e^{2x}\left[\int e^{-2x} x dx + c\right]$$

$$y = e^{2x}\left(-\frac{x}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + c\right)$$

$$y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{4} + ce^{2x}$$

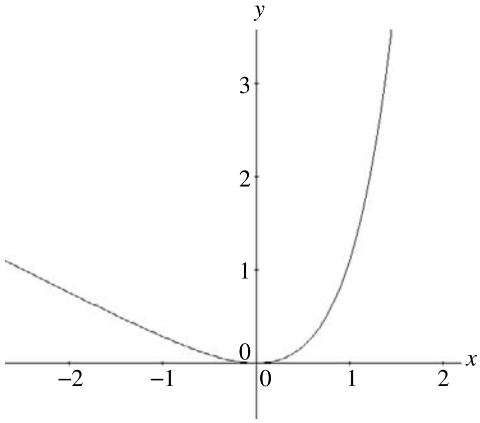
Para $y(0) = 0$:

$$0 = 0 - \frac{1}{4} + c, \quad c = \frac{1}{4}$$

$$y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{2x}$$

$$\text{o} \quad 4y = -2x - 1 + e^{2x}$$

3. La curva pedida tiene esta ecuación y se verifica derivando la solución general y sustituyéndola en la ecuación.



2. Otro problema es el de obtener la ecuación de las *trayectorias ortogonales* de una familia de curvas. Aquí va a ampliarse el concepto usando coordenadas polares.

Sea una curva C y su tangente T, ψ es el ángulo del radio a la tangente:

$$\tan\psi = \frac{rd\theta}{dr}$$

Supongamos que una familia de curvas cuya ecuación diferencial en coordenadas polares es $Hdr + Gd\theta = 0$ puede escribirse:

$$\frac{d\theta}{dr} = -\frac{H}{G} \quad \text{y} \quad r\frac{d\theta}{dr} = -r\frac{H}{G}$$

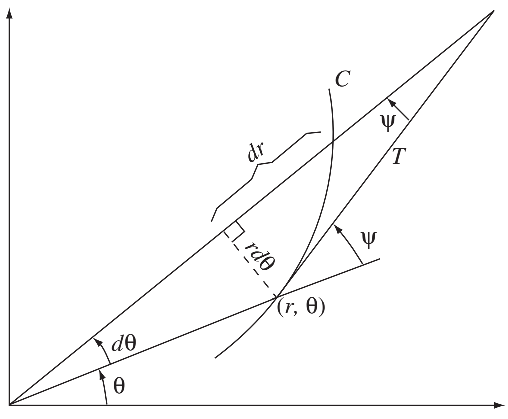


Figura 3-1.

Entonces la familia de trayectorias ortogonales responde a la ecuación:

$$r\frac{d\theta}{dr} = +\frac{G}{Hr}$$

$$r^2\frac{d\theta}{dr} = \frac{G}{H} \quad \text{o} \quad Gdr - r^2 Hd\theta = 0$$

EJEMPLO 2

Encontrar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $r = c\cos 2\theta$.

1. Derivando con respecto a $\theta: \dfrac{dr}{d\theta} = 2c\,\text{sen}\,2\theta$.

2. Sustituyendo la constante c por $c = \dfrac{r}{\cos 2\theta}$:

$$\frac{dr}{d\theta} = -2r\tan 2\theta$$

o bien, $dr + 2r\tan 2\theta d\theta = 0$

Donde $H = 1$ y $G = 2r\tan 2\theta$

3. La familia de trayectorias ortogonales tendrá como ecuación diferencial $2r\tan 2\theta dr - r^2(1)d\theta = 0$:
Separando variables:

$$\frac{dr}{r} = \frac{1}{2}\cot 2\theta d\theta$$

$$\ln r = \frac{1}{4}\ln(\text{sen}2\theta) + \ln c$$

$$r = c(\text{sen}2\theta)^{1/4}$$

$$r^4 = c\,\text{sen}\,2\theta$$

Forma alternativa: acomodada la ecuación como en el paso 2, se cambia $\dfrac{dr}{d\theta}$ por $-r^2 = \dfrac{d\theta}{dr}$. A modo de verificación, se usará este cambio.

De $\dfrac{dr}{d\theta} = -2r\tan 2\theta$, pasamos a: $-r^2\dfrac{d\theta}{dr} = -2r\tan 2\theta$, que representa a la nueva familia de trayectorias ortogonales:

$$\frac{d\theta}{\tan 2\theta} = 2\frac{dr}{r}$$

$$\frac{1}{2}\ln(\text{sen}\,2\theta) = 2\ln r + \ln c$$

$$(\text{sen}\,2\theta)^{1/2} = cr^2$$

o su equivalente $r^4 = c\,\text{sen}\,2\theta$.

3. Esto que se acaba de ver es un caso particular del problema de encontrar la *familia de curvas que forma con otra familia un cierto ángulo* β.

Cuando $\beta = \dfrac{\pi}{2}$ las trayectorias se llaman *ortogonales,* y cuando $\tan\beta = k$, $k = cte$, las trayectorias se llaman *isogonales* y la ecuación original dada como $f(x, y, y') = 0$ tiene por ecuación de trayectorias isogonales:

$$f\left(x, y, \frac{y' - k}{1 + ky'}\right) = 0$$

EJEMPLO 3

Sea la familia de rectas $y = -c_1 x$, encontrar la familia de trayectorias isogonales que forman con dichas rectas un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes.
La ecuación diferencial de la familia de rectas es

$$y' = -c_1 \text{ y como } c_1 = -\frac{y}{x}$$

$$\rightarrow y' = \frac{y}{x} \tag{1}$$

Además $\beta = \frac{\pi}{4} \rightarrow \tan\beta = 1$ y $k = 1$

$$\rightarrow \frac{y' - k}{1 + ky'} = \frac{y' - 1}{1 + y'}$$

Sustituyendo en (1) y' por $\frac{y' - 1}{1 + y'}$ tenemos:

$$\frac{y' - 1}{1 + y'} = \frac{y}{x}$$

$$xy' - x = y + yy'$$

$$y' = \frac{x + y}{x - y}$$

Sea $y = vx \rightarrow dy = vdx + xdv$

$$vdx + xdv = \frac{x + vx}{x - vx} dx$$

$$xdv = \left(\frac{1 + v}{1 - v} - v\right) dx$$

$$xdv = \left(\frac{1 + v - v + v^2}{1 - v}\right) dx$$

$$\frac{(1 - v)dv}{v^2 + 1} = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{v^2 + 1} dv - \frac{vdv}{v^2 + 1} = \frac{dx}{x}$$

$$\tan^{-1} v - \frac{1}{2}\ln(v^2 + 1) = \ln x + \ln c$$

$$\tan^{-1} v = \ln cx\left(v^2 + 1\right)^{1/2}$$

$$v = \tan\left[\ln cx\sqrt{v^2 + 1}\right]$$

$$\frac{y}{x} = \tan\left[\ln cx\sqrt{\frac{y^2 + x^2}{x^2}}\right]$$

$$y = x\tan\left(\ln c\sqrt{y^2 + x^2}\right)$$

4. Muchas veces nos interesa conocer la *longitud* de la tangente desde un punto P hasta que corta al eje x o al eje y. Supongamos una curva C y su tangente T en un punto P de la curva, como se muestra en la figura 3.2.

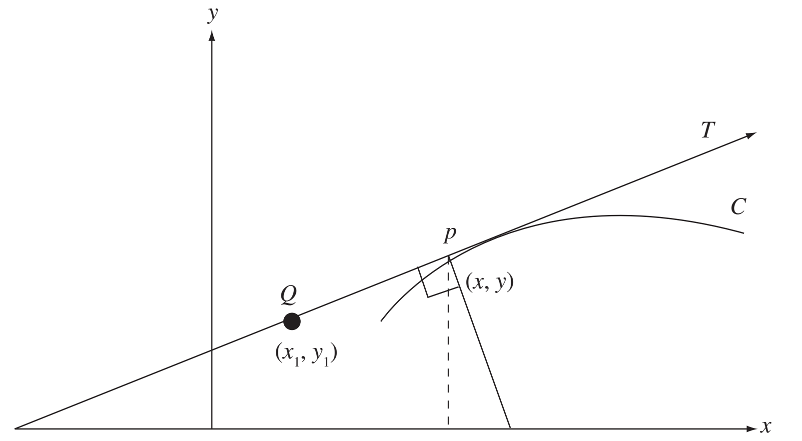


Figura 3-2.

Al segmento comprendido entre P y A lo llamaremos *tangente;* al segmento PB: "*normal*"; la proyección AD se denominará "*subtangente*" y la proyección DB: "*subnormal*".

Para encontrar la ecuación de la tangente, tomamos otro punto Q sobre la tangente. Como la pendiente de la recta es y', su ecuación será:

$$y_1 - y = y'(x_1 - x)$$

de donde: $y' = \dfrac{y_1 - y}{x_1 - x}$ en general.

si queremos para $y_1 = 0 \rightarrow y' = \dfrac{-y}{x_1 - x}$

Es decir, que en A, $x_1 = x - \dfrac{y}{y'}$

Esto indica que la recta tangente corta al eje x en:

$$x - \frac{y}{y'}$$

De la misma forma, si queremos que $x_1 = 0$:

$$\rightarrow y' = \frac{y_1 - y}{-x}$$

$$\text{y } y_1 = y - xy'$$

es donde corta la tangente al eje y; siguiendo este procedimiento obtenemos la siguiente tabla:

Intersección de la tangente con el eje $x: x - \frac{y}{y'}$

Intersección de la tangente con el eje $y: y - xy'$

Intersección de la tangente con el eje $x: x + yy'$

Intersección de la tangente con el eje $y: y + \frac{x}{y'}$

Además podemos establecer las longitudes siguientes:

Longitud de la tangente desde *P* hasta el eje *x*:

$$\left|\frac{y\sqrt{1+(y')^2}}{y'}\right|$$

Longitud de la tangente desde *P* hasta el eje *y*:

$$\left|x\sqrt{1+(y')^2}\right|$$

Longitud de la normal desde *P* al eje *x*:

$$\left|y\sqrt{1+(y')^2}\right|$$

Longitud de la normal desde *P* al eje *y*:

$$\left|\frac{x\sqrt{1+(y')^2}}{y'}\right|$$

Longitud de la subtangente: $\left|\frac{y}{y'}\right|$

Longitud de la subnormal: $|yy'|$

EJEMPLO 4

Demostrar que la longitud de la tangente *P* hasta el eje *x* es:

$$\left|\frac{y\sqrt{1+(y')^2}}{y'}\right|$$

La ecuación de la tangente es: $y' = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$

En $y_1 = 0$ es $y' = \frac{-y}{x_1 - x}$

La longitud de una curva viene dada por la expresión

$$L=\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dt$$

$$\to \int_{x_1}^{x} \sqrt{1+\left(\frac{-y}{x_1-x}\right)^2}\,dt$$

$$= t\sqrt{1+\frac{y^2}{(x_1-x)^2}}\Bigg|_{x_1}^{x}$$

$$=(x-x_1)\sqrt{1+\frac{y^2}{(x_1-x)^2}}=\sqrt{(x_1-x)^2+y^2}$$

pero $x_1-x=\dfrac{-y}{y'}$; sustituyendo:

$$\sqrt{\left(\frac{-y}{y'}\right)^2+y^2}=\sqrt{\frac{y^2+y^2(y')^2}{(y')^2}}$$

$$=\frac{y\sqrt{1+(y')^2}}{(y')^2} \quad \text{o sea:} \quad \left|\frac{y\sqrt{1+(y')^2}}{y'}\right|$$

EJEMPLO 5

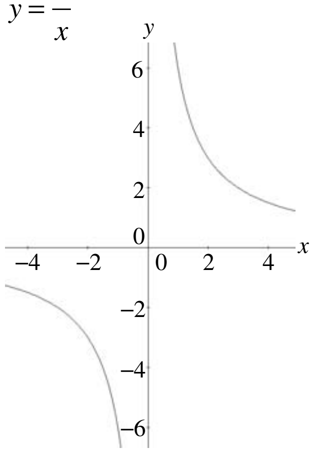
La intersección con el eje x de la tangente a una curva en cualquier punto es $2x$. Si la curva pasa por el punto (2, 3) encontrar su ecuación.

$$x-\frac{y}{y'}=2x \qquad -\frac{y}{y'}=x$$

$$y'=\frac{-y}{x} \qquad \frac{dy}{y}=\frac{-dx}{x}$$

$$\ln y=-\ln x+\ln c \qquad \ln xy=\ln c \qquad xy=c$$

Para $y(3)=2,\ c=6$ y $y=\dfrac{6}{x}$



5. También usamos la *geometría* para resolver problemas físicos:

EJEMPLO 6

Supongamos que una gota esférica se evapora a una velocidad proporcional a su superficie; si al principio el radio de la gota es 2 mm, y al cabo de 10 minutos es de 1 mm, hallar una función que relacione el radio r con el tiempo t.

Volumen de la esfera: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Superficie de la esfera: $S = 4\pi r^2$

La variación del volumen con respecto al tiempo es:

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

La gota se evapora proporcionalmente a su superficie:

$$\frac{dV}{dt} = kS$$

Sustituyendo:

$$4\pi r^2 \frac{dr}{dt} = k4\pi r^2 \rightarrow \frac{dr}{dt} = k$$

$$dr = kdt \qquad r = kt + c$$

Tomando las condiciones iniciales: $\begin{cases} t = 0 \rightarrow r = 2 \\ t = 10 \rightarrow r = 1 \end{cases}$

Se obtienen k y c:

$$2 = 0 + c \qquad c = 2$$

$$\rightarrow r = kt + 2$$

$$1 = 10k + 2 \rightarrow -1 = 10k \qquad k = -\frac{1}{10}$$

$$\therefore r(t) = -\frac{1}{10}t + 2$$

EJEMPLO 7

Un recipiente en forma de cilindro circular recto tiene una sección transversal de 2 m^2. Se llena de agua hasta una altura de 6 m. En la base posee un orificio de sección de 4 cm^2. Se desea calcular la altura del agua en cualquier instante y también el tiempo necesario para vaciar completamente el recipiente.

Llamando:

A = área (sección transversal) del recipiente.
B = área (orificio).
h = altura del agua en el instante t.
Δh = variación de la altura.
t = tiempo.
Δt = variación del tiempo.

$$g = 9.8\frac{m}{\text{seg}^2}$$

Consideraremos:

1. Cantidad de agua que sale por el orificio = cantidad de agua que desciende en el cilindro.
2. El volumen que bajó en el cilindro es $V = A\Delta h$ (con signo negativo por ser decrecimiento).
3. El volumen que sale por el orificio es $V = B\Delta m$, donde Δm es la distancia que recorre el agua durante Δt segundos si el chorro saliera horizontalmente.
4. $v = \frac{dm}{dt}$ es la velocidad instantánea de la caída del líquido.
5. Tomaremos $v = \sqrt{2gh}$ en condiciones ideales (masa del agua = su energía cinética), suponiendo que no hay pérdidas.

Entonces la primera ecuación es: $-A\Delta h = B\Delta m$.

Como la variación de la altura es con respecto al tiempo, dividimos entre Δt:

$$-A\frac{\Delta h}{\Delta t} = B\frac{\Delta m}{\Delta t}$$

Cuando $\Delta t \to 0$

tenemos: $-A\frac{dh}{dt} = B\frac{dm}{dt}$

por lo tanto: $-A\frac{dh}{dt} = Bv$ (consideración 4)

y $-A\frac{dh}{dt} = B\sqrt{2gh}$ (consideración 5), que ya es la ecuación diferencial del proceso, con la condición inicial de que $h = h_0$ cuando $t = 0$.

Resolviendo por variables separables:

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{B}{A}\sqrt{2g}dt$$

obtenemos $2\sqrt{h} = -\frac{B}{A}\sqrt{2g}\ t + c$, que es la solución general del problema.

Aplicamos las condiciones iniciales para saber el valor de c.

$$2\sqrt{h_0} = c$$

$$\therefore 2\sqrt{h} = -\frac{B}{A}\sqrt{2g}\ t + 2\sqrt{h_0}$$

Entonces: $2\sqrt{h} = \frac{-0.0004}{2}\sqrt{2g}t + 2\sqrt{6}$

$$2\sqrt{h} = -0.0008854t + 4.8989795$$

$$h = \left(-0.0004427t + 2.4494898\right)^2,$$

es la altura del agua h en cualquier instante t.

Para calcular el tiempo necesario que se necesita para vaciar el recipiente, tomamos $h = 0$.

Entonces: $t = \frac{4.8989795}{0.0008854} = 5533.07$ seg.

$$t = 92.22 \text{ min} = 1.53 \text{ horas.}$$

EJEMPLO 8

Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto (0, 1) con las siguientes propiedades:

1. El área bajo la curva limitada por los ejes coordenados y la ordenada de cualquier punto es igual a:
2. La longitud de la curva correspondiente a dicha región.

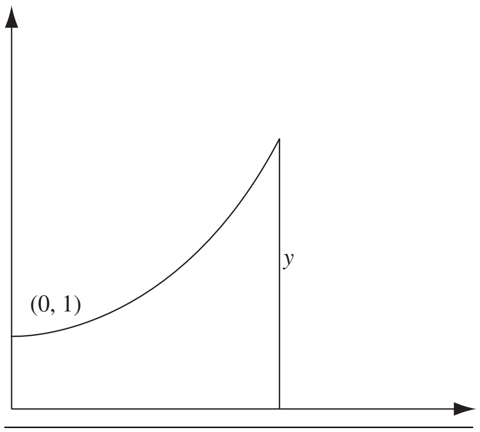


Figura 3-3.

Por la condición 1 tenemos:

$$S = \int_0^x y dx$$

que representa el área.

Por la condición 2:

$$L = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

que representa la longitud de la curva en el tramo correspondiente.

Entonces, como $S = L$, tenemos:

$$\int_0^x y\,dx = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

Derivando con respecto a x:

$$y = \sqrt{1 + y'^2}$$

de donde:

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} = dx$$

Con solución general:

$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right) + c$$

para el punto $(0,1), c = 0$ y la solución es:

$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$$

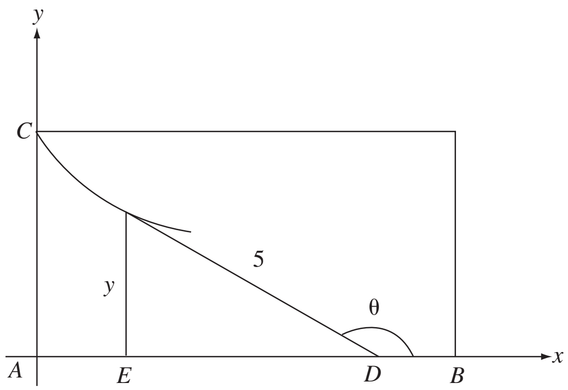
Reconociendo la identidad de este logaritmo con las funciones hiperbólicas inversas, tenemos:

$$x = \cosh^{-1} y$$

es decir: $y = \cosh x$ es la ecuación de la curva pedida.

EJEMPLO 9

Un joven está situado en la esquina A de un estanque rectangular y sostiene una cuerda de 5 m de longitud, en cuyo extremo opuesto está atada una boya en C. El joven camina hacia B manteniendo tensa la cuerda. Encontrar la posición del joven y de la boya cuando la boya está a 3 m de AB.



$$\tan\theta = \frac{dy}{dx}$$

$$ED = \sqrt{25 - y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{\sqrt{25 - y^2}}$$

$$\frac{\sqrt{25 - y^2}}{y}\,dy = -dx$$

Figura 3-4.

Integrando:

$$\sqrt{25-y^2}-5\ln\left(\frac{5+\sqrt{25-y^2}}{y}\right)=-x+c$$

Cuando la boya está en $C: x=0, y=5$

$$0-5\ln 1=c, \qquad c=0$$

Entonces: $x=5\ln\left(\frac{5+\sqrt{25-y^2}}{y}\right)-\sqrt{25-y^2}$, es la ecuación que da la trayectoria de la boya. La distancia AD, a la que está el joven, puede expresarse como:

$$AD=AE+ED$$

Sea $AE=x$; entonces: $AD=x+\sqrt{25-y^2}$

Sustituyendo la ecuación de la trayectoria:

$$AD=5\ln\frac{5+\sqrt{25-y^2}}{y}$$

Cuando la boya está a 3 m de AB, es decir, cuando $y=3$, entonces:

$$\begin{aligned}
ED &= \sqrt{25-9}=4\\
AE &= AD-ED\\
x &= 5\ln\frac{5+4}{3}-4\\
&= 5\ln 3-4\\
&= 1.5 \text{ m}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para $y=3$ tenemos: Posición del joven: $AD=5\ln 3=5.5$ m
Posición de la boya: $AE=1.5$ m

EJERCICIOS 3.1

APLICACIONES A LA GEOMETRÍA

1. Hallar una curva que pase por el punto (0, –3), de manera que la pendiente de la tangente en cualquiera de sus puntos sea el doble de la ordenada en el mismo punto.
   Respuesta: $y=-3e^{2x}$
2. Encontrar la ecuación de una curva que pasa por el punto (0, 2) y en cada punto (x, y) tiene pendiente $-xy$.
   Respuesta: $y=2e^{-x^2/2}$

3. Encontrar la ecuación de la curva que pasa por el punto (1, e) y en cada punto (x, y) la pendiente de su normal es $\dfrac{x^2}{y}$
Respuesta: $y = e^{1/x}$

4. Encontrar la ecuación de una familia de curvas tal que todas sus tangentes pasen por el origen.
Respuesta: $y = kx$

5. Demostrar que la curva que posee la propiedad de que todas sus normales pasan por un punto fijo es una circunferencia.

6. Hallar la curva que tiene la propiedad de que el segmento de cada tangente a la curva, comprendido entre los ejes de coordenadas, se divide por la mitad en el punto de tangencia.
Respuesta: $xy = c$

7. Encontrar la familia de curvas con la propiedad de que en cualquier punto, la recta tangente es perpendicular a la que une el punto con el origen de coordenadas.
Respuesta: $x^2 + y^2 = c, c > 0$

8. En cierto punto de una curva, la pendiente es igual al recíproco de la abscisa. Hallar la familia de curvas que tienen esta propiedad.
Respuesta: $y = \ln x + c$

9. Hallar las curvas para las cuales cada normal en un punto dado y su intersección con el eje x tienen la misma longitud.
Respuesta: $x^2 + y^2 + 2cx = k$

10. Hallar la familia de curvas con la propiedad de que en cualquier punto la pendiente de la normal se obtiene del recíproco de la abscisa restándole la unidad.
Respuesta: $y = x + \ln(x-1) + c$

11. Encontrar la curva que pasa por el punto (0, 3) y tal que la proyección de su tangente en dicho punto sobre el eje x siempre tenga una longitud igual a 2.
Respuesta: $y^2 = 9e^x$

12. La proyección de la recta normal desde un punto P de la curva sobre el eje x tiene una longitud igual a la abscisa en P. Encontrar la ecuación de dicha curva que pasa por el punto (2, 3).
Respuesta: $y^2 + x^2 = 13$

13. La pendiente de una curva, en cualquier punto (x, y) es $2x - y$. Determinar la ecuación de dicha curva, sabiendo que pasa por el punto (0, D).
Respuesta: $y = 2x - 2 + 3e^{-x}$

14. La pendiente de una curva en cualquier punto es $3x^2$. Determinar la ecuación de dicha curva, sabiendo que pasa por el punto (1, 1).
Respuesta: $y = x^3$

15. Hallar una curva que pase por el punto (0, −1), de modo que la pendiente de la tangente en cualquiera de sus puntos sea igual a la abscisa del punto, aumentada en 5 unidades.
Respuesta: $y = \dfrac{x^2}{2} + 5x - 1$

16. Demostrar que la curva cuya pendiente de la tangente en cualquier punto (x, y) es proporcional a la abscisa del punto $\left(x_0,\ y_0\right)$, en una parábola.

17. Hallar la curva para la que se cumple que la pendiente de la tangente en cualquier punto es k veces mayor que la pendiente de la recta que une este punto con el origen de coordenadas.
Respuesta: $y = cx^k$

18. Hallar la familia de curvas que tiene la propiedad de que la pendiente de la recta tangente en cualquier punto es la suma del doble de la ordenada y la mitad de la abscisa del punto.

Respuesta: $y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{8} + ce^{2x}$

19. Hallar la ecuación de la familia de curvas con la propiedad de que la distancia del origen a la recta tangente en un punto P de una curva es igual a la abscisa en P.
Respuesta: $x^2 + y^2 = cx$

20. Encontrar la familia de curvas con la propiedad de que la recta normal en cualquiera de sus puntos P coincida con la recta que une al punto P con el origen.
Respuesta: $x^2 + y^2 = c$

21. Encontrar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas:

$$r = c\left(\operatorname{sen}\theta - \cos\theta\right)$$

Respuesta: $r = c\left(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\right)$

22. Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas:

$$r = c\cos^2\theta$$

Respuesta: $r^2 = c\operatorname{sen}\theta$

23. Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas:

$$r = \frac{c}{(1 - \cos\theta)}$$

Respuesta: $r = \dfrac{c}{1 + \cos\theta}$

24. Sea la familia de rectas $y = c_1 x$; encontrar la familia de trayectorias isogonales que forman con dichas rectas un ángulo de $\pi/3$ radianes.

Respuesta: $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\dfrac{y}{x} = \ln c\left(x^2 + y^2\right)$

25. Demostrar que la recta normal corta al eje x en $x_1 = x + yy'$

26. Demostrar que la longitud de la normal desde un punto P hasta el eje y es:

$$\left|\frac{x\sqrt{1 + y'^2}}{y'}\right|$$

27. Demostrar que la longitud de la subtangente es $\left|\frac{y}{y'}\right|$.

28. Hallar la longitud de la recta tangente a una curva desde el punto (1, 1) al eje x, sabiendo que su pendiente es $2x$.
Respuesta: $\sqrt{5}/2 = 1.118$

29. La intersección con el eje y de la normal a una curva en cualquier punto es $y/2$. Si la curva pasa por el punto (1, 1), encontrar su ecuación.
Respuesta: $y^2 + 2x^2 = 3$

30. La tangente a una familia de curvas en el punto P corta a los ejes coordenados formando con ellos un triángulo; ya que las coordenadas del punto P forman con los ejes un rectángulo, hallar la familia de curvas con la propiedad de que el área del triángulo es siempre el doble que la del rectángulo.
Respuesta: $xy = c$

31. Encontrar la curva que cumple la condición de que el área acotada por dicha curva desde (0, 1) a (x, y), el eje x y la ordenada, es igual a la ordenada.
Respuesta: $y = e^x$

32. Hallar la curva en el plano xy, con la propiedad de que el área acotada por esta curva, el eje x y la ordenada, es igual a la longitud de la curva desde el punto (0, 1) al punto (x, y).
Respuesta: $y = \cosh x$

33. Hallar las coordenadas del punto o puntos de la curva $y = 2x^2$ que están más próximos al punto (9, 0).
Respuesta: (1, 2)

34. Hallar las coordenadas del punto o de los puntos de la curva $x^2 - y^2 = 9$ que están más cercanos al punto (0, 7).
Respuesta: $\left(-4, \sqrt{7}\right), \left(4, \sqrt{7}\right)$

En los siguientes ejercicios, elegir la opción que contiene la solución correcta.

35. La derivada $\frac{dx}{dt}$ es proporcional a x. Sea $x(0) = 10$ y $x(5) = 15$. Hallar el valor de x cuando $t = 20$.
a. 4.05
b. 50.6
c. 0.81
d. 16.21

36. Dada la ecuación $y'^2 = 36xy$, elegir la opción que contiene dos soluciones que pasan por el punto $(4,1)$.

a. $y = \left(2x^{3/2} - 17\right)^2, y = \left(-2x^{3/2} - 17\right)^2$
b. No tiene solución porque no es lineal

c. $y=\left(2x^{3/2}-15\right)^2, y=\left(-2x^{3/2}+17\right)^2$

d. No puede tener dos soluciones porque contradice el teorema de existencia y unicidad.

37. Seleccionar la opción que contiene las trayectorias ortogonales de la familia de circunferencias cuyos centros están en el eje x y pasan por el origen.

a. $x^2+y^2=kx$

b. $y'=\dfrac{y^2-x^2}{2xy}$

c. $y'=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$

d. $x^2+y^2=cy$

38. Elegir la opción que contiene la ecuación de la curva C que se muestra en la figura, sabiendo que el área del triángulo APB es constante.

a. $y^3=6kx+c$

b. $A=k$

c. $\tan\theta=\dfrac{AB}{y}$

d. $y^2dy=2kdx$

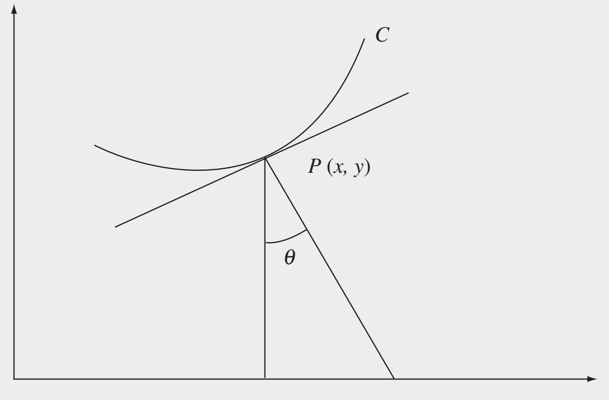


Figura 3-5.

39. Hallar la curva que pasa por el punto (1, 1), cuya normal en cualquier punto (excepto en $x=0$) queda dividida en dos partes iguales por el eje y.

a. $y^2+2x^2=3$

b. $yy'=-2x$

c. $\dfrac{y^2}{2}=-x^2+c$

d. $c=\dfrac{3}{2}$

40. ¿Qué opción contiene la familia de trayectorias ortogonales de la función $\cos y = ae^{-x}$?

a. $\cos y = ae^{x}$

b. $\sec y = ae^{x}$

c. $\operatorname{sen} y = ce^{x}$

d. $\operatorname{sen} y = ce^{-x}$

Respuestas:

35. *b*. Los demás valores son resultados intermedios.

36. *c*. Es no lineal y admite dos soluciones por ser cuadrática, como puede verificarse.

37. *d*. La opción *a* contiene precisamente la familia de circunferencias cuyos centros están en el eje *x* y pasan por el origen (que es dato del ejercicio). La opción *b* representa la ecuación diferencial de la familia de la opción *a*. La opción *c* es la ecuación que da la solución correcta en la opción *d*.

38. *a*. Las demás opciones representan los pasos intermedios en la solución del problema.

39. *a*. Las demás opciones son pasos intermedios.

40. *d*.

Ecuación de Bernoulli[1]

Es una ecuación de la forma:

$$y' + f(x)y = r(x)y^n, \quad n \neq 0,1$$

Para $n = 0,1$ la ecuación es lineal.

MÉTODOS DE SOLUCIÓN:

1. Convertirla en lineal mediante la sustitución: $u = y^{1-n}$
2. Sin convertirla en lineal, mediante la sustitución: $y = u(x)v(x)$

EJEMPLO 1

Resolver la ecuación:

$$y' + \frac{2}{x}y = -2xy^2$$

1. Aquí: $n = 2$

   Entonces, $u = y^{-1} \rightarrow y = u^{-1}$ y $y' = -u^{-2}u'$

   Sustituyendo, $-u^{-2}u' + \dfrac{2}{x}u^{-1} = -2xu^{-2}$

[1] James Bernoulli la estudió en 1695.

Dividiendo entre $-u^{-2}$:

$$u' - \frac{2}{x}u = 2x,$$

que ya es una ecuación lineal en la variable u, con solución:

$$u = 2x^2 \ln x + cx^2$$

Como $u = y^{-1}$, entonces:

$$y = \frac{1}{2x^2 \ln x + cx^2}$$

2. Sea $y = uv$

Sea $v(x)$ la solución de $y' + \frac{2}{x}y = 0$, es decir, $v(x) = \frac{1}{x^2}$ la ecuación dada se transforma en:

$$vu' + u\left(v' + \frac{2}{x}v\right) = -2xu^2v^2$$

sustituyendo $v(x)$, después de haber dividido la ecuación:

$$u' + u\left(\frac{\frac{-2}{x^3}}{\frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x}\right) = -2xu^2\frac{1}{x^2}$$

$$u' = -\frac{2}{x}u^2$$

$$\frac{du}{u^2} = -\frac{2dx}{x} \qquad u^{-1} = 2\ln x + c$$

$$u = \frac{1}{2\ln x + c}$$

Como $y = uv$

$$y = \frac{1}{x^2(2\ln x + c)}$$

EJEMPLO 2

Resolver $y' + xy = xy^{-1/2}$

Sea $u = y^{1-(-1/2)} = y^{3/2}$

Entonces, $y = u^{2/3}$, $y' = \frac{2}{3}u^{-1/3}u'$

Sustituyendo:

$$\frac{2}{3}u^{-1/3}u' + xu^{2/3} = xu^{-1/3}$$

$$u' + \frac{3}{2}xu = \frac{3}{2}x \quad \text{lineal en } u$$

$$u = e^{-3x/4}\left[\int e^{3/2\int xdx}\left(\frac{3}{2}x\right)dx\right]$$

$$u = e^{-3/2xdx}\left[\int e^{3x^2/4}\left(\frac{3}{2}x\right)dx\right]$$

$$u = e^{-3x^2/4}\left(e^{3x^2/4} + c\right)$$

$$u = 1 + ce^{-3x^2/4}$$

$$\therefore y^{3/2} = 1 + ce^{-3x^2/4}$$

Utilizando `Mathematica`, las ecuaciones diferenciales de Bernoulli

a) $y' - 2y = \dfrac{2x\,\text{sen}\,3x}{y}$

b) $y' + \dfrac{1}{2}y = -\dfrac{x}{2}\text{sen}(3x)y^3$

se resuelven con

```
stepone=Integrate[xExp[-x]Sin[3x],x]
```

$$\frac{1}{50}e^{-x}(-3(1+5x)\text{Cos}[3x]+(4-5x)\text{Sin}[3x])$$

```
solutionone=steptwo^(1/2)//PowerExpand
```

$$\sqrt{ce^{-x}+\frac{1}{50}e^{-x}(-3(1+5x)\text{Cos}[3x]+(4-5x)\text{Sin}[3x])}$$

```
solutiontwo=steptwo^(1/2)//PowerExpand;
cs=Range[-5,7]
{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7}
tographone=Table[solutionone/.c®cs[[i]],{i,1,13}];
```

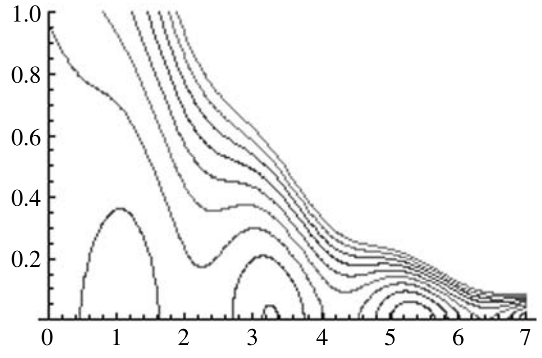


Figura 3-6.

```
tographtwo=Table[solutiontwo/.c®cs[[i]],{i,1,13}];
Plot[Evaluate[tographtwo],{x,0,5}PlotRange®{0,15}]
```

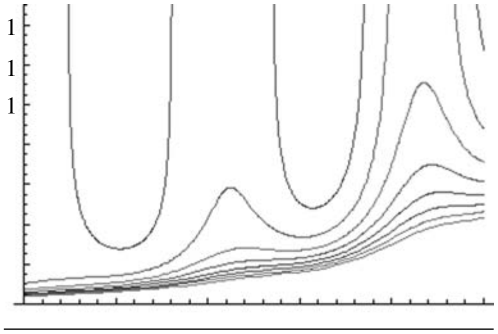


Figura 3-7.

Ecuación de Lagrange

Es una ecuación de la forma:

$$y = x\phi(y') + \psi(y')$$

MÉTODO DE SOLUCIÓN

Sea $y' = p$

Se diferencia y se sustituye dy por pdx quedando una ecuación lineal con respecto a x. La solución queda en forma paramétrica. Pueden existir soluciones singulares de la forma $y = \phi(c)x + \psi(c)$, donde c es una raíz de la ecuación $c = \phi(c)$.

EJEMPLO 1

Resolver la ecuación:

$$y = \left(1 + y'\right)x + y'^2$$

Sea $y' = p$, entonces $y = \left(1 + p\right)x + p^2$

Diferenciando y sustituyendo dy por pdx:

$$pdx = (1 + p)dx + xdp + 2pdp$$
$$-dx = (x + 2p)dp$$
$$\frac{dx}{dp} = -x - 2p$$

de donde $\dfrac{dx}{dp} + x = -2p$ ya es lineal en x, cuya solución es:

$$x = 2 - 2p + ce^{-p}$$

Sustituyendo este valor de x en la ecuación de y, tenemos:

$$y=(1+p)\left(2-2p+ce^{-p}\right)+p^2$$
$$y=2-p^2+c(1+p)e^{-p}$$

Por lo tanto, la solución es:

$$x=2-2p+ce^{-p}$$
$$y=2-p^2+c(1+p)e^{-p}$$

Para hallar una solución singular, se deriva la ecuación dada con respecto a y':

$$0=x+2y',\ \text{como}\ \ y'=p$$

entonces:

$$x+2p=0$$

Esta ecuación, junto con $y=(1+p)x+p^2$, forman un sistema del cual se elimina p.

$$p=-\frac{x}{2}$$
$$y=\left[1+\left(-\frac{x}{2}\right)\right]x+\frac{x^2}{4}$$
$$y=x-\frac{x^2}{4}$$

Comprobando:

$$y'=1-\frac{1}{2}x$$

sustituyendo:

$$x-\frac{x^2}{4}=\left(1+1-\frac{x}{2}\right)x+\left(1-\frac{x}{2}\right)^2$$
$$=2x-\frac{x^2}{2}+1-x+\frac{x^2}{4}$$
$$=x-\frac{x^2}{4}+1$$

Como $x-\frac{x^2}{4}\neq x-\frac{x^2}{4}+1$, la función $y=x-\frac{x^2}{4}$ *no* es solución singular.

EJEMPLO 2

Resolver la ecuación: $y = xy' + \sqrt{1 + y'^2}$

Sea $y' = p$, entonces $y = xp + \sqrt{1 + p^2}$ diferenciando:

$$pdx = xdp + pdx + \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}$$

$$0 = \left(x + \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \right) dp$$

Si $dp = 0$, entonces $p = c$

Y la solución general de la ecuación es:

$$y = cx + \sqrt{1 + c^2}$$

Si $x + \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} = 0$; entonces $x = \frac{-p}{\sqrt{1 + p^2}}$

Tomando esta ecuación y $y = xp + \sqrt{1 + p^2}$ para eliminar el parámetro p, tenemos:

$$p^2 = \frac{x^2}{1 - x^2}$$

además:

$$y = \frac{-p}{\sqrt{1 + p^2}} p + \sqrt{1 + p^2}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} \rightarrow p^2 = \frac{1 - y^2}{y^2}$$

Igualando:

$$\frac{x^2}{1 - x^2} = \frac{1 - y^2}{y^2}$$

$\therefore$ $x^2 + y^2 = 1$ es una solución singular.

Ecuación de Clairaut

Tiene la forma:

$$y = xy' + \psi(y')$$

MÉTODO DE SOLUCIÓN

El mismo que el de la ecuación de Lagrange. La solución general tiene la forma:

$$y = cx + \psi(c)$$

También puede tener solución singular, la que se obtiene eliminando p de las ecuaciones:

$$y = xp + \psi(p),\ \ x + \psi'(p) = 0$$

EJEMPLO 1

Resolver la ecuación:

$$y = xy' - \frac{1}{y'}$$

Sea $y' = p$, entonces $y = xp - \frac{1}{p}$

Diferenciando y tomando $dy = pdx$

$$pdx = xdp + pdx + \frac{1}{p^2}dp$$

$$0 = \left(x + \frac{1}{p^2}\right)dp$$

Si $dp = 0, p = c$

$$\therefore\ y = cx - \frac{1}{c} \text{ es la solución general.}$$

Si $x + \frac{1}{p^2} = 0,\ x = -\frac{1}{p^2}$

Sustituyendo en $y = xp - \frac{1}{p}$ tenemos:

$$y = \left(-\frac{1}{p^2}\right)p - \frac{1}{p^2}$$

$$y = -\frac{2}{p}$$

Tomando las ecuaciones: $x = -\frac{1}{p^2}$ y $y = -\frac{2}{x}$

eliminando p:

$$y^2 = \frac{4}{p^2},\ \ p^2 = -\frac{1}{x}$$

$$\frac{4}{y^2} = -\frac{1}{x}$$

$$y^2 = -4x$$

Para saber si es o no solución singular, la comprobamos:

Derivando: $2yy' = -4$

$$yy' = -2,\ \ y' = -\frac{2}{y}$$

Sustituyendo:

$$y = x\left(-\frac{2}{y}\right) - \frac{1}{y'}$$

$$y = \frac{y^2}{-4}\left(-\frac{2}{y}\right) + \frac{y}{2}$$

$$y = \frac{y}{2} + \frac{y}{2} \quad \therefore \text{ Sí es solución.}$$

Un ejemplo de lo que puede hacer `Mathematica` con la ecuación de Clairaut se ve en la ecuación $y = xy' + y'^2 + e^{y'}$

```
sol = DSolve[y[x]== x*y'[x]+y'[x]^2+Exp[y'[x]],y[x],x]
{{y[x]®e^c[1] + xC[1]+C[1]^2}}
Plot[Evaluate[Table[y[x]/.sol/.{C[1]1/k},{k,-5,5,2}]],{x,1,5}]
```

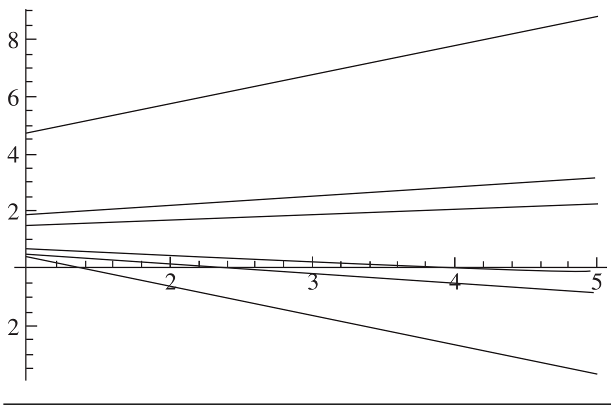


Figura 3-8.

EJERCICIOS 3.2

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de Bernoulli.

1. $y' + \frac{1}{x}y = \frac{2}{3}x^4y^4$ **Respuesta:** $\frac{1}{x^3y^3} + x^2 = c$
2. $y' + xy = xy^{-2}$ **Respuesta:** $y^3 = 1 + ce^{-3x^2/2}$
3. $y' + \frac{1}{x}y = 4x^3y^{-1}$ **Respuesta:** $y^2 = \frac{4}{3}x^4 + cx^{-2}$
4. $y' - xy = 2xy^{1/2}$ **Respuesta:** $y = ce^{x^2/4} + 2$
5. $3xy' - 2y = x^3y^{-2}$ **Respuesta:** $y^3 - x^3 = cx^2$

Resolver las siguientes ecuaciones de Lagrange y Clairaut.

6. $2y = xy' + y'\ln y'$ ***Respuesta:*** $\begin{cases} x = cp - \ln p - 2 \\ y = \dfrac{c}{2}p^2 - p \end{cases}$

7. $y = y' + \sqrt{1 - y'^2}$ ***Respuesta:*** $\begin{cases} x = \ln p - \operatorname{sen}^{-1} p + c \\ y = p + \sqrt{1 - p^2} \end{cases}$

8. $y = 2xy' + \operatorname{sen} y'$ ***Respuesta:*** $\begin{cases} x = \dfrac{c}{p^2} - \dfrac{\cos p}{p^2} - \dfrac{\operatorname{sen} p}{p} \\ y = \dfrac{2c}{p} - \dfrac{\cos p}{p} - \operatorname{sen} p \end{cases}$

9. $y = \dfrac{3}{2}xy' + e^{y'}$ ***Respuesta:*** $\begin{cases} x = -\dfrac{2e^p}{p} + \dfrac{4e^p}{p^2} - \dfrac{4e^p}{p^3} + \dfrac{c}{p^3} \\ y = \dfrac{6e^p}{p} - \dfrac{6e^p}{p^2} + \dfrac{3c}{2p^2} - 2e^p \end{cases}$

10. $y = xy' - \dfrac{1}{y'}$ ***Respuesta:*** $\begin{cases} y = cx - \dfrac{1}{c}, & \text{solución general.} \\ y^2 = -4x, & \text{solución singular.} \end{cases}$

11. $y = xy' + y'$ ***Respuesta:*** $\{ y = cx + c$, solución general.

12. $y = xy' + 3y'^2$ ***Respuesta:*** $\begin{cases} y = cx + 3c^2, & \text{solución general.} \\ y = -\dfrac{x^2}{12}, & \text{solución general.} \end{cases}$

13. $y = xy' + \dfrac{y'}{2}$ ***Respuesta:*** $\left\{ y = cx + \dfrac{c}{2} \right.$, solución general.

14. $x = xy' + \dfrac{1}{y'^2}$ ***Respuesta:*** $\begin{cases} y = cx + \dfrac{1}{c^2}, & \text{solución singular.} \\ y = 3\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{4}}, & \text{solución general.} \end{cases}$

15. $y = xy' + \dfrac{5}{y'}$ ***Respuesta:*** $\begin{cases} y = cx + \dfrac{5}{c}, & \text{solución general.} \\ y^2 = 20x, & \text{solución singular.} \end{cases}$

Química

Proceso primario: Ley de crecimiento o decaimiento

EJEMPLO 1

Un material radiactivo se desintegra a una razón proporcional a la cantidad presente. Si inicialmente hay 40 mg de material y al cabo de una hora se observa que ha perdido 8% de la cantidad inicial, hallar:

1. La cantidad de masa en cualquier momento t.
2. La masa del material después de 3 horas.
3. El tiempo que transcurre hasta la desintegración de la mitad de la cantidad inicial.

SOLUCIÓN:

1. Sea y la cantidad, en miligramos, presente de material radiactivo, entonces $\frac{dy}{dt} = ky$, es la ecuación del proceso. Integrando:

$$\ln y = kt + c$$
$$y = ce^{kt}$$

Para $t = 0$ se cumple que $y = 40$
Sustituyendo en la solución, se obtiene $c = 40$

$$\rightarrow y = 40e^{kt}$$

Para $t = 1,\ y = 40 - 3.2 = 36.8$

porque el 8% de 40 es 3.2 mg.

$$36.8 = 40e^{k}$$
$$k = \ln \frac{36.8}{40}$$
$$\therefore y = 40e^{-0.0834t}$$

es la ecuación que da la cantidad de material radiactivo en cualquier tiempo t.

2. Para $t = 3$:

$$y = 40e^{-0.25}$$
$$y = 31.15 \text{ mg.}$$

3. Para $y = 20$ mg:

$$t = ?$$

$$20 = 40e^{-0.0834t}$$

$$t = \frac{\ln 2}{0.0834}$$

$$t = 8.31 \text{ h.}$$

Si se utiliza `Mathematica` hay que definir el problema con valor inicial, por ejemplo $y'(t) = -ky(t)$ sujeto a $y(0) = y_0$, y después recurrir a la instrucción decay.

```
Clear[d1]
d1=DSolve[{y'[t]==-ky[t],y[0]==y0},y[t],t]
d1[[1,1,2]]
e^-kt y0
decay[t_,k_,y0_]=d1[[1,1,2]]
e^-kt y
Plot[decay[1,k,10],{k,0,1}]
```

Proceso de segundo orden: reacciones químicas

EJEMPLO 2

Partiendo de dos sustancias A y B se desea obtener un compuesto C. La ley de conversión para estas sustancias es: la rapidez de transformación de la cantidad x del compuesto C es proporcional al producto de las cantidades no transformadas de las sustancias A y B. Tomando medidas unitarias suponemos que una unidad de A y una unidad de B producen una unidad de C.

1. Demostrar que la ley de conversión en $t = 0$ viene dada por la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x)$$

2. Si en $t = 0$ hay m unidades de la sustancia A, n unidades de la B y ninguna del compuesto C, hallar la solución para x.

3. Si $a = 4$ kg, $b = 5$ kg, $x = 1$ kg, en $t = 50$ min; hallar el valor de x cuando $t = 1$ h, 40 min.

SOLUCIÓN:

1. Si al principio hay m unidades de A, n unidades de B y cero unidades de C, entonces, las x unidades de C en un tiempo t constan de: $\dfrac{mx}{m+n}$ unidades de A y $\dfrac{nx}{m+n}$ unidades de B; por lo tanto, quedan sin combinar: $\left(a_0 - \dfrac{mx}{m+n}\right)$ unidades de A y $\left(b_0 - \dfrac{nx}{m+n}\right)$ unidades de B y la ecuación es:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= K\left(a_0 - \frac{mx}{m+n}\right)\left(b_0 - \frac{nx}{m+n}\right)\\
&= K\left(\frac{a_0(m+n)-mx}{m+n}\right)\left(\frac{b_0(m+n)-nx}{m+n}\right)\\
&= \frac{Kmn}{(m+n)^2}\left(\frac{a_0m+a_0n-mx}{m}\right)\left(\frac{b_0m+b_0n-nx}{n}\right)\\
&= \frac{Kmn}{(m+n)^2}\left[a_0\left(1+\frac{n}{m}\right)-x\right]\left[b_0\left(\frac{m}{n}+1\right)-x\right]\\
&= k(a-x)(b-x)
\end{aligned}$$

Donde $k = \dfrac{Kmn}{(m+n)^2}$, $a = a_0\left(\dfrac{m+n}{m}\right)$, $b = b_0\left(\dfrac{m+n}{m}\right)$.

2. $\dfrac{dx}{(a-x)(b-x)} = kdt$

CASO 1. $a = b \rightarrow \dfrac{dx}{(a-x)^2} = kdt$

$$\frac{1}{a-x} = kt + C$$

Para $t = 0$ y $x = 0$ $\rightarrow C = \dfrac{1}{a}$

$$\frac{1}{a-x} = kt + \frac{1}{a}$$

despejando x:

$$x = \frac{a^2kt}{akt+1} \text{ unidades de } C$$

CASO 2. $a \neq b \rightarrow \dfrac{1}{(a-x)(b-x)}dx = kdt$

Por fracciones parciales tenemos:

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)} = \frac{A}{a-x} + \frac{B}{b-x} = \frac{1}{(a-x)(b-a)} + \frac{1}{(a-b)(b-x)}$$

Integrando:

$$-\frac{1}{b-a}\ln(a-x) - \frac{1}{a-b}\ln(b-x) = kt + C$$

$$\frac{1}{b-a}[\ln(b-x) - \ln(a-x)] = kt + C$$

$$\ln\frac{b-x}{a-x} = (b-a)(kt+C)$$

Para $t = 0$, $x = 0$

$$\ln\frac{b}{a} = (b-a)C; \quad C = \frac{\ln\frac{b}{a}}{b-a}$$

Entonces, $\ln\dfrac{b-x}{a-x} = (b-a)kt + \ln\dfrac{b}{a}$

$$\ln\frac{b-x}{a-x} - \ln\frac{b}{a} = (b-a)kt$$

$$\ln\frac{a(b-x)}{b(a-x)} = (b-a)kt$$

$$\frac{b-x}{a-x} = \frac{b}{a}e^{(b-a)kt}$$

de donde:

$$x = \frac{ab\left(1-e^{(b-a)kt}\right)}{a-be^{(b-a)kt}} \text{ si } b>a$$

3. Si $a = 4$ kg; $b = 5$ kg; $x = 1$ kg y $t = 50$ mn, entonces:

$$1 = \frac{20\left(1-e^{50k}\right)}{4-5e^{50k}}$$

$$e^{50k} = \frac{16}{15}; \quad k = \frac{1}{50}\ln\frac{16}{15}$$

Para $t = 100$ minutos:

$$x = \frac{20-20\left(\frac{16}{15}\right)^2}{4-5\left(\frac{16}{15}\right)^2}; \quad x = \frac{31}{19} = 1.632 \text{ kg de C.}$$

EJERCICIOS 3.3

1. El uranio se descompone a una velocidad proporcional a la cantidad presente. Si inicialmente hay 10 g y después de 2 horas se ve que ha perdido el 5% de su masa original, hallar:
   a. La ecuación que representa la cantidad restante en cualquier tiempo t.
   b. La cantidad de uranio después de 5 horas.
   Respuestas: *a*. $y = e^{-0.026t}$ *b*. $y = 8.781$ g
2. En una reacción química, la sustancia M se transforma en otra sustancia a una velocidad proporcional a la cantidad de M no transformada todavía. Si al inicio de la reacción había 200 g de M y una hora más tarde 75 g, calcular el porcentaje de M transformada después de 2 horas.
   Respuesta: 85.93 por ciento.
3. Sabemos que un material radiactivo se desintegra proporcionalmente a la cantidad existente en cada momento. En una prueba realizada con 60 mg de este material, se observó que después de 3 horas, solamente el 80% de la masa permanecía en ese momento. Hallar:
   a. La ecuación que exprese la cantidad restante de masa en un tiempo t.
   b. ¿Qué cantidad permanece cuando $t = 5$ h?
   c. ¿Para qué valor de t, la cantidad de material es ¼ de la cantidad inicial?
   Respuestas: *a*. $y = 60\ \mathrm{e}^{(t\ln 0.8)/3}$ *b*. $y = 41.365$ mg *c*. $t = 18.6$ h
4. Cierto material radiactivo se desintegra a una tasa proporcional a la cantidad presente. Si actualmente se cuenta con 300 g del material y después de dos años se observa que el 14% de la masa original se ha desintegrado, hallar:
   a. Una expresión para la cantidad de material en un tiempo t.
   b. El tiempo necesario para que se haya desintegrado un 30 por ciento.
   Respuestas: *a*. $y = 300\ e^{t[0.5\ln(43/50)]}$ *b*. $t = 4.73$ años
5. Se sabe que cierto material se desintegra a una razón proporcional a la cantidad presente. Si después de una hora se observa que el 20% se ha desintegrado, hallar la vida media del material.
   Respuesta: 3.11 horas
6. Los experimentos demuestran que la rapidez de conversión del azúcar de caña en solución diluida es proporcional a la concentración de azúcar aún no diluida. Supongamos que en $t = 0$ la concentración de azúcar es 1/150 y en $t = 5$ h es 1/200. Hallar la ecuación que da la concentración de azúcar sin diluir en función del tiempo.
   Respuesta: $y = 1/150\ e^{-0.058t}$
7. Se ha observado en el laboratorio que el radio se desintegra a una rapidez proporcional a la cantidad de radio presente. Su vida media es de 1 600 años ¿Qué porcentaje desaparecerá en un año?
   Respuesta: 0.043 por ciento.
8. En un cultivo de levadura la rapidez de cambio es proporcional a la cantidad existente. Si la cantidad de cultivo se duplica en 4 horas ¿qué cantidad puede esperarse al cabo de 12 horas, con la misma rapidez de crecimiento?
   Respuesta: ocho veces más.

9. La conversión de una sustancia A sigue la ley del "proceso de primer orden". Si al cabo de 20 segundos apenas una cuarta parte de la sustancia se transformó, hallar cuándo se transformarán nueve décimas partes de esa sustancia.
Respuesta: $t = 160$ segundos

10. Una sustancia radiactiva tiene un periodo de semidesintegración de 40 horas. Hallar cuánto tiempo tardará en desaparecer el 90% de su radiactividad.
Respuesta: 132.8 horas

Biología

EJEMPLO 1

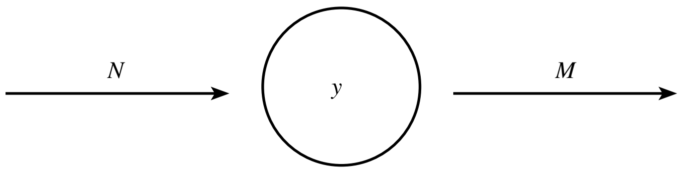
Por experiencia se sabe que en una cierta población la rapidez de nacimientos y de muertes es proporcional al número de individuos que instantáneamente estén vivos en un momento dado. Encontrar el modelo matemático del comportamiento del crecimiento de esta población.

Sea y el número de individuos de la población.

Llamamos $\dfrac{dN}{dt}$ a la rapidez de nacimientos,

además, $\dfrac{dM}{dt}$ a la rapidez de muertes. Entonces:

$$\frac{dN}{dt} = K_n y \quad \text{y} \quad \frac{dN}{dt} = k_m y$$



La ecuación del proceso es:

$$\frac{dy}{dt} = \text{entrada-salida}$$

$$\frac{dy}{dt} = K_n y - K_m y$$

$$\frac{dy}{dt} = \left(K_n - K_m\right) y$$

$$\frac{dy}{y} = \left(K_n - K_m\right) dt$$

$$\ln y = \left(K_n - K_m\right) t + \ln c$$

$$y = ce\left(K_n - K_m\right) t$$

EJEMPLO 2

En cierto instituto tecnológico se declara una epidemia de hepatitis. Se quiere encontrar el modelo matemático de la propagación de la enfermedad, partiendo del hecho de que ya existe un número determinado de estudiantes enfermos.

Haremos las siguientes suposiciones:

El número de estudiantes E, es grande. Ei es el número de estudiantes infectados. En es el número de estudiantes no infectados. La razón de cambio de alumnos infectados es dEi/dt.

$\frac{dEi}{dt} = a + bEi + cEi^2$; porque esta función cuadrática se acerca más a la realidad, ya que al principio de la epidemia hay pocos enfermos; luego este número aumenta y se espera que después disminuya; entre los estudiantes En están los inmunes y los ya recuperados (a, b y c son constantes).

Se cumple que $E = Ei + En$ en cualquier tiempo t, y también: $\frac{dEi}{dt} = 0$, cuando $Ei = 0$ y $Ei = E$.

Tomando en la ecuación propuesta $\frac{dEi}{dt} = 0$ tenemos:

1. Si $Ei = 0$, entonces $a = 0$
2. Si $Ei = E$, entonces $bE + CE^2 = 0$, $c = \frac{-b}{E}$

   Sustituyendo estos valores:

$$\frac{dEi}{dt} = bEi - \frac{bEi^2}{E}, \quad \frac{dEi}{dt} = \frac{b}{E} Ei(E - Ei)$$

Llamaremos $K = b/E$, constante.

Entonces:

$$\frac{dEi}{dt} = KEi(E - Ei)$$

Inicialmente, en $t = 0$ hay Eo estudiantes infectados, de ahí que:

$$Ei = Eo$$

Resolviendo la ecuación diferencial:

$$\frac{dEi}{Ei(E - Ei)} = Kdt$$

$$\frac{1}{E}\ln Ei - \frac{1}{E}\ln(E - Ei) = Kt + c$$

En $t = 0$:

$$c = \frac{1}{E}\ln\frac{Eo}{E - Eo}$$

Entonces:

$$\frac{1}{E}\ln\frac{Ei}{E-Ei}=kt+\frac{1}{E}\ln\frac{Eo}{E-Eo}$$

$$\frac{Ei\left(E-Eo\right)}{Eo\left(E-Ei\right)}=e^{ktE}$$

$$Ei=\frac{E}{\left(E/Eo-1\right)e^{-ktE}+1}$$

EJERCICIOS 3.4

1. Gracias a ciertos estudios realizados se sabe que la mosca del Mediterráneo crece en proporción al número presente en cada momento. Después de 2 horas de observación se forman 800 familias de la mosca y después de 5 horas se forman 2 000 familias. Encontrar: *a*. La ecuación que representa el número de familias en función del tiempo, y *b*. el número de familia que había al inicio.
Respuestas: *a*. $y=434e^{0.305t}$ *b*. $y=434$

2. La población de cierta ciudad aumenta proporcionalmente al número de habitantes que hay en un momento dado en ella. Si después de 5 años, la población se ha triplicado y después de 8 años es de 45 000 habitantes, hallar el número de ciudadanos que había inicialmente.
Respuesta: 7 760 habitantes.

3. Una industria le ha encargado a una de sus empacadoras procesar pescado para producir un concentrado rico en proteínas para mejorar la alimentación de los consumidores. Se sabe que 6 kg de pescado son los que se necesitan para producir un kilogramo de este producto. Para esto hay que secar el pescado en cuartos especiales, en los cuales se hace pasar una corriente de aire seco sobre ellos para quitarles la humedad. Por otra parte, los investigadores han demostrado que la velocidad de secado es proporcional a la humedad que contenga el pescado y además que a los 25 minutos del proceso se ha perdido la mitad de la humedad inicial. Para producir este concentrado se requiere que el pescado contenga solamente 10% de su humedad inicial. ¿Cuánto tiempo tiene que permanecer el pescado en el cuarto para perder el 90% de su humedad?
Respuesta: 1 hora 23 minutos, aproximadamente.

4. En el proceso de respiración absorbemos aire que contiene principalmente nitrógeno y oxígeno, y al exhalar despedimos bióxido de carbono. Se quiere purificar el ambiente de un salón donde se encuentran bailando un gran número de personas; para ello, se hace pasar una corriente de aire puro de 3 500 m^3/h de aire al que llamaremos Q_{a_1}, y se hace salir 3 000 m^3/h de aire contaminado (Q_{a_2}), con bióxido de carbono. A la concentración de bióxido de carbono por $C_{CO_2}f$. Se sabe que el volumen del salón es de 10 000 m^3 y que la concentración inicial de bióxido de carbono en el cuarto es de 0.1% del volumen de éste. Suponiendo que la densidad permanece constante, ¿cuál es la concentración de bióxido de carbono, $C_{CO_2}f$, al cabo de 4 horas de haberse iniciado el baile? La concentración se expresa en g/m^3.

Respuesta: $C_{CO_2}f = 0.030119\, g/m^3$

5. La tasa de crecimiento de una población es proporcional al número de sus habitantes. Si después de 18 años la población se ha duplicado y después de 25 años la población es de 200 000 habitantes, hallar: *a*. el número inicial de habitantes y *b*. cuántos habitantes tendrá al cabo de 100 años.

Respuestas: *a*. 76 372 habitantes. *b*. 3 588 954 habitantes.

6. En cierto zoológico se ha observado que la cantidad de animales aumenta proporcionalmente al número actual de dichos animales. Si después de 5 años su número se ha duplicado y después de 7 años el número de animales es 576, hallar el número de animales con que se contaba el día de la inauguración del zoológico.

Respuesta: 218 animales.

7. El siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\frac{dx}{dt} = x\left(a + by\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = y\left(c + gx\right)$$

fue diseñado por el matemático Volterra (1860-1940), para describir el comportamiento de dos especies que compiten para sobrevivir en el mismo hábitat. Resolver esta ecuación, usando la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \bullet \frac{dt}{dx}$$

Respuesta: $y^a e^{by} = kx^c e^{gx}$

8. Ciertas enfermedades se propagan mediante picaduras de insectos (la malaria), o por transmisiones (la tifoidea). Supongamos que x representa la cantidad de transmisores en una cierta población, y y es la cantidad de sanos, en el instante t. Si los transmisores se eliminan de la población con rapidez β, de manera que se cumple:

$$\frac{dx}{dt} = -\beta x$$

Y si la enfermedad se propaga con una rapidez proporcional al producto xy, tendremos:

$$\frac{dy}{dt} = -\alpha xy$$

a. Para $x(0) = X_0$, hallar x en cualquier instante t.

b. Para $y(0) = Y_0$, hallar y en cualquier instante t (usar el resultado anterior).

c. Cuando $t \to \infty$, ¿cuál es el valor límite de y y qué significa?:

Respuestas: *a*. $x = x_0 e^{-\beta t}$ *b*. $y = y_0 e^{ax_0(e^{-\beta t}-1)/\beta}$ *c*. $y = y_0 e^{-ax_0/\beta}$

9. Un cuarto tiene 60 m^3 de aire, originalmente libres de monóxido de carbono. Se prende un cigarrillo y el humo, con un contenido del 4.5% de monóxido de carbono, se introduce con una rapidez de 0.002 m^3/min y se deja salir la mezcla con la misma rapidez. *a*. Encontrar una expresión para la concentración de monóxido de carbono en el cuarto en cualquier instante. *b*. La concentración de monóxido de carbono a bajos niveles, por ejemplo: 0.00012 puede ser perjudicial para los seres humanos. Encontrar el tiempo en el cual se alcanza esta concentración.
Respuestas: *a*. $C = (9/200)\left(1 - e^{-t/30000}\right)$ *b*. $t = 4$ horas

10. En una estación de metro subterráneo de 7 500 m^3 se ha comprobado que hay una concentración de 0.2% de CO_2. Para renovar a atmósfera, unos ventiladores introducen aire del exterior (el cual tiene una concentración CO_2 de 0.06%) a una velocidad de 7 000 m^3/min. Hallar el porcentaje de CO_2 después de 15 minutos.
Respuesta: 0.06 por ciento.

Física

EJEMPLO 1

Según la ley de Enfriamiento de Newton, la velocidad a la que se enfría una sustancia al aire libre es proporcional a la diferencia de temperaturas de la sustancia y del aire. Si la temperatura del aire es 28° y la sustancia se enfría de 100° a 80° en 12 minutos, ¿en qué momento estará a una temperatura de 50 grados?

Llamaremos T a la temperatura de la sustancia a los t minutos.

Entonces, $\dfrac{dT}{dt} = -k(T - 28)$ es la ecuación del proceso, donde la constante negativa representa pérdida o disminución.

La solución por el método de variables separables es:

$$T = ce^{-kt} + 28$$

Aplicando las condiciones iniciales:

$$t = 0 \quad T = 100 \text{ tenemos:}$$

$$100 = C + 28\,,\ C = 72$$

y para $t = 12$, $T = 80$

$$80 = 72e^{-12k} + 28 \quad k = \frac{1}{12}\ln\frac{13}{18}$$

Entonces: $T = 72e^{-(1/12)\ln(13/18)t} + 28$

Para $T = 50$

$$\frac{50-28}{72} = e^{-(1/12)\ln(13/18)t}$$

$\ln\frac{11}{36} = \frac{1}{12}\left(\ln\frac{13}{18}\right)t \qquad t = 43.72$ minutos

EJEMPLO 2

Un objeto que pesa 30 kg se deja caer desde una altura de 40 m, con una velocidad inicial de 3 m/seg. Supongamos que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del cuerpo. Se sabe que la velocidad límite debe ser de 40 m/seg. Encontrar: **1**. La expresión de la *velocidad* del objeto en un tiempo t, **2**. la expresión para la posición del cuerpo en un tiempo t y **3**. la *velocidad* después de 8 segundos.

1. La fuerza neta F sobre un cuerpo es $F = mg - kv$, donde m es la masa del objeto, g es la fuerza de la gravedad y kv es la fuerza debida a la resistencia del aire (k es una constante de proporcionalidad).

Además, por la segunda ley de Newton, tenemos:

$$F = m\frac{dv}{dt} \quad m\frac{dv}{dt} = mg - kv \tag{1}$$

En este problema:

$\omega = 30$ kg y como $\omega = mg$, entonces $mg = 30$ kg

y $\qquad m = \frac{30}{9.8} = 3.06$ kg masa (tomamos $m = 3$)

$v.\lim = 40$ m/seg, donde $v.\lim = \frac{mg}{k}$; entonces:

$$40 = \frac{mg}{k}, \; k = \frac{mg}{40} = \frac{3}{4}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (1):

$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{4}v = 10$ ecuación lineal, cuya solución es:

$$v = C_1 e^{-t/4} + 40$$

Con condición inicial: para $t = 0$, $v = 3$,

$$3 = C_1 + 40 \rightarrow C_1 = -37$$

$$\therefore v = -37e^{-t/4} + 40$$

2. Para encontrar la posición del cuerpo tomamos $v = \frac{dx}{dt}$, entonces:
$\frac{dx}{dt} = -37e^{-t/4} + 40$, ecuación de variables separables,

con solución: $x = 148e^{-t/4} + 40t + C_2$

Para $t = 0 \rightarrow x = 0$ y $C_2 = -148$

$$\therefore x = 148e^{-t/4} + 40t - 148$$

3. Para $t = 8$

$$v = -37e^{-2} + 40$$

$$\therefore v = 35 \text{ m/seg}$$

EJEMPLO 3

Un circuito RL tiene una *fem* de 5 voltios, una inductancia de 1 henrio, una *resistencia* de 80 ohmios y no tiene corriente inicial. Determinar la corriente en el circuito para cualquier tiempo *t*.

El circuito más sencillo *RL* consta de:

- Una resistencia *R*, en ohmios.
- Una inductancia *L*, en henrios.
- Una fuerza electromotriz, *fem E*, en voltios.

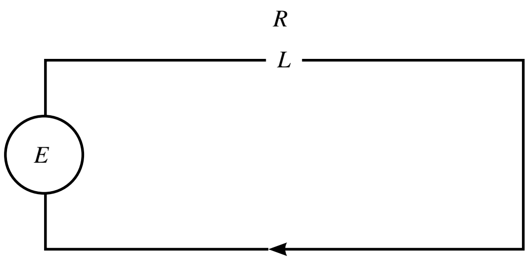


Figura 3-9.

La cantidad de corriente *I*, en amperios, queda expresada por la ecuación:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{E}{L}$$

Entonces, para $E = 5$, $L = 1$ y $R = 80$, la ecuación del circuito es:

$\frac{dI}{dt} + 80I = 5$, ecuación lineal, cuya solución es:

$$I = \frac{1}{16} + ce^{-80t}$$

Para $t = 0$, $I = 0$; entonces: $c = -\frac{1}{16}$

La corriente en cualquier tiempo t es:

$$I = \frac{1}{16}\left(1 - e^{-80t}\right)$$

EJEMPLO 4

Un circuito *RC* tiene una *fem* de 200 cos 2t (en voltios), una *resistencia* de 50 ohmios y una *capacitancia* de 10^{-2} faradios. En $t = 0$ no hay carga en el condensador. Hallar la corriente en el circuito en un tiempo t.

El circuito *RC* consta de:

- Una *resistencia R,* en ohmios.
- Una *fem E*, en voltios.
- Una *capacitancia C,* en faradios (no hay *inductancia*).

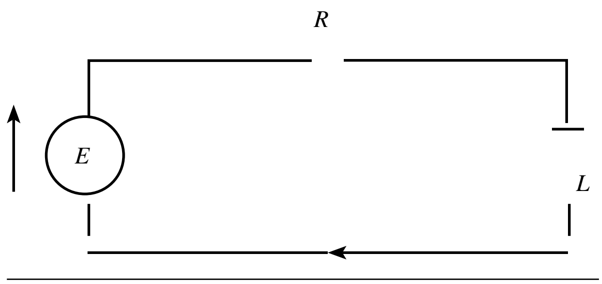


Figura 3-10.

La ecuación que da la cantidad de carga eléctrica q, en *culombios*, es:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = \frac{E}{R}\text{, además } I = \frac{dq}{dt}$$

Entonces: $E = 200\cos 2t,\ R = 50,\ C = 10^{-2}$ y la ecuación es:

$\dfrac{dq}{dt} + 2q = 4\cos 2t$ ecuación lineal, cuya solución es:

$$q = \cos 2t + \operatorname{sen} 2t + ce^{-2t}$$

Para $t = 0,\ q = 0$; entonces: $c = -1$

$\therefore q = \cos 2t + \operatorname{sen} 2t - e^{-2t}$

NOTA: $4\int e^{2t}\cos 2t dt = e^{2t}\left(\cos 2t + \operatorname{sen} 2t\right)$

Una vez obtenida la carga, podemos encontrar la corriente:

$$I = \frac{dq}{dt} = -2\operatorname{sen} 2t + 2\cos 2t + 2e^{-2t}$$

EJEMPLO 5

Un resorte de peso despreciable está suspendido verticalmente. En su extremo libre se ha sujetado una masa de $m = 40$ kg. Si la masa se mueve con velocidad de $v_0 = 1$ m/seg, cuando el resorte está sin alargar, hallar la velocidad v cuando el resorte se alarga 2 metros.

La fuerza del resorte es proporcional (y opuesta) al alargamiento (Ley de Hooke). Además se cumple: fuerza neta sobre el objeto = peso del objeto − fuerza del resorte.

Entonces: $m\dfrac{dv}{dt} = mg - kx$

O también $m\dfrac{dv}{dx}\left(\dfrac{dx}{dt}\right) = mv\dfrac{dv}{dx} = mg - kx$, ecuación de variables separables, cuya solución es:

$$v^2 = 2gx - \frac{k}{m}x^2 + c \text{, o bien, } mv^2 = 2mgx - kx^2 + c$$

Para $x = 0$, $v = v_0$. Entonces, $c = mv_0$, por tanto:

$$mv^2 = 2mgx - kx^2 + mv_0{}^2$$

Para los valores del problema, la velocidad del alargamiento queda en función de la constante k; cuyo valor puede especificarse mediante condiciones iniciales. En este caso, la velocidad es:

$$v^2 = 4g - \frac{k}{10} + 1$$

EJEMPLO 6

En cierto depósito hay 189 L de solución salina que contiene 10 kg de sal. Se vierte agua en el depósito con una velocidad de 4 L por minuto y sale la mezcla con velocidad de 3 litros por minuto. La concentración se mantiene homogénea. Hallar la cantidad de sal al cabo de media hora.

Volumen inicial: $V_0 = 180$ L, cantidad de sal $Q_0 = 10$ kg, velocidad del agua al entrar $e = 4$, velocidad de la mezcla al salir $f = 3$.

Sea Q la cantidad de sal en el depósito en un momento dado. El volumen de solución salina en cualquier momento es: $V_0 + et - ft$. La concentración de sal es $Q/\left(V_0 + et - f\right)$, y la sal que sale del depósito lo hace a una razón de $f\left[Q/V_0 + et - ft\right]$ kg/minuto.

Entonces:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{\mathrm{L}}{V_0 + (e - f)t}Q = 0$$

$$dQ + \frac{3}{180+t} Q = 0$$

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{3}{(180+t)} Q\,,\quad \frac{dQ}{dt} = \frac{-3dt}{180+t}$$

$$\ln Q = -3\ln(180+t) + \ln C$$

$$Q = \frac{C}{(180+t)^3}$$

Para $t=0$, $Q=a=10$ $\qquad c = 58.32\times 10^6$

Para $t=30$, $Q=6.3$ kg de sal.

EJERCICIOS 3.5

1. Una sustancia se enfría desde 100° hasta 70° en 15 minutos estando al aire libre (temperatura del aire 20°), hallar la temperatura después de 30 minutos.
   Respuesta: $T = 51°$

2. Un cuerpo a una temperatura desconocida se coloca en una habitación en la cual hay una temperatura constante de 18°. Si después de 15 minutos la temperatura del cuerpo es de 8° y después de 25 minutos es de 12°, hallar la temperatura inicial del cuerpo.
   Respuesta: $T = 3.5°$

3. Se desea enfriar una sustancia, la cual se introduce en un refrigerador que está a una temperatura constante de 5°. Al cabo de 30 minutos, la sustancia está a 8° y después de 40 minutos está a 6°. Hallar la temperatura inicial de la sustancia.
   Respuesta: $T = 86°$

4. Un cuerpo a una temperatura de 30° está inmerso en un baño cuya temperatura se mantiene en 50°. Después de una hora la temperatura del cuerpo es de 40°, hallar:
   a. La temperatura del cuerpo después de dos horas a partir de la inmersión.
   b. El tiempo que se necesita para que la temperatura del cuerpo sea de 48°.
   Respuestas: *a.* $T = 45°$ *b.* $t = 3$ h 19 min 18 seg

5. La temperatura del aire es de 40°. Si un objeto se enfría en el aire pasando de una temperatura de 120° a otra de 100° en 20 minutos, encontrar:
   a. la temperatura del cuerpo después de 50 minutos.
   b. El tiempo necesario para que la temperatura del objeto sea de 70 grados.
   Respuestas: *a.* $T = 79°$ *b.* $t = 68$ minutos

6. Un cuerpo de masa $m = 2$ kg se lanza verticalmente en el aire con una velocidad inicial $v_0 = 3$ m/seg. El cuerpo encuentra una resistencia al aire proporcional a su velocidad, hallar:

a. La ecuación del movimiento.
b. La velocidad en un tiempo $t = 20$ seg.
c. El tiempo necesario para que el cuerpo llegue a su altura máxima altura.

Respuestas:
a. $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = -g$
b. $v = -\frac{2g}{k} + (3 + \frac{2g}{k})e^{-10k}$
c. $t = \frac{2}{k}\ln\left(\frac{3k}{2g} + 1\right)$

7. Un cuerpo de masa 14.7 kg se suelta con velocidad inicial de 0.5 m/seg y encuentra una fuerza debida a la resistencia del aire dada por $8\,v^2$, hallar la velocidad para el momento $t = \sqrt{2}$ segundos.
Respuesta: $v = 4.23$ m/seg

8. Un cuerpo con una masa de 9.7 kg se suelta de una altura de 300 m sin velocidad inicial. El cuerpo encuentra una resistencia al aire proporcional a su velocidad. Si la velocidad límite debe ser de 95 m/seg, encontrar:

a. La velocidad del cuerpo en un tiempo *t*.
b. La posición del cuerpo en un tiempo *t*.
c. El tiempo que necesita el cuerpo para alcanzar la velocidad de 50 m/seg.

Respuestas:
a. $v = 95(1 - e^{-\frac{t}{9.7}})$
b. $x = 95t + 921.5(e^{-\frac{t}{9.7}} - 1)$
c. $t = 7.24$ seg

9. Se deja caer un objeto que pesa 98 kg desde una altura de 50 m con una velocidad inicial igual a cero. Suponiendo que la resistencia del aire es despreciable, hallar:

a) La velocidad cuando $t = 0.25$ min.
b) La posición del objeto cuando $t = 3$ seg.
c) El tiempo invertido desde que se soltó el objeto hasta que tocó tierra.

Respuestas:
a. $v = 147$ m/seg
b. $x = 44.1$ m
c. $t = 3.19$ seg

10. Un circuito *RL* tiene una *fem* de 9 voltios, una resistencia de 30 ohmios, una inductancia de 1 henrio y no tiene corriente inicial, hallar la corriente en el circuito para un tiempo $t = 1/5$ seg.
Respuesta: $I = 0.2992$ amperios

11. Un circuito *RL* tiene una *fem* de 8 sen 2 *t* voltios, una resistencia de 10 ohmios, una inductancia de 2 henrios y una corriente inicial de 5 amperios, hallar la corriente en el circuito cuando $t = \frac{\pi}{2}$ seg.
Respuesta: $I = 0.2779$ amperios

12. Un circuito *RC* tiene una *fem* de 300 cos 2t voltios, una resistencia de 200 ohmios y una capacitancia de 10^{-2} faradios. Inicialmente no hay carga en el condensador. Hallar la corriente en el circuito en $t = 4\pi$ seg.
Respuesta: $I = 0.2779$ amperios

13. Hallar la corriente en un circuito *RL* que tiene un voltaje constante, $R =$ 40 ohmios, y $L = 8$ henrios. Para $t = 0$, los valores de E e I son cero voltios y 10 amperios, respectivamente. Calcular el tiempo necesario para que $I = 5$ amperios.
Respuesta: $t = 0.14$ segundos

14. Un circuito que consta de un condensador y una resistencia se conecta como en la figura:

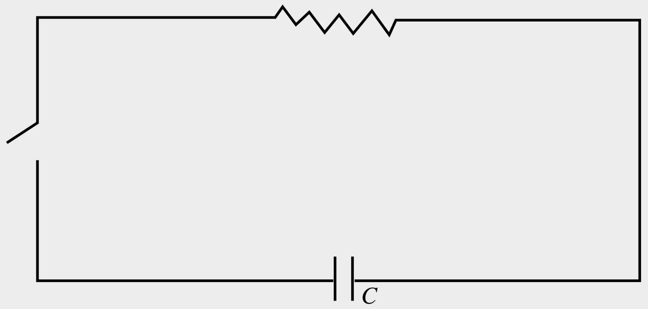


Figura 3-11.

Si lleva una carga $q = 0.05$ coulombios y el interruptor se cierra cuando $t = 0$, hallar la carga eléctrica después de 9 segundos si $c = 3 \times 10^{-3}$ faradios y $R = 10^3$ ohmios.
Respuesta: $q = 0.0025$ coulombios

15. Un objeto que tiene una masa de 4 kg está suspendido de un resorte de peso despreciable. Si el objeto se mueve con velocidad $v_0 =$ 3m/seg cuando el resorte está sin alargar, hallar la velocidad cuando se alargue 50 centímetros.
Respuesta: $v = (18.8 - \text{k}/16)^{1/2}$ m/seg

16. Un tanque contiene inicialmente 100 L de una solución salina que contiene 25 kg de sal. Se vierte agua dulce en el tanque a una velocidad de 4 kg/min, mientras que sale del tanque una solución bien mezclada a la misma velocidad. Hallar:
a. La cantidad de sal en el tanque en cualquier momento t.
b. El tiempo que se necesita para que haya una cantidad de 10 kg de sal.
c. Si $t \to \infty$, averiguar la cantidad de sal que queda en el tanque:

Respuestas:
a. $Q = 25e^{-\frac{t}{25}}$
b. $t = 22.9$ min
c. $Q = 0$

17. Un depósito contiene inicialmente 200 L de una solución salina que contiene 40 kg de sal. En $t = 0$ se vierte agua en el depósito a una velocidad

de 8 litros por minuto y sale del depósito una solución bien mezclada a 6 litros por minuto. Hallar el tiempo necesario para que haya en el tanque una cantidad de sal de 10 kilogramos.
Respuesta: $t = 58.74$ minutos

18. Encontrar el tiempo que se necesita para vaciar un tanque cilíndrico que tiene un radio de 4 m y una altura de 5 m a través de un orificio redondo con 1/24 m de radio situado en el fondo del tanque. La velocidad de salida del líquido es aproximadamente $v = 0.6\sqrt{2gh}$ m/seg, donde h es la altura del líquido en el tanque y g la gravedad.
Respuesta: $t = 4$ h 18 minutos

19. Hallar el tiempo que tarda en vaciarse un tanque semiesférico de 2 m de diámetro lleno de agua, si ésta sale por un orificio de 0.1 m de radio que hay en el fondo del tanque, sabiendo que la velocidad de salida de agua por un orificio es la dada en el problema 18.
Respuesta: $t = 35.16$ segundos

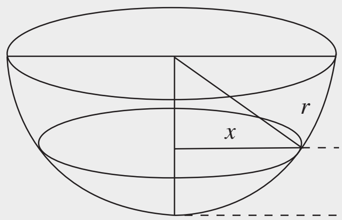


Figura 3-12.

20. Para ir a su clase un joven recorre un camino en línea recta, de tal manera que su velocidad excede en 3 a su distancia respecto del punto de partida. Si $v = 4$ cuando $t = 0$, encontrar la ecuación del movimiento.
Respuesta: $x = 4e^t - 3$

21. Un tanque cónico de 10 m de altura y 6 m de radio pierde agua por un orificio en su fondo. Si el área de la sección recta del orificio es ¼ m^2, encontrar:

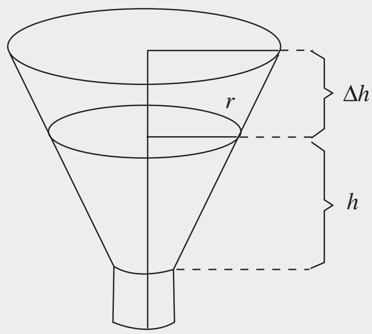


Figura 3-13.

a. La ecuación que representa la altura h del agua en un instante cualquiera.
b. El tiempo que tarda en vaciarse.

Respuestas: *a*. $h^{5/2} = 10^{5/2} - \frac{125\sqrt{2g}}{72}t$

b. $t = 2 \text{ min } 9 \text{ seg}$

22. Un trineo de 50 kg de peso se empuja en línea recta contra el viento con una fuerza de 10 kg. Si la fricción es despreciable, pero la resistencia del aire es, en magnitud, igual al doble de la velocidad del trineo, y si el trineo parte del reposo, encontrar la velocidad y la distancia recorrida al final de 2 segundos.
Respuesta: 2.72 m/seg, $x = 6.55$ m

23. Un tanque cilíndrico que tiene un volumen de 20 m cúbicos está lleno de aire atmosférico que se comprime de un modo adiabático, hasta que su volumen se hace igual a 15 m^3. Calcular el trabajo invertido en la compresión.

NOTA: El proceso adiabático se representa por la ecuación de Poisson:

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{V_0}{V}\right)^k$$

donde k es una constante para el gas dado. Tomar $P_0 = 1$ atmósfera.

Respuesta: $W = \frac{20}{1-k}\left[\left(\frac{4}{3}\right)^{k-1} - 1\right]; \quad k \neq 1$

24. Un tubo de 10 cm de diámetro contiene vapor a 100 °C. Se encuentra aislado con una capa de 3 cm de espesor y conductividad térmica $k = 175 \times 10^{-6}$ cal/cm grado seg. Si la superficie externa del aislante se mantiene a 45 °C, encontrar la pérdida de calor en un metro de longitud del tubo y la temperatura a la mitad del aislante.

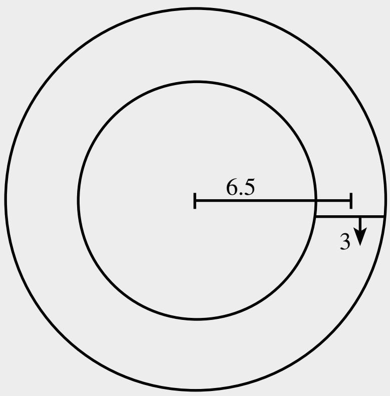


Figura 3-14.

Respuesta: La pérdida de calor es 12.87 cal/seg.
La temperatura para el radio 6.5 es de 69.29 grados centígrados.

Otras aplicaciones

EJEMPLO 1

Un banco ofrece 10% de interés compuesto continuamente en una cuenta de ahorros. Determinar el importe del interés ganado en 1 año con un depósito de un millón de pesos.

Sea x la suma de dinero al cabo de t años; entonces: $\frac{dx}{dt} = 0.10x$ es la ecuación que satisface el problema, cuya solución es: $x = ce^{0.1t}$

Y para las condiciones iniciales: $t = 0$; $x = 1\,000\,000$ tiene la forma:

$$x = 1\ 000\ 000e^{0.1t}$$

Para $t = 1$, $x = 1\ 105\ 170.90$ se tiene:

1 105 170.90 – 1 000 000 = 105 170.90 es lo que ganó este año.

EJERCICIOS 3.6

1. Hallar el tiempo necesario para que una cantidad de dinero aumente al doble al 15% por año, con un interés compuesto continuo.
Respuesta: $t = 4.62$ años

2. Un hombre tiene una fortuna que aumenta una tasa proporcional al cuadrado de su capital actual. Si tenía un millón de pesos hace un año y ahora tiene dos millones, determinar:

a. La cantidad que tendrá dentro de seis meses.

b. La que tendrá dentro de dos años.

Respuestas: *a*. Cuatro millones. *b*. Infinito.

3. Sea $\frac{ds}{dt} = 0.4\ s$ la variación de cantidad de dinero s con respecto al tiempo, donde 0.4 representa 40% de interés compuesto durante un año. Calcular:

a. El tiempo necesario para que se duplique la cantidad.

b. La cantidad inicial, si en 10 años el capital es de dos millones.

Respuestas: *a*. $t = 1.733$ años. *b*. $s_0 = 36\ 631.28$

4. El radio de la Luna es aproximadamente de 1 738 km. La aceleración de la gravedad en su superficie es aproximadamente 1.67 m/seg^2. Determine la velocidad de escape de la Luna.

Respuesta: $v_e = 2.4$ km/seg

5. Teniendo en cuenta el problema anterior, determinar la velocidad de escape de Marte, Júpiter y Venus, si:

Planeta	Radio (km)	*
Tierra	6 372	1
Marte	3 389	0.37
Venus	6 195	0.86
Júpiter	69 880	2.64

Donde * representa la aceleración de la gravedad en la superficie del planeta con respecto a la Tierra.

Respuestas:

Marte: $v_e = 4.9$ km/seg

Júpiter: $v_e = 59.67$ km/seg

Venus: $v_e = 10.21$ km/seg

Los Bernoulli

La familia Bernoulli fue para la matemática lo que la familia Bach para la música. Entre 1654, fecha de nacimiento de Jacobo, y 1863, año en que murió Juan Gustavo, tataranieto de Juan, hermano del primero, esta familia suiza brindó 12 matemáticos de notoriedad. Sin lugar a dudas, los Bernoulli de más peso fueron Jacobo (1654-1705), Juan (1667-1748) y Daniel (1700-1782), hijo de este último.

Daniel Bernoulli
(1700-1782)

Debemos a Jacobo el uso de las coordenadas polares, la obtención del radio de curvatura, el estudio de la curva llamada catenaria y muchos más resultados, consecuencia de la aplicación del cálculo a problemas de física. Los famosos números de Bernoulli, distribución de Bernoulli, lemniscata y polinomio de Bernoulli son obras de Jacobo.

Su hermano Juan, maestro reputado y hombre de mal genio, fue aún más prolífico, especialmente en el desarrollo del cálculo que aplicaba indistintamente a problemas de matemáticas o de física. Así es como se encuentran entre sus obras el estudio de la propagación de la luz (reflexión y refracción), de las trayectorias ortogonales a ciertas familias de curvas o de la famosa braquistócrona —la trayectoria de más rapidez para el movimiento de una partícula pesada entre dos puntos—. Jacobo y Juan, a pesar de cierta tensión entre ellos debida a asuntos de prioridad de descubrimientos, intercambiaron ideas toda su vida. También estaban en relación continua con Leibniz, padre de la herramienta que estaban usando.

El tercer gran Bernoulli, Daniel, se interesó más en ciertas ramas de la física como la astronomía, la teoría cinética de los gases —creación suya— y, sobre todo, en la hidrodinámica. Sin embargo, sus trabajos en probabilidad y ecuaciones diferenciales parciales lo colocan también entre los grandes de la matemática.

Tal como le había iluminado toda su vida,
también ahora el entendimiento iluminó
ese instante de la existencia de Juan Gaviota.
Tenían razón. Él era capaz de volar más alto.

JUAN SALVADOR GAVIOTA, R. BACH

El par de amigos

Un excursionista, Liborio, camina a la velocidad de 1.6 km/h por la orilla de un río de curso recto con 1 km de ancho. Su amigo, Nicasio, está en la orilla opuesta y se decide a alcanzar a Liborio nadando en todo momento en dirección a él.

La velocidad a que nada Nicasio en aguas tranquilas es de 3.6 km/h y la corriente del río es de 1 km/h en sentido opuesto a la marcha de Liborio. Cuando Nicasio alcance a Liborio ¿cuál será la distancia recorrida por éste desde el momento en que Nicasio saltó al agua hasta el momento del alcance?

SOLUCIÓN: 0.93 kilómetros.

El caracol y el muro

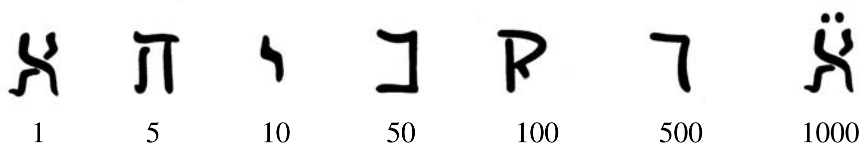
Un caracol sube verticalmente por un muro de 12 m de altura. Durante el día sube 2 m y durante la noche resbala, retrocediendo 1 m. ¿Cuántos días tardará en subir al muro, sabiendo que su velocidad promedio es de 16.6 cm por día?

SOLUCIÓN: 11 días.

Propiedades metafísicas del número 3

Representa el principio de la naturaleza en función, transmutación y manifestación. Según Pitágoras, genera la música, enseña la geometría, es la razón de la virtud y la síntesis del intelecto. Está formado por dos semicírculos que juntos constituyen el círculo completo, símbolo del alma. En la mente humana es creación, conservación y renovación.

Numeración hebrea, aproximadamente 300 a. C.



PREGUNTA: ¿Cómo construir la pista de patinaje más rápida entre dos puntos? (*Braquistócrona*). (Reto para Jacobo y Juan Bernoulli.)

Llegaron a la ecuación que cumplía la máxima rapidez:

$y[1+(y')^2]=c$ ¿Cómo se obtuvo?

Con solución:

$x=a(\theta-\operatorname{sen}\theta)$ ¡Una cicloide!

$y=a(1-\cos\theta)$ ¿Y cómo se llegó a ella?

Los libros tejieron, cavaron, deslizaron su serpentina
y poco a poco, detrás de las cosas de los trabajos, surgió
como un olor amargo con la claridad de la sal
el árbol del conocimiento.

Fragmento *Los libros*, PABLO NERUDA

EL PAR DE AMIGOS

Consideremos inmóvil la corriente del río y Liborio llevará su velocidad más la del río.

$$V_L = 1/.6 + 1 = 2.6 \text{ km/h} \quad V_N = 3.6 \text{ km/h}$$
$$S_L = b = 2.6t \qquad S_N = 3.6t$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{b-y}{a-x}$$
$$y'(a-x) = 2.6t - y$$

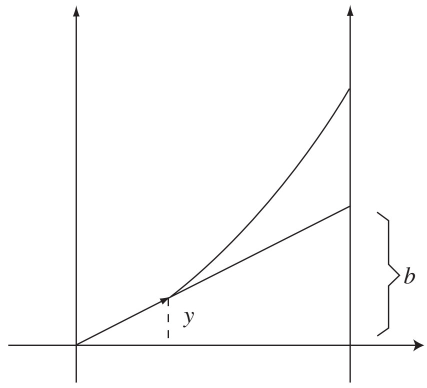


Figura 3-15.

Como $t = \dfrac{S_N}{3.6}$

$$y'(a-x) = 2.6\frac{S_n}{3.6} - y$$
$$y'(a-x) = \frac{13}{18}S_n - y$$

Derivando:

$$-y' + (a-x)y'' = \frac{13}{18}\sqrt{1+y^2} - y' \text{ entonces:}$$

$$y'' = \frac{13}{18}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{a-x}; \text{ sea } y' = z \rightarrow y'' = z'$$

$$z' = \frac{13}{18}\frac{\sqrt{1+z^2}}{a-x}; \qquad \frac{18}{13}\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{dx}{a-x}$$
$$\frac{18}{13}\ln(z+\sqrt{1+z^2}) = -\ln(a-x) + \ln c$$
$$z + \sqrt{1+z^2} = c(a-x)^{-13/18}$$
$$\text{Para } x = 0 \rightarrow y' = 0 \rightarrow z = 0; \quad 1 = ca^{-13/18} \therefore c = a^{13/18}$$

$$z + \sqrt{1+z^2} = a^{13/18}(1-\frac{x}{a})^{-13/18}a^{-13/18} = (1-\frac{x}{a})^{-13/18}$$
$$\sqrt{1+z^2} = (1-\frac{x}{a})^{-13/18} - z$$

Elevando al cuadrado: $1+z^2 = \left(1-\dfrac{x}{a}\right)^{-13/9} + z^2 - 2z\left(1-\dfrac{x}{a}\right)^{13/18}$

$$2z\left(1-\frac{x}{a}\right)^{-13/18} = \left(1-\frac{x}{a}\right)^{-13/9} - 1$$
$$2\frac{dy}{dx} = \left(1-\frac{x}{a}\right)^{-13/18} - \left(1-\frac{x}{a}\right)^{13/18}$$

Integrando: $2y = -\dfrac{18}{5}a\left(1-\dfrac{x}{a}\right)^{5/18} + \dfrac{18}{31}a\left(1-\dfrac{x}{a}\right)^{13/18} + c$

Para $x = 0 \rightarrow y = 0$

$$0=-\frac{18}{5}a+\frac{18}{31}a+c \quad y \quad c=\frac{18}{5}a-\frac{18}{31}a$$

$$c=\frac{468}{155}a$$

Para $x= \;\rightarrow y=\frac{c}{2}=\frac{234}{155}a,$ pero $a=1 \text{ km} \rightarrow y_L=\frac{234}{155}$ km

Como $t_L=\frac{1}{2.6}y_L=\frac{10}{26}\frac{234}{155}=\frac{18}{31}$ horas

la distancia será $t_L V_L=\frac{18}{31}(1.6)=\frac{144}{155}=0.93$ km

La braquistócrona

Queremos resbalar desde A hasta B, ¿cuánto tiempo tardaremos?
De acuerdo con la ley de caída, la velocidad v en cada punto depende solamente de la altura respectiva:

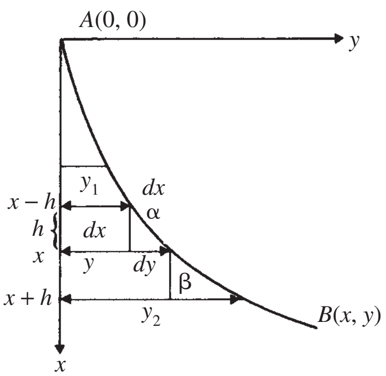


Figura 3-16.

$$v=\frac{ds}{dt}=\sqrt{2gx}, \quad dt=\frac{ds}{\sqrt{2gx}}$$

Ahora bien, $(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2=(dx)^2\left(1+\frac{(dy)^2}{(dx)^2}\right)=(dx)^2(1+y'^2)$

Elevando a la potencia ½:

$$ds=dx\sqrt{1+y'^2} \quad \text{entonces:} \quad dt=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gx}}dx$$

Integrando, se obtiene el tiempo total de caída desde A a B:

$$t=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^x\sqrt{\frac{1+y'^2}{x}}dx$$

Para diferenciales pequeños la curva puede sustituirse por la cuerda, entonces:

$$y'=\tan\alpha$$

$$t_1=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x-h}^{x}\frac{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}{\sqrt{x}}dx=\frac{1}{\cos\alpha\sqrt{2g}}\int_{x-h}^{x}\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

Añadamos otro diferencial, donde similarmente:

$$t_2=\frac{1}{\cos\beta\sqrt{2g}}\int_{x}^{x+h}\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

Sumando:

$$t_{1+2}=\frac{1}{\cos\alpha\sqrt{2g}}\int_{x-h}^{x}\frac{dx}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\cos\beta\sqrt{2g}}\int_{x}^{x+h}\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$=\frac{2}{\cos\alpha\sqrt{2g}}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-h}\right)+\frac{2}{\cos\beta\sqrt{2g}}\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)$$

Derivando en función de los ángulos e igualando a cero para obtener un mínimo:

$$\frac{2\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-h}\right)}{\sqrt{2g}\cos^2\alpha}\operatorname{sen}\alpha d\alpha+\frac{2\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{2g}\cos^2\beta}\operatorname{sen}\beta d\beta=0$$

$$\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-h}\right)\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos^2\alpha}=\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+h}\right)\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos^2\beta}d\beta$$

También tenemos:

$$\tan\alpha=\frac{y-y_1}{h}\qquad \tan\beta=\frac{y_2-y}{h}$$

Sumando:

$$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{y-y_1+y_2-y}{h}$$

$$h(\tan\alpha+\tan\beta)=y_2-y_1=\text{constante}$$

Diferenciando

$$\sec^2\alpha d\alpha+\sec^2\beta d\beta=0$$

y $\dfrac{d\alpha}{\cos^2\alpha}=-\dfrac{d\beta}{\cos^2\beta}$

de donde

$$\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-h}\right)\operatorname{sen}\alpha=\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\operatorname{sen}\beta$$

Multiplicando y dividiendo por el factor apropiado:

$$\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-h}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-h}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{x-h}}\operatorname{sen}\alpha=\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\operatorname{sen}\beta$$

$\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{x}+\sqrt{x-h}}=\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$; esta relación debe permanecer constante; por ejemplo, igual a $\dfrac{1}{\sqrt{2\alpha}}$

Tomando h suficientemente pequeño:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{2\sqrt{x}}=\frac{\operatorname{sen}\beta}{2\sqrt{x}}\text{ de ahí que: }\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}\beta$$

$$dy=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2\alpha}}ds\ \text{ como }\ ds=\sqrt{1+y'^2}dx$$

entonces $y'=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{2\alpha}}\sqrt{1+y'^2}$

de donde $y'=\sqrt{\dfrac{x}{2\alpha-x}}$ o sea: $x(1+x'^2)=2\alpha$

Cambiemos los ejes de coordenadas para que la ecuación adopte el aspecto clásico:

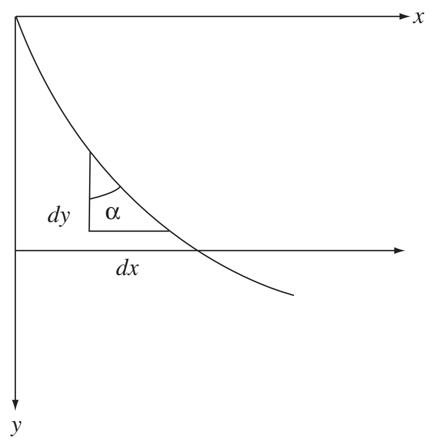


Figura 3-17.

$$y(1+y'^2)=c$$
$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{c-y}{y}}$$
$$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{c-y}}\,dy=dx$$

Sea: $\frac{dx}{dy}=\tan\alpha$

entonces, $\tan\alpha=\sqrt{\frac{y}{c-y}}$ $\quad y \quad$ $y=c\,\mathrm{sen}^2\alpha$

Diferenciando:

$$\begin{aligned}dy&=2c\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha\,d\alpha\\ dx&=\tan\alpha\,dy\\ &=\tan\alpha(2c\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha)d\alpha\\ &=c(1-\cos 2\alpha)d\alpha\end{aligned}$$

Integrando:

$$\begin{aligned}x&=\frac{c}{2}(2\alpha-\mathrm{sen}\,2\alpha)\\ y&=c\,\mathrm{sen}^2\alpha=c(1-\cos^2\alpha)\\ &=\frac{c}{2}(1-\cos 2\alpha)\end{aligned}$$

Tomando $\frac{c}{2}=a \quad y \quad 2\alpha=0$ tenemos:

$$\left.\begin{aligned}x&=a(\theta-\mathrm{sen}\,\theta)\\ y&=a(1-\cos\theta)\end{aligned}\right\}\text{ ecuaciones paramétricas de la cicloide}$$

HORIZONTALES

1. Matemático frances (1713-1765) autor de: *Teoría de la forma de la Tierra,* basada en los principios de la hidrostática. Tosco, inculto, grosero.
2. Lenguaje hablado antiguamente en Francia. Letras de pira en desorden. Metal precioso.
3. Símbolo del nitrógeno. Introduciré, fundare. Símbolo de la aceleración de la gravedad.
4. Palabra latina que significa: dada. Atormentar, afligir.
5. (Al revés). Segunda letra del alfabeto. Dudosa, insegura, indecisa. Sociedad anónima.
6. Fruto del nogal. ABONA en desorden. (Al revés). Camino, carril de hierro.
7. Existir. Símbolo del argón. Nombre de varón. Vocal.
8. Símbolo del aluminio. Fuerza que atrae los cuerpos al centro de la Tierra. Símbolo del azufre.
9. Parte resguardada artificialmente en aguas navegables. Dios de la mitología egipcia.
10. Símbolo del oxígeno. Época, temporada de larga duración. Infusión. Obra tejida de muchos hilos.
11. Dificultad que opone un conductor al paso de la corriente. Contracción de preposición y artículo.

VERTICALES

1. Aparato para acumular electricidad.
2. Símbolo del litio. Madre del padre o de la madre. Vocal.
3. (Al revés). Flor del tilo. Terminación de infinitivo. Animal doméstico.
4. Vocal. Planta gramínea. Letras de la palabra: gris.
5. En paz descanse, en latín. Exponente de una potencia indeterminada. Superficies.
6. Tranquilizarán, calmarán. Consonante.
7. Metal muy denso y radiactivo. Poeta.
8. Recta que toca a una curva en un punto. Preposición.
9. Aturdido, avergonzado. Símbolo del carbono.
10. Símbolo del número atómico. Con cuernos o astas (femenino, plural). Vocal.
11. Arteria principal. Publica, imprime.
12. Calenté, fastidié. Vocales. Nota musical.
13. Satélite de Júpiter descubierto por Galileo el 7 de enero de 1610. De esta manera. General romano y dictador oponente de Mario.
14. Vocal. Peligroso, enfermo, serio. Cloruro sódico.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1									■					
2				■					■	■				■
3		■											■	
4					■									
5			■									■		
6					■						■			
7				■			■						■	
8			■									■		■
9								■						
10		■				■			■	■				
11												■		

4 Ecuaciones diferenciales de orden superior

Leonard Euler
(1707-1783)

Ecuaciones diferenciales reducibles a ecuaciones de primer orden
Ecuaciones diferenciales lineales
Principio de superposición o linealidad
Dependencia e independencia lineal
Wronskiano
Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas
Ecuaciones de segundo orden con coeficientes constantes
Ecuación de Cauchy-Euler
Ecuaciones de orden arbitrario con coeficientes constantes
Ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de segundo orden
Método de coeficientes indeterminados para obtener y_p

Introducción

Euler se preguntó si no habría una forma más práctica para la expresión e^{ix}. ¿Cómo procedió?

Sea $z = ix$, entonces, $e^{ix} = e^z = \sum \frac{z^n}{n!}$

Por tanto, $\sum \frac{(ix)^n}{n!} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{ix^7}{7!} + \ldots$

Puesto que: $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$; $i^5 = i$; etcétera.

Entonces, $e^{ix} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \right)$

En donde reconocemos las series de dos importantes funciones trigonométricas, de ahí que: $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$

Similarmente: $e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x$

Estas son las famosas *fórmulas de Euler* que vamos a necesitar en este capítulo. Además, veremos algunas ecuaciones de orden superior a dos.

Ecuaciones diferenciales reducibles a ecuaciones de primer orden

Dada la ecuación diferencial lineal de segundo orden $y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$ es natural suponer que una forma de resolverla es integrar dos veces la ecuación. De hecho, así se realizará, sólo que se utilizará el cambio $z = y' \to z' = y''$ para que las constantes de integración aparezcan en su momento.

EJEMPLO 1

Dada la ecuación $xy'' = y'$, reducirla a una ecuación de primer orden y encontrar su solución.

Sea $z = y' \to z' = y''$

la ecuación es, entonces, $xz' = z$ de primer orden.

Integrando: $\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}$

$$ln\, z = ln\, x + ln\, c$$

o sea, $z = c_1 x dx$

Como $z = y' \to dy = c_1 x dx$, entonces, $y = c_1 \frac{x^2}{2} + c_2$.

Es la solución general de la ecuación lineal de segundo orden.

Comprobación: derivando la solución

$$y' = c_1 x$$

$$y'' = c_1$$

pero $c_1 = \frac{y'}{x} \to y'' = \frac{y'}{x}$ y $xy'' = y'$

EJEMPLO 2

Veremos algunas ecuaciones de segundo orden en las que no aparece explícitamente la variable independiente x, que pueden reducirse a primer orden y resolverse. Se hace la siguiente transformación:

Sea $y' = z \rightarrow y'' = \dfrac{d(y')}{dx} = \dfrac{dz}{dx}$

Usando la regla de la cadena:

$$y'' = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}z$$

entonces, en este caso, usaremos:

$$y' = z$$

$$y'' = z\frac{dz}{dx}$$

Aplicando al siguiente ejemplo:

$$y'' - yy' = y'$$

$$z\frac{dz}{dy} - yz = z$$

dividiendo entre z:

$$\frac{dz}{dx} = y + 1$$

$$dz = (y+1)dy$$

$$z = \frac{y^2}{2} + y + c_1$$

o sea, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{2} + y + c_1$

$$\frac{dy}{\frac{y^2}{2} + y + c_1} = dx$$

$$\frac{2dy}{y^2 + 2y + 2c_1} = dx$$

Completando el cuadrado en el denominador y tomando $2c_1 - 1 = {c_1}^2$:

$$\frac{2dy}{\left(y+1\right)^2 + {c_1}^2} = dx$$

$$\frac{2}{c_1}\tan^{-1}\frac{y+1}{c_1} = x + c_2$$

$$\frac{y+1}{c_1} = \tan(c_1 x + c_2)$$

$$y = c_1 \tan(c_1 x + c_2) - 1$$

Se comprueba como en el ejemplo anterior.

EJERCICIOS 4.1

Reducir el orden de las siguientes ecuaciones diferenciales y resolverlas:

		Respuestas
1.	$xy'' + y' = 0$	$y = c_1 \ln x + c_2$
2.	$(x-1)y'' - y' = 0$	$y = c_1 \dfrac{x^2}{2} - c_1 x + c_2$
3.	$x^2 y'' + x = 1$	$y = -\ln x(1+x) + x + c_1 x + c_2$
4.	$(x+1)y'' = y'$	$y = c_1 \dfrac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$
5.	$xy'' - y' = x$	$y = \dfrac{x^2}{2}\left(\ln x - \dfrac{1}{2}\right) + c_1 \dfrac{x^2}{2} + c_2$
6.	$y'' = \dfrac{y'^2}{y}$	$y = c_2 e^{c_1 x}$
7.	$yy'' + y'^2 = 0$	$\dfrac{y^2}{2} = c_1 x + c_2$
8.	$y'' - 2y(y')^3 = 0$	$\dfrac{y^3}{3} + c_1 y = c_2 - x$
9.	$2yy'' = y'^2 + 1$	$y = \dfrac{c_1}{4}(x + c_2)^2 + \dfrac{1}{c_1}$
10.	$(y-1)y'' = y'^2$	$y = c_2 e^{c_1 x} + 1$
11.	$xy'' + y' = xy'$	$y = c_1[\ln x + x + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^3}{18} + ...] + c_2$
12.	$y'' \tanh 3x - 3y' = 0$	$y = \dfrac{1}{3} c_1 \cosh 3x + c_2$
13.	$4xy'' + y' = 0$	$y = \dfrac{4}{3} c_1 x^{3/4} + c_2$
14.	$4y'' + y' = 0$	$y = c_1 e^{-x/4} + c_2$
15.	$xy'' - 3x^2 = 0$	$y = \dfrac{1}{2} x^3 + c_1 x + c_2$
16.	$2y' - xy'' = 0$	$y = \dfrac{c_1}{3} x^3 + c_2$
17.	$2y'' + y'^3 = 0$	$y = 2\sqrt{x + c_1} + c_2$
18.	$2 + \csc x y'' = 0$	$y = 2 \operatorname{sen} x + c_1 x + c_2$
19.	$y'' = 2y' y$	$y = c_1 \tan(c_1 x + c_2)$
20.	$y' - 4xy'' = 0$	$y = \dfrac{4}{5} c_1 x^{5/4} + c_2$
21.	$y'^2 - 2y'' = 0$	$y = -2\ln(x + c_1) + c_2$

22. $2y'' = e^{2x}y'^2$ $\qquad$ $y = -4[\frac{x}{c_1} - \frac{1}{2c_1}\ln(e^{2x} + c_1)] + c_2$

23. $6xy'' = y'$ $\qquad$ $y = \frac{6}{7}c_1 x^{7/6} + c_2$

24. $yy'' - y' = y'^2$ $\qquad$ $y = -2e^{-x} + 1$

$y(0) = -1; \quad y'(0) = 0$

Elegir la opción que contiene la solución de las ecuaciones de segundo orden reducibles a primer orden.

25. $yy'' = y'^2$

a. $y + c_1 = e^x + c_2$

b. $y = c_2 e^{c_1 x}$

c. $y = e^{c_1 x} + c_2$

d. $x\frac{y^2}{2} + c_1 y = -x + c_2$

26. $yy'' + y'^2 = 1$

a. $y^2 = x^2 + c_2$

b. $y^2 = c_1 + x^2$

c. $y^2 = x^2$

d. $y^2 - c_1 = (x + c_2)^2$

27. $4y'' = xy'^2$

a. $y = -\frac{8}{c_1}\tan^{-1}\left(\frac{x}{c_1}\right) + c_2$

b. $y = -\frac{8}{c_1}\tan^{-1}\left(\frac{x}{c_1}\right)$

c. $y = 8\ln(x + c_1)$

d. $y = 8\ln(x + c_1) + c_2$

28. $\frac{1}{3}y'' = y'\coth 3x$

a. $y = \frac{1}{3}\cosh 3x + c_1 x$

b. $y = c_1\cosh 3x + c_2$

c. $y = \frac{1}{3}\cosh 3x + c_1 x + c_2$

d. $y = -\frac{c_1}{3}\cosh 3x + c_2$

29. $-y'' = y'^2 4x$

a. $y = -\dfrac{1}{2}x^{-1} + c_1 x$

b. $y = 1/(2x^2 + c_1)$

c. $y = \dfrac{1}{c_1}\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{2}x}{c_1} + c_2$

d. $y = -\dfrac{1}{2}x^{-1} + c_1 x + c_2$

30. $y'^2 = \dfrac{1}{2}yy''$ para $y(0) = -1;\ y'(0) = 1$

a. $y = -\dfrac{1}{c_1 x + c_2}$

b. $y^3 = 3x - 1$

c. $y^3 = c_1 x + c_2$

d. $y = -\dfrac{1}{x+1}$

Respuestas:

25. *b.* La *a* y *c* están incorrectas porque se aplicaron mal las leyes logarítmicas y exponenciales. La *d* está mal porque tomó $z' = y''$ y se resolvieron de manera errónea las integrales, sin separar las variables y tomando algunas variables como constantes.

26. *d.* Las tres opciones restantes usan inadecuadamente las constantes de integración.

27. *a.* Las opciones *b* y *c* no tienen la constante c_2 y además el integrado en C se tomó como $\dfrac{1}{x + c_1}$. Este último error perdura en la opción *d*.

28. *b.* La opción *a* no respeta las leyes logarítmicas. La opción *c* tampoco y la *d* tiene el signo *x* y del cosh *x* son ambas positivas.

29. *c.* La opción *a* presenta la constante de integración de la primera integral como sumando, en vez de divisor y le falta la segunda constante correspondiente a la segunda integral. La opción *b* es y' en lugar de *y*. La opción *d* tiene el error de la constante c_1 de la opción *a*.

30. *d.* La opción *a* presenta la solución general, sin aplicar las condiciones iniciales. La opción *b* supone correcta la solución que presenta la opción *c* y le aplica las condiciones iniciales. La opción *c* contiene un error de separación de variables.

Ecuaciones diferenciales lineales

Definición 4.1

Ecuaciones diferenciales lineales.

Son de la forma:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=h(x)$$

con condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y'_0 \\ y''(x_0) &= y''_0 \\ &\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_0^{(n-1)} \end{aligned}$$

donde $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ son constantes arbitrarias.

Para $n = 2$, tenemos:

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = h(x)$$

$$\text{con} \quad y(x_0) = y_0$$

$$y'(x_0) = y'_0$$

dividiendo la ecuación por a_2:

$$y'' + \frac{a_1}{a_2}y' + \frac{a_0}{a_2}y = \frac{h(x)}{a_2}$$

como a_i, $i = 0, \ldots, n$ son funciones de x, podemos escribir:

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = (x)$$

que es la forma general de una ecuación diferencial lineal de segundo orden.

Si $r(x) = 0$ la ecuación se llama *lineal homogénea*.

Si $r(x) \neq 0$ la ecuación se llama *lineal no homogénea*.

EJEMPLO 1

La ecuación $xy'' + 5x^2 y' - x^2 y = 12x$ presentada en su forma más simple:

$$y'' + 5xy' - x^2 y = 12$$

es una ecuación diferencial lineal no homogénea.

La ecuación $y'' + 5xy' - x^2 y = 0$ es una ecuación diferencial lineal homogénea.

Una ecuación diferencial de segundo orden que no pueda escribirse en la forma $y'' + f(x)y' + g(x)y = r(x)$ es *no lineal*.

EJEMPLO 2

Son ecuaciones no lineales:

$$y'' + f(x)y\ y' + g(x)y = 0$$

$$y\ y'' + 4(y')^2 - 2y = x$$

$$y'' = \sqrt{1 - y'}$$

Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ se llaman coeficientes de la ecuación.

Definición 4.2

La función $y = h(x)$ se llama *solución* de la ecuación diferencial lineal (o no lineal) si está definida y es derivable n veces en algún intervalo de tal manera que al sustituirla en la ecuación (junto con sus derivadas) se obtenga una identidad.

EJEMPLO 1

Las funciones $y = e^x$ y $y = e^{-x}$ son soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea: $y'' - y = 0$, para toda x. Así:

$$y = e^x$$

$$y' = e^x$$

$$y'' = e^x$$

Sustituyendo en la ecuación dada, $e^x - e^x = 0$. De modo similar para:

$$y = e^{-x}$$

$$y' = e^{-x}$$

$$y'' = e^{-x}$$

Sustituyendo: $e^{-x} - e^{-x} = 0$.

EJEMPLO 2

Las funciones $y = e^x - 1$ y $y = e^{-x} - 1$ son soluciones de la ecuación diferencial lineal no homogénea: $y'' - y = 1$, pero las funciones: $y = e^x + e^{-x} - 2$ y $y = 3(e^x - 1)$ no son soluciones de esta ecuación.

EJEMPLO 3

Las funciones $y^2 = 2x$ y $y^2 = 4$ son soluciones de la ecuación diferencial no lineal:

$$y\,y'' + y'^2 = 0$$

sin embargo, la función $y = \sqrt{2x} + 2$ no es solución.

Principio de superposición o linealidad

Teorema 1. Principio de superposición o linealidad

Sean $y_1(x)$ y $y_2(x)$ soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea $y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$ en un intervalo, entonces, $y = c_1y_1(x)$, $y = c_2y_2(x)$ y $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ son también solución en el intervalo. Donde $c_1, c_2 \in R$.

DEMOSTRACIÓN:

$$y' = c_1y'_1 + c_2y'_2 \text{ y } y'' = c_1y''_1 + c_2y''_2$$

Entonces,

$$\begin{aligned} y'' + py' + qy &= (c_1y_1 + c_2y_2)'' + p(c_1y_1 + c_2y_2)' + q(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= (c_1y''_1 + c_2y''_2) + p(c_1y'_1 + c_2y'_2) + q(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= c_1(y''_1 + py'_1 + qy_1) + c_2(y''_2 + py'_2 + qy_2) \\ &= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

como y_1 y y_2 son soluciones, $y = c_1y_1 + c_2y_2$ es también solución.

COROLARIO: Una ecuación diferencial lineal homogénea siempre tiene una solución $y \equiv 0$, conocida como la solución trivial de la ecuación.

NOTA: Este teorema no se aplica si la ecuación no es homogénea (vea ejemplo 2) o no es lineal (vea ejemplo 3).

EJEMPLO 4

Tomando las soluciones de la ecuación diferencial del ejemplo 1, probaremos que la función $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$ es solución de $y'' - y = 0$.

Derivando y:

$$y' = c_1e^x - c_2e^{-x}$$

$$y'' = c_1e^x - c_2e^{-x}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$c_1e^x + c_2e^{-x} - c_1e^x - c_2e^{-x} = 0.$$

EJEMPLO 5

Las funciones $y_1 = e^x \cos\sqrt{3}x$ y $y_2 = e^x \text{sen}\sqrt{3}x$ son soluciones de la ecuación diferencial homogénea: $y'' - 2y' + 4y = 0$

Y $y = e^x(A \cos\sqrt{3}x + B \text{ sen}\sqrt{3}x)$ también es solución.

Verificamos derivando esta función y sustituyéndola en la ecuación diferencial dada:

$$y' = e^x(-\sqrt{3}A \text{ sen}\sqrt{3}x + \sqrt{3}B \cos\sqrt{3}x) + e^x(A \cos\sqrt{3}x + B \text{ sen}\sqrt{3}x)$$

$$y'' = e^x(-3A \cos\sqrt{3}x - 3B \text{ sen}\sqrt{3}x + e^x(-\sqrt{3}A \text{ sen}\sqrt{3}x)$$

$$+\sqrt{3}B \cos\sqrt{3}x) + e^x(-\sqrt{3}A \text{ sen}\sqrt{3}x + \sqrt{3}B \cos\sqrt{3}x)$$

$$+e^x(A \cos\sqrt{3}x + B \text{ sen}\sqrt{3}x)$$

$$\to -3A\ e^x \cos\sqrt{3}x - 3B\ e^x \text{ sen}\sqrt{3}x - \sqrt{3}A\ e^x \text{ sen}\sqrt{3}x$$

$$+ \sqrt{3}B\ e^x \cos\sqrt{3}x - \sqrt{3}A\ e^x \text{ sen}\sqrt{3}x + \sqrt{3}B\ e^x \cos\sqrt{3}x$$

$$+ Ae^x \cos\sqrt{3}x + Be^x \text{ sen}\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}A\ e^x \text{ sen}\sqrt{3}x$$

$$- 2\sqrt{3}B\ e^x \cos\sqrt{3}x - 2A\ e^x \cos\sqrt{3}x - 2B\ e^x \text{ sen}\sqrt{3}x$$

$$+4A\ e^x \cos\sqrt{3}x + 4B\ e^x \text{ sen}\sqrt{3}x = 0$$

$$e^x \cos\sqrt{3}x(-3A + \sqrt{3}B + \sqrt{3}B + A - 2\sqrt{3}B - 2A + 4A)$$

$$+ e^x \text{ sen}\sqrt{3}x(-3B + \sqrt{3}A - \sqrt{3}A + B + 2\sqrt{3}A - 2B + 4B) = 0$$

$\therefore$ Sí es solución.

Dependencia e independencia lineal

Definición 4.3

Dependencia lineal. Dos funciones $y_1(x)$, $y_2(x)$ son linealmente dependientes en un intervalo abierto, donde ambas están definidas, si son proporcionales en dicho intervalo, esto es, si $y_1 = k_1y_2$ o $y_2 = k_2y_1$ donde k_1 y k_2 son constantes $\neq 0$.

Definición 4.4

Independencia lineal. Si $y_1(x)$ y $y_2(x)$ no son proporcionales en el intervalo son linealmente independientes en el mismo.

CONSECUENCIA: Las funciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son linealmente dependientes en un intervalo $\leftrightarrow$ el cociente y_1/y_2 es una constante en el intervalo. Si y_1/y_2 depende de x en el intervalo $\rightarrow y_1$ y y_2 son linealmente independientes en él.

Definición 4.5

Las funciones $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ son *linealmente dependientes* en el intervalo (a, b) si al menos una de ellas puede expresarse como combinación lineal de las otras. En caso contrario, las funciones son linealmente independientes.

EJEMPLO 1

Las funciones: $y_1 = e^{-2x}$ y $y_2 = \frac{1}{4}e^{-2x}$ son linealmente dependientes, puesto que $\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{e^{-2x}}{\frac{1}{4}e^{-2x}} = 4$ y que es una constante.

Las funciones: $y_1 = e^{-2x}$ y $y_2 = e^{2x}$ son linealmente independientes, puesto que:

$\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{e^{-2x}}{e^{2x}} = e^{-4x}$, que no es una constante.

Teniendo en cuenta el principio de superposición podemos concluir que las funciones linealmente independientes entre sí pueden formar una combinación lineal del tipo:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

La *base* o *sistema fundamental* de solución de una ecuación diferencial en un intervalo está formado por n soluciones linealmente independientes.

EJEMPLO 2

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x}$$

es solución de la ecuación diferencial $y'' - 4y = 0$, y como e^{-2x} y e^{2x} son funciones linealmente independientes (vea ejemplo 1) forman un sistema fundamental de soluciones en el intervalo $-\infty < x < \infty$.

EJEMPLO 3

$y = c_1 x + c_2 |x|$ es una posible solución de $y'' + xy' - y = 0$ que consta de dos funciones:

$$y_1 = c_1 x, \quad y_2 = c_2 |x|$$

Estas funciones son linealmente dependientes en $x > 0$; se puede elegir $c_1 = -c_2$; pero son linealmente independientes en el intervalo $-\infty < x < \infty$, pues basta encontrar un punto en los reales en donde una de ellas no es múltiplo de la otra o elegir $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$.

$\therefore y_1$ y y_2 forman una base o sistema fundamental de soluciones de la ecuación dada.

EJEMPLO 4

$y = c_1 \ln x + c_2 \ln x^3$ consta de las funciones $\ln x$ y $\ln x^2$ que son linealmente dependientes en el intervalo $0 < x < \infty$; por tanto, no son base o sistema fundamental de soluciones.

Veamos: $\dfrac{\ln x}{\ln x^3} = \dfrac{\ln x}{3\ln x^3} = \dfrac{1}{3} =$ constante en $(0, \infty)$.

Wronskiano

Definición 4.6

Sean $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$, funciones que admiten derivadas hasta el orden $(n-1)$, continuas en el intervalo $a \le x \le b$.

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ & \cdot & & \\ & \cdot & & \\ & \cdot & & \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

se llama *wronskiano* de estas funciones.

Para el caso de tres funciones:

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$$

EJEMPLO 1

Hallar el *wronskiano* de las funciones:

$$y_1(x) = \cos x,\ y_2(x) = \operatorname{sen} x,\ y_3(x) = 1,$$

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x & 1 \\ -\operatorname{sen} x & \cos x & 0 \\ -\cos x & -\operatorname{sen} x & 0 \end{vmatrix} = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

EJEMPLO 2

Hallar el *wronskiano* de las funciones:

$$y_1(x)=e^{-5x},\ y_2(x)=e^{x},\ y_3=e^{2x}$$

$$W(y_1,y_2,y_3)=\begin{vmatrix} e^{-5x} & e^{x} & e^{2x} \\ -5e^{-5x} & e^{x} & 2e^{2x} \\ -25e^{-5x} & e^{x} & 4e^{2x} \end{vmatrix}=42e^{-2x}$$

EJEMPLO 3

Hallar el *wronskiano* de las funciones:

$$y_1=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right);\ y_2=\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right);y_3=\operatorname{sen}x$$

$$W\left(y_1,y_2,y_3\right)=\begin{vmatrix} \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) & \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right) & \operatorname{sen}x \\ -\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) & \cos x \\ -\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) & -\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right) & -\operatorname{sen}x \end{vmatrix}=0$$

porque el primero y el último renglones son proporcionales.

El *wronskiano* se usa para determinar si dos o más funciones son linealmente dependientes o independientes.

Teorema 2

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones continuas en $[a, b]$. Sean $y_1(x)$, $y_2(x)$ dos soluciones en $[a, b]$ de $y''+f(x)y'+g(x)y=0$, entonces, y_1 y y_2 son *linealmente independientes* en $\left[a,b\right]\leftrightarrow W(y_1,y_2)(x)\neq 0$ para toda $x\in\left[a,b\right]$. Este teorema se puede generalizar para ecuaciones diferenciales de orden n.

EJEMPLO 1

Las funciones de los anteriores ejemplos 1 y 2 son linealmente independientes en $(-\infty,\infty)$; las funciones del ejemplo 3 son linealmente dependientes en $(-\infty,\infty)$, porque si tomamos $c_1=1$; $c_2=0$ y $c_3=-1\rightarrow$ (1) sen x + (0) cos x + (−1)sen $x=0$.

Como encontramos $c_1\neq 0$ y $c_3\neq 0\rightarrow$ son linealmente dependientes en el intervalo.

NOTA: $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{sen}x$ *y* $\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$

Una secuencia en `Mathematica` que indaga si el conjunto de funciones $y_1 = 1 - 2\text{sen}^2 x$; $y_2 = \cos 2x$ es linealmente dependiente o independiente es:

```
rowone={1-2Sin[x]^2,Cos[2x]}
{1-2Sin[x]^2,Cos[2x]}
rowtwo=D[rowone,x]
{-4Cos[x]Sin[x],-2Sin[2x]}
matrix={rowone,rowtwo};MatrixForm[matrix]
( 1-2Sin[x]^2        Cos[2x]  )
( -4Cos[x]Sin[x]   -2Sin[2x]  )
wronskian=Det[matrix]
4Cos[x]Cos[2x]Sin[x]-2Sin[2x]+4Sin[x]^2Sin[2x]
Expand[wronskian,Trig→True]
0
```

El *wronskiano* puede ser cero, aun cuando las funciones consideradas en un cierto intervalo sean linealmente independientes en él.

EJEMPLO 2

Dadas las funciones $y_1(x) = x|x|$ y $y_2(x) = x^2$, probar que son linealmente independientes en $-1 \le x \le 1$, aunque su wronskiano es igual a cero.

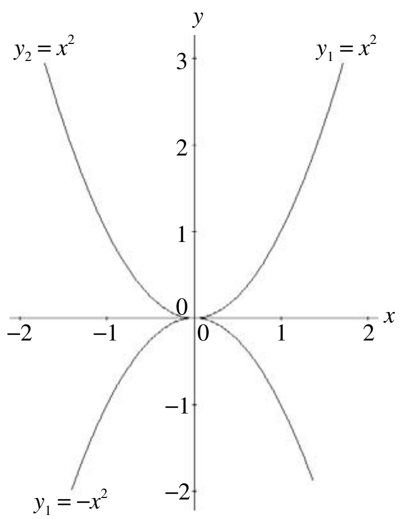


Figura 4-1.

$$y_1(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\ -x^2 & \text{si} \quad -1 \le x < 0 \end{cases}$$

$$y_2(x) = x^2 \qquad \text{si} \quad -1 \le x \le 1$$

En $[-1, 0]$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} -x^2 & x^2 \\ -2x & 2x \end{vmatrix} = 0$$

En $[0,1]$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x^2 & x^2 \\ 2x & 2x \end{vmatrix} = 0$$

$$\to W(y_1, y_2) = 0$$

en el intervalo $-1 \le x \le 1$. Vamos a suponer que son linealmente dependientes en el intervalo, entonces debemos encontrar dos constantes c_1 y c_2 no ambas cero, tales que:

$$c_1x|x| + c_2x^2 = 0 \quad \text{en} \quad -1 \le x \le 1$$

$$\rightarrow \text{en} \quad -1 \le x \le 0 \qquad -c_1x^2 + c_2x^2 = 0, \quad x^2(-c_1 + c_2) = 0$$

$$\text{en} \quad 0 \le x \le 1 \qquad c_1x^2 + c_2x^2 = 0, \quad x^2(c_1 + c_2) = 0$$

Para $c_1 \neq 0$ o $c_2 \neq 0$ este resultado es imposible. Esto prueba que las funciones son linealmente independientes en $-1 \le x \le 1$.

EJEMPLO 3

Dadas las funciones $y_1(x) = x|x|$ y $y_2(x) = x^2$ probar que son solución de la ecuación diferencial $x^2y'' - 2y = 0$.

Para $x > 0$.

$$\rightarrow y = c_1x^2 + c_2x^2$$
$$y' = 2c_1x + 2c_2x$$
$$y'' = 2c_1 + 2c_2$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$2c_1x^2 + 2c_2x^2 - 2c_1x^2 - 2c_2x^2 = 0$, sí es solución

Para $x < 0$.

$$\rightarrow y = -c_1x^2 + c_2x^2$$
$$y' = -2c_1x + 2c_2x$$
$$y'' = -2c_1 + 2c_2$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$-2c_1x^2 + 2c_2x^2 + 2c_1x^2 - 2c_2x^2 = 0$, sí es solución.

$\therefore y = c_1x|x| + c_2x^2$, es la solución general.

Además, acabamos de ver que son linealmente independientes y su $W = 0$; esto parece contradecir al teorema; sin embargo, observamos que la hipótesis del mismo no se cumple en este caso, puesto que $g(x)$ no es continua en un punto del intervalo; despejando y'' de nuestra ecuación:

$$y'' - \frac{2}{x^2}y = 0$$

$\rightarrow g(x) = -\dfrac{2}{x^2}$ es discontinua en $x = 0$.

Por lo tanto, no se puede aplicar dicho teorema.

EJEMPLO 4

Hallar la dependencia o independencia lineal de las siguientes soluciones de $y'' + 4y = 0$.

$$y_1 = \cos^2 x; \; y_2 = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

$$\rightarrow \frac{y_1}{y_2} = \frac{\cos 2x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{\cos 2x}{\cos 2x} = 1$$

El cociente es constante en $(-\infty, \infty)$; entonces, las funciones son linealmente dependientes en el intervalo (en realidad es la misma solución).

EJERCICIOS 4.2

Usando el principio de superposición, probar si las funciones dadas son solución de las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $y_1 = c_1 e^{-x}, y_2 = c_2 x e^{-x}$ de $y'' + 2y' + y = 0$
   Respuesta: sí.
2. $y_1 = c_1 e^{x},\ y_2 = c_2 x e^{x}$ de $y'' - 2y' + y = e^x$
   Respuesta: no, porque no es homogénea.
3. $y_1 = c_1 e^{-x} \cos 2x,\ y_2 = c_2 e^{-x} \operatorname{sen} 2x$ de $y'' + 2y' + 5y = 0$
   Respuesta: sí.
4. $y_1 = c_1 e^{x} \cos 2x,\ y_2 = c_2 e^{x} \operatorname{sen} 2x$ de $y'' - 2y' + 5y = \cos 2x$
   Respuesta: no, porque es homogénea.
5. $y_1 = c_1 e^{x/2},\ y_2 = c_2 e^{-x/5}$ de $10y'' - 3y' - y = 0$
   Respuesta: sí.
6. $y_1 = c_1 e^{x} 2^{x}, y_2 = 1$ de $yy'' = y'^2$
   Respuesta: no, porque no es lineal.

En los siguientes ejercicios, elegir la opción que contiene la solución de la ecuación diferencial dada, usando el principio de superposición para verificarla.

7. $x^2 y'' + xy' - \frac{1}{4} y = 0$
   a. $y_1 = c_1 x^{1/2},\ y_2 = c_2 x^{-1/2}$
   b. $y_1 = c_1 x^{3/2},\ y_2 = c_2 x^{-1/2}$
   c. $y_1 = c_1 x^{1/2},\ y_2 = c_2 x^{-3/2}$
   d. $y_1 = c_1 x^{3/2},\ y_2 = c_2 x^{-3/2}$
8. $y'' - 2y' + y = 0$
   a. $y_1 = c_1 e^{x},\ y_2 = c_2 e^{-x}$
   b. $y_1 = c_1 e^{x},\ y_2 = c_2 e^{x}$
   c. $y_1 = c_1 e^{x},\ y_2 = c_2 x e^{x}$
   d. $y_1 = c_1 e^{x},\ y_2 = c_2 e^{2x}$
9. $y'' - y = 0$
   a. $y_1 = c_1 e^{x},\ y_2 = c_2 e^{-x}$
   b. $y_1 = c_1 x e^{x},\ y_2 = c_2 x e^{x}$
   c. $y_1 = c_1 e^{x},\ y_2 = c_2 e^{3x}$
   d. $y_1 = c_1 e^{x},\ y_2 = c_2 e^{2x}$

10. $y'' - 3y' + 2y = 0$

a. $y_1 = c_1 e^{x}$, $y_2 = c_2 e^{-x}$

b. $y_1 = c_1 e^{-x}$, $y_2 = c_2 e^{-x}$

c. $y_1 = c_1 e^{x}$, $y_2 = c_2 x e^{x}$

d. $y_1 = c_1 e^{x}$, $y_2 = c_2 e^{2x}$

11. $y'' + y = 0$

a. $y_1 = c_1 \operatorname{sen} x$, $y_2 = c_2 \tan x$

b. $y_1 = c_1 \operatorname{sen} x$, $y_2 = c_2 \cos x$

c. $y_1 = c_1 \cos x$, $y_2 = c_2 \tan x$

d. $y_1 = c_1 x \operatorname{sen} x$, $y_2 = c_2 x$

12. $x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0$

a. $y_1 = c_1 x^{-1}$, $y_2 = c_2 x^{2}$

b. $y_1 = c_1 x^{-1}$, $y_2 = c_2 x^{-2}$

c. $y_1 = c_1 x$, $y_2 = c_2 x^{-2}$

d. $y_1 = c_1 x$, $y_2 = c_2 x^{2}$

13. $y'' + 4y = 0$

a. $y_1 = c_1 x \operatorname{sen} 2x$, $y_2 = c_2 \cos 2x$

b. $y_1 = c_1 \operatorname{sen} 2x$, $y_2 = c_2 x \cos 2x$

c. $y_1 = c_1 x \operatorname{sen} 2x$, $y_2 = c_2 x \cos 2x$

d. $y_1 = c_1 \operatorname{sen} 2x$, $y_2 = c_2 \cos 2x$

14. $y'' - 2y' + 2y = 0$

a. $y_1 = c_1 \operatorname{sen} x$, $y_2 = c_2 \cos x$

b. $y_1 = c_1 e^{x} \operatorname{sen} x$, $y_2 = c_2 \cos x$

c. $y_1 = c_1 e^{x} \operatorname{sen} x$, $y_2 = c_2 e^{x} \cos x$

d. $y_1 = c_1 \operatorname{sen} x$, $y_2 = c_2 e^{x} \cos x$

15. $x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0$

a. $y_1 = c_1 e^{x} \operatorname{sen} 3x$, $y_2 = c_2 \cos 3x$

b. $y_1 = c_1 e^{x}$, $y_2 = c_2 e^{x} \cos 3x$

c. $y_1 = c_1 \operatorname{sen} x$, $y_2 = c_2 e^{x}$

d. $y_1 = c_1 e^{x} \operatorname{sen} 3x$, $y_2 = c_2 e^{x} \cos 3x$

Respuestas:

7. *a*.

8. *c*. La opción *b* no puede formar una base de soluciones porque son LD, de hecho, es la misma solución. Las opciones *a* y *d* dan soluciones que pertenecen a otra ecuación diferencial. Los errores de los siguientes ejercicios son similares.

9. *a*. **10**. *d*. **11**. *b*. **12**. *b*. **13**. *d*. **14**. *c*. **15**. *d*.

Averiguar si las funciones dadas a continuación son linealmente independientes (LI) o linealmente dependientes (LD) en su dominio, usando las definiciones 4.3, 4.4 y 4.5.

16. $1, x, 2x$ LD
17. $7, x^2$ LI
18. $x-3, x+3$ LI
19. $6, x-3, x+3$ LD
20. $1, 4, x, x^2$ LD
21. $1, x^{-1}, x^{-2}$ LI
22. e^x, e^{-x} LI
23. e^x, e^{2x}, e^{3x} LI
24. $e^{-x}, xe^{-x}, x^2e^{-x}$ LI
25. $1, x, e^x$ LI
26. $e^{3x}, 4e^{3x}$ LD
27. $\ln x^2, \ln x^3$ LD
28. $x^2, e^{2\ln x}$ LD
29. $\ln x, x\ln x, x^2\ln x$ LI
30. $\operatorname{sen}2x, \cos 2x$ LI
31. $\operatorname{sen}x\cos x, \operatorname{sen}2x$ LD
32. $1, \operatorname{sen}^2x, \cos^2x$ LD
33. $\operatorname{sen}^2x, \cos^2x$ LI
34. $1, \operatorname{sen}^{-1}x, \cos^{-1}x$ LD
35. $\cosh x, e^x, e^{-x}$ LD
36. $1, \operatorname{senh}^2x, \cosh^2x$ LD

Encontrar el *wronskiano* de las funciones de los ejercicios 37 a 57.

37. $W(1, x, 2x) = 0$
38. $W(7, x^2) = 14x$
39. $W(x-3, x+3) = -6$
40. $W(6, x-3, x+3) = 0$
41. $W(1, 4, x, x^2) = 0$
42. $W(1, x^{-1}, x^{-2}) = -2x^{-6}$
43. $W(e^x, e^{-x}) = -2$
44. $W(e^x, e^{2x}, e^{3x}) = -7e^{6x}$
45. $W(e^{-x}, xe^{-x}, x^2e^{-x}) = 2e^{-3x}$
46. $W(1, x, e^x) = e^x$
47. $W(e^{3x}, 4e^{3x}) = 0$
48. $W(\ln x^2, \ln x^3) = 0$

49. $W(x^2, e^{2\ln x}) = 0$

50. $W(\ln x, x\ln x, x^2\ln x) = 2\ln^3 x$

51. $W(\operatorname{sen}2x, \cos 2x) = -2$

52. $W(\operatorname{sen}x \cos x, \operatorname{sen}2x) = 0$

53. $W(1, \operatorname{sen}^2 x, \cos^2 x) = 0$

54. $W(\operatorname{sen}^2 x, \cos^2 x) = -\operatorname{sen}2x$

55. $W(1, \operatorname{sen}^{-1} x, \cos^{-1} x) = 0$

56. $W(\cosh x, e^x, e^{-x}) = 0$

57. $W(1, \operatorname{senh}^2 x, \cosh^2 x) = 0$

En los siguientes ejercicios, determinar, mediante el *wronskiano*, si las funciones dadas son linealmente independientes o linealmente dependientes en el intervalo correspondiente.

58. $x+2,\ x^2+2x$, en $(-\infty, \infty)$
Respuesta: $W = (x+2)^2$ LI

59. $x+2,\ x,\ 1$, en $(-\infty, \infty)$
Respuesta: $W = 0$ LD

60. $e^{3x},\ e^x$, en $(-\infty, \infty)$
Respuesta: $W = -2e^{4x}$ LI

61. $3e^x,\ e^x$ en $(-\infty, \infty)$
Respuesta: $W = 0$ LD

62. $e^{-x},\ xe^{-x}$, en $(-\infty, \infty)$
Respuesta: $W = e^{-2x}$ LI

63. $\ln x,\ x\ln x$, en $(0, \infty)$
Respuesta: $W = \ln^2 x$ LI

64. $\ln x^5,\ 2\ln x$, en $(0, \infty)$
Respuesta: $W = 0$ LD

65. $x, \dfrac{1}{x}, x^2$, en $(0, \infty)$
Respuesta: $W = -\dfrac{6}{x};\ x \neq 0$ LI

66. $e^x,\ e^{-2x},\ e^{2x}$, en $(-\infty, \infty)$
Respuesta: $W = -12e^x$ LI

67. $1, \cos x$, en $(0, \pi)$
Respuesta: $W = -\operatorname{sen} x$ LI

68. $x+1, |x+1|$, en (2, 2)
Respuesta: en $(-2, -1)$ $W = 0$, en $(-1,2)$ $W = 0$ LI

69. $e^x \operatorname{sen}\dfrac{1}{2}x, e^x \cos\dfrac{1}{2}x$, en $(-\infty, \infty)$
Respuesta: $W = -\dfrac{1}{2}e^{2x}$ LI

70. $\operatorname{sen}hx,\ e^{-x}$ en $(-\infty,\ \infty)$

Respuesta: $W = -1$ LI

En los siguientes ejercicios elegir la opción que contiene soluciones linealmente independientes o linealmente dependientes mediante el *wronskiano* o a través de la definición 4.5.

71. $y_1 = x,\ y_2 = e^x$

a. LD porque en $x = 1$, el $W = 0$

b. LI porque $c_1x + c_2e^x = 0 \rightarrow c_1 = c_2 = 0$ en $(-\infty,\ \infty)$

c. LD porque $c_1x + c_2e^x = 0 \rightarrow c_1 =$ constante en $(-\infty,\ \infty)$

d. LI porque $W = 0$ en $x = 1$

72. $y_1 = 1,\ y_2 = x,\ y_3 = x + 1$, en $(-\infty,\ \infty)$

a. LD porque podemos encontrar $c_1 = 1,\ c_2 = -1,\ c_3 = 1$

b. LI porque $W = 0$

c. LD porque $W = 0$

d. LI porque $c_1 + c_2x + c_3(x + 1) = 0 \rightarrow\ c_1 = c_2 = c_3 = 0$

73. $y_1 = e^{x/2}, y_2 = xe^{x/2}, y_3 = x^2e^{x/2}$, en $(-\infty,\ \infty)$

a. LI porque $c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 = 0\ \rightarrow x = 0$

b. LD porque $W = 0$

c. LD porque $c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 = 0\ \rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$

d. LI porque $W = 2e^{3x/2} \neq 0$

74. $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$

a. LD porque $W = -3\ \neq 0$

b. LI porque $W = -3 \neq 0$

c. LI porque $y_2{}^2 + y_3{}^2 = \dfrac{1}{3}y_1$

d. LD porque $c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 = 0 \rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$

Respuestas:

71. *b*. La *a* falla porque el *wronskiano* puede ser cero cuando las funciones en el intervalo dado son LI como se comprueba por la definición $c_1x + c_2e^x = 0 \rightarrow c_1 = c_2 = 0$ en $(-\infty,\ \infty)$. La *c* representa el mismo error, pero dicho de otra manera. La *d* supone $W = 0$ para la independencia lineal y debería ser $W \neq 0$.

72. *c*. **73.** *d*. **74.** *b*. **75.** *a*.

Definición 4.7
La ecuación diferencial $y'' + f(x)y' + g(x)y = r(x)$ con las condiciones lineales iniciales $y(x_0) = y_0$; $y'(x_0) = y_0{}'$ donde y_0, y_0' son constantes arbitrarias se llama problema con valores iniciales.

Esta definición se extiende a una ecuación diferencial de orden n, con n condiciones iniciales.

EJEMPLO 1

Dado el siguiente problema con valores iniciales:

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \text{ con } y(0) = \frac{1}{7},\ y'(0) = \frac{3}{5}$$

comprobar que $y = c_1e^{2x} + c_2e^x$ es solución general y encontrar la solución particular para las condiciones iniciales dadas.

1. Para comprobar la solución general, la derivamos dos veces y la sustituimos en la ecuación diferencial para ver si resulta una identidad.

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^x$$
$$y' = 2c_1e^{2x} + c_2e^x$$
$$y'' = 4c_1e^{2x} + c_2e^x$$
$$\underbrace{4c_1e^{2x} + c_2e^x}_{y''} - \underbrace{6c_1e^{2x} - 3c_2e^x}_{3y'} + \underbrace{2c_1e^{2x} + 2c_2e^x}_{2y} = 0$$

Como 0 = 0, si es solución.

2. Aplicamos las condiciones iniciales en la solución y en su primera derivada:

$$\frac{1}{7} = c_1 + c_2$$
$$\frac{3}{5} = 2c_1 + c_2$$

Resolviendo el sistema tenemos:

$$c_1 = \frac{16}{35}$$
$$c_2 = -\frac{11}{35}$$

$\therefore\ y = \frac{16}{35}e^{2x} - \frac{11}{35}e^x$ es solución particular para las condiciones dadas y puede verificarse como la solución general.

Esta verificación también se puede hacer con `Mathematica` con los siguientes comandos.

```
DSolve[{y''[x]-3y'[x]+2y[x]==0,y[0]==1/7,y'[0]==3/5},y[x],x]
```

$$\left\{\{y[x] \to \frac{1}{35}e^{x}(-11+16e^{x}\}\right\}$$

Teorema 3. Existencia y unicidad de las soluciones

Sea el problema con valores iniciales

$$h(x)y'' + f(x)y' + g(x)y = r(x); \quad y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0,$$

donde $h(x)$, $f(x)$, $g(x)$ y $r(x)$ son continuas en un intervalo I, y sea $h(x) \neq 0$ para toda $x \in I$. Si $x = x_0$ es cualquier punto en este intervalo, entonces, la solución $y(x)$ del problema con valores iniciales *existe* y es *única* en el intervalo abierto I.

EJEMPLO 1

Fácilmente se verifica que $y = \frac{1}{50}e^{-5x} + \frac{49}{50}e^{5x} + \frac{1}{5}x$ es solución del problema con valores iniciales $y'' - 25y = -5x$, con $y(0) = 1$ y $y'(0) = 5$. Los coeficientes de la ecuación y $r(x) = -5x$ son funciones continuas en cualquier intervalo que contenga a $x_0 = 0 \to$ se concluye, por el teorema anterior, que la solución es *única*.

EJEMPLO 2

Tenemos $y = 2x^{-1} + 3x^{-1}\ln x + 2$, solución del problema con valores iniciales:

$$x^2y'' + 3xy' + y = 2$$

con $y(1) = 0$ y $y'(1) = 1$

donde x^2, $3x$, 1 y 2 son funciones continuas en todos los reales y $x = 1$ está en los reales. (Además, $x \neq 0$)

Por lo tanto, la solución es *única*.

La insistencia con la continuidad se debe a que en una función discontinua en algún punto puede, aparentemente, contradecir el teorema de existencia. Por ejemplo, la solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ en $y(0) = 0$, parece corresponder a $y = x$ y $y = -x$, como lo muestra `Mathematica`:

```
ivp=DSolve[{y'[x]==x/y[x],y[0]==0},y[x],x]
```

$\{\{\texttt{y[x]}\to-\sqrt{\texttt{x}^2}\},\{\texttt{y[x]}\to\sqrt{\texttt{x}^2}\}\}$

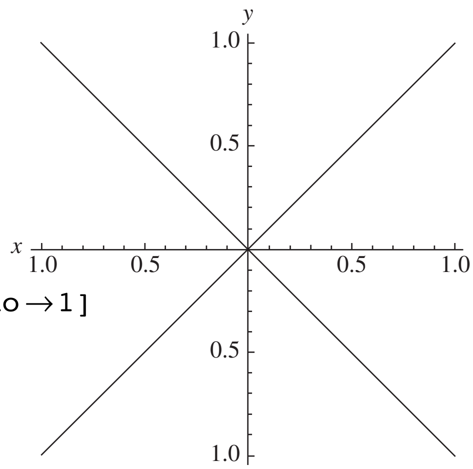
```
ivp[[1,1,2]]
```

$-\sqrt{\texttt{x}^2}$

```
ivp[[2,1,2]]
```

$\sqrt{\texttt{x}^2}$

```
Plot[{ivp[[1,1,2]],ivp[[2,1,2]]},{x,-1,1},AspectRatio→1]
```



Esta aparente contradicción se debe a que $\frac{x}{y}$ no es continua en el punto (0, 0).

Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas

1. Ecuaciones de *segundo orden* con coeficientes constantes.
2. Ecuación de Cauchy-Euler.
3. Ecuaciones de orden arbitrario con coeficientes constantes.

Ecuaciones de segundo orden con coeficientes constantes

Una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden, con coeficientes constantes a y b, tiene la forma $y'' + ay' + by = 0$.

En el capítulo 2 encontramos que la solución de $y' + f(x)y = 0$ resuelta por variables separables es $y = e^{-\int f(x)dx}$.

Si $f(x)$ es la constante k,

$\rightarrow y = e^{-\int kdx} = ce^{-kx}$ es *solución*.

Esto nos sugiere la posibilidad de que $y = ce^{-kx}$ también es solución de $y'' + ay' + by = 0$. Veamos, para facilitar el proceso tomemos:

$$y = ce^{-kx}, \text{ con } c = 1 \quad \text{y} \quad -k = \lambda$$

$$\rightarrow y = e^{\lambda x} \text{ es solución de } y' + ky = 0$$

Derivando esta solución:

$$y' = \lambda e^{\lambda x}$$

$$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

Sustituyéndola en $y'' + ay' + by = 0$.

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} be^{\lambda x} = 0$$

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0$$

Como $e^{\lambda x} \neq 0$, para toda $x \in (-\infty, \infty) \rightarrow \lambda^2 + a\lambda + b = 0$ es la ecuación auxiliar o característica de la ecuación diferencial de segundo orden, que nos va a dar dos raíces que utilizaremos en la solución.

Sabemos que $\lambda = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$

De ahí que si:

$a^2 - 4b > 0 \rightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2$ son *raíces reales*.

$a^2 - 4b = 0 \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ son *raíces reales e iguales*.

$a^2 - 4b < 0 \rightarrow \lambda = \alpha \pm i\beta$ son *raíces complejas*.

Estudiaremos tres casos:

CASO 1. Las raíces de la ecuación característica son *reales y diferentes*. $\rightarrow y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$, es solución general de la ecuación diferencial.

CASO 2. Las raíces de la ecuación característica son *reales e iguales*. $\rightarrow y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$, es solución general de la ecuación diferencial.

CASO 3. Las raíces de la ecuación característica son *complejas y conjugadas*. $\rightarrow y = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\,\mathrm{sen}\,\beta x)$ es solución general de la ecuación diferencial.

EJEMPLO 1

Sea la ecuación $y'' - 2y' - 3y = 0$ una ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes, cuya ecuación auxiliar o característica es:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0 \rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 3$$

$$\therefore \quad y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$$

es solución general.

EJEMPLO 2

Comprobar que la función $y = xe^{5x}$ es solución de la ecuación diferencial:

$$y'' - 10y' + 25y = 0$$

Sea $y = xe^{5x}$

$$y' = 5xe^{5x} + e^{5x}$$

$$y'' = 25xe^{5x} + 5e^{5x} + 5e^{5x}$$

sustituyendo

$$\underbrace{25xe^{5x} + 10e^{5x}}_{y''} - \underbrace{50xe^{5x} - 10e^{5x}}_{10y'} + \underbrace{25xe^{5x}}_{25y} = 0$$

Por lo que es solución.

Así que la solución general es $y = c_1 e^{5x} + c_2 x e^{5x}$

EJEMPLO 3

Encontrar la forma de la solución del caso 3 a partir de las raíces:

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta \quad \text{y} \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta$$

En este caso la solución de la ecuación diferencial $y'' + ay' + by = 0$ tiene la forma:

$$y = c_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha - i\beta)x}, \text{ de donde:}$$

$$y = c_1 e^{\alpha x} e^{i\beta^x} + c_2 e^{\alpha x} e^{-i\beta x}$$

$$y = e^{\alpha x}(c_1 e^{i\beta x} + c_2 e^{-i\beta x})$$

Usando las fórmulas de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \text{ sen } \theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i \text{ sen } \theta \text{ para } \theta \in R$$

$$\rightarrow y = e^{\alpha x}\left[c_1(\cos \beta x + i \text{ sen } \beta x) + c_2(\cos \beta x - i \text{ sen } \beta x)\right]$$

$$y = e^{\alpha x}\left[(c_1 + c_2)\cos \beta x + i(c_1 - c_2) \text{ sen } \beta x\right]$$

Como $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\text{sen } \beta x$ son LI forman un sistema fundamental de soluciones en $(-\infty, \infty)$, podemos tomar como constantes $A = c_1 + c_2$ y $B = i(c_1 - c_2)$.

$\therefore\ y = e^{\alpha x}(A\cos \beta x + B \text{ sen } \beta x)$, es solución general.

EJEMPLO 4

Encontrar la solución de la ecuación diferencial: $y'' + 2y' + \frac{5}{4}y = 0$

La ecuación auxiliar es: $\lambda^2 + 2\lambda + \frac{5}{4} = 0$

cuyas raíces son: $\lambda = -1 \pm \frac{1}{2}i$

$$\rightarrow \qquad \alpha = -1, \qquad \beta = \frac{1}{2},$$

$\therefore\ y = e^{-x}(A\cos\frac{1}{2}x + B\text{sen}\frac{1}{2}x)$, es la solución general.

En este tipo de soluciones, `Mathematica` identifica a A y B como las constantes c_1 y c_2. Para el ejemplo 4, la solución aparece como:

```
DSolve[{y''[x]+2y'[x]+5/4y[x]==0,y[x],x]
```

$$\left\{\{y[x] \rightarrow e^{-x}C[2]\text{Cos}\left[\frac{x}{2}\right] + e^{-x}C[1]\text{Sin}\left[\frac{x}{2}\right]\}\right\}$$

EJEMPLO 5

Hallar la solución de la ecuación diferencial: $y''+14y'+49y=0$, con las condiciones iniciales $y(0)=-2$, $y'(0)=10$.

La ecuación auxiliar es: $\lambda^2+14\lambda+49=0$

$$\rightarrow \quad (\lambda+7)^2=0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1=\lambda_2=-7$$

$\therefore\ y=c_1e^{-7x}+c_2xe^{-7x}$, es la solución general.

Aplicando las condiciones iniciales:

Tomando $y'=-7c_1e^{-7x}-7c_2x\ e^{-7x}+c_2\ e^{-7x}$

$$\rightarrow \qquad -2=c_1e^0+0$$
$$10=-7c_1e^0-0+c_2e^0$$
$$c_1=-2$$
$$10=-7c_1+c_2, \quad 10=14+c_2, \quad c_2=-4.$$

$\therefore\ y=-2e^{-7x}-4\ x\ e^{-7x}$, es la solución particular.

EJEMPLO 6

Dada la solución de una ecuación diferencial: $y=c_1\ e^{2x/5}+c_2x\ e^{2x/5}$, encontrar la ecuación diferencial.

Como $y=c_1\ e^{2x/5}+c_2\ x\ e^{2x/5}$

$$\rightarrow \qquad \lambda_1=\lambda_2=\frac{2}{5}$$

$(\lambda-\frac{2}{5})^2=0$, será la ecuación auxiliar

$$\lambda^2-\frac{4}{5}\lambda+\frac{4}{25}=0$$
$$\rightarrow \quad y''-\frac{4}{5}y'+\frac{4}{25}y=0$$

O bien, $25y''-20y'+4y=0$, que es la ecuación buscada.

Ecuación de Cauchy-Euler

Es de la forma $x^2y''+axy'+by=0$, donde $a,\ b\ \in R$. Para encontrar su solución, usamos la siguiente sustitución: $y=x^m$, y sus derivadas:

$$y'=m\ x^{m-1}$$
$$y''=m(m-1)x^{m-2}$$

Sustituyendo:

$$x^2 m\ (m-1)x^{m-2} + a\ x\ m\ x^{m-1} + bx^m = 0$$

$$m\ (m-1)x^m + a\ m\ x^m + bx^m = 0$$

$$x^m\left[m(m-1) + am + b\right] = 0$$

Como $x^m \neq 0,$ por ser la solución propuesta,

$$\rightarrow \qquad m(m-1) + am + b = 0$$

$$\text{y} \qquad m^2 + (a-1)m + b = 0$$

es la ecuación auxiliar cuyas raíces m_1 y m_2 si son *reales* y *diferentes* dan $y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}$ como solución general.

Si son *reales* e *iguales*: $m_1 = m_2 \rightarrow y = c_1 x^m + c_2(\ln x)x^m$ es solución general.

Si son complejas: $m = \alpha \pm i\beta \rightarrow y = x^a\left[A\cos(\ln x^\beta) + B\,\text{sen}(\ln x^\beta)\right]$ es solución general.

EJEMPLO 1

Resolver la siguiente ecuación de Cauchy-Euler: $x^2 y'' - xy' + 2y = 0.$

En esta ecuación tenemos: $a = -1$ y $b = 2.$

Su ecuación auxiliar es:

$$m^2 + (a-1)m + b = 0$$

$$\rightarrow \qquad m^2 - 2m + 2 = 0$$

$$m = 1 \pm i$$

$$\alpha = 1 \qquad \beta = 1$$

$\therefore\ y = x(A\cos\ln x + B\,\text{sen}\ln x)$, es la solución general.

EJEMPLO 2

Resolver: $x^2 y'' + 3xy' + y = 0$

$$a = 3,\ b = 1$$

La ecuación característica es:

$$m^2 + (a-1)m + b = 0$$

$$\rightarrow \qquad m^2 + 2m + 1 = 0$$

$$(m+1)^2 = 0$$

$$m_1 = m_2 = -1$$

$\therefore\ y = \dfrac{1}{x}(c_1 + c_2 \ln x)$ es solución general.

EJEMPLO 3

Resolver: $x^2y'' + xy' - y = 0.$

Usando la transformación $x = e^t$ para obtener su solución.

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\;\frac{dt}{dx}$ por la regla de la cadena.

Como $x = e^t \quad \rightarrow \quad t = \ln x$ y $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$

sustituyendo en la primera derivada, queda:

$$y' = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x}$$

volviendo a derivar con respecto a x:

$$y'' = \frac{dy}{dx}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x}\;\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{-1}{x^2}\;\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\;\frac{d^2y}{dt^2}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial dada:

$$x^2\left(-\frac{1}{x^2}\;\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\;\frac{d^2y}{dt^2}\right) + x\left(\frac{1}{x}\;\frac{dy}{dt}\right) - y = 0$$

$$-\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - y = 0$$

Cuya ecuación auxiliar es: $\lambda^2 - 1 = 0$

$$(\lambda + 1)(\lambda - 1) = 0$$

$$\therefore\; y = c_1e^{-t} + c_2e^t$$

que es la solución para la variable t,

pero $t = \ln x \;\rightarrow\; y = c_1e^{-\ln x} + c_2e^{\ln x}$

$\therefore\; y = c_1x^{-1} + c_2x$ es la solución general para la variable x.

EJEMPLO 4

Encontrar la ecuación diferencial que tiene como solución: $y = c_1x + c_2x^3$.

De aquí se sigue que:

$$m_1 = 1 \text{ y } m_2 = 3$$

$$\rightarrow\; (m-1)(m-3) = 0,\;\; m^2 - 4m + 3 = 0$$

Como la ecuación auxiliar tiene la forma $m^2 + (a-1)m + b = 0$

$$\rightarrow\; a - 1 = -4 \text{ y } b = 3 \;\;\rightarrow\; a = -3 \text{ y,}$$

$x^2y'' + axy' + by = 0$ se transforma en: $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0.$

EJERCICIOS 4.3

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden correspondientes a los casos 1, 2 y 3.

Respuestas:

1.	$y'' - \frac{5}{2}y' + y = 0$	$y = c_1e^{2x} + c_2e^{x/2}$
2.	$y'' - \frac{1}{2}y' + \frac{1}{16}y = 0$	$y = c_1e^{x/4} + c_2xe^{x/4}$
3.	$y'' + 2y' + 3y = 0$	$y = e^{-x}(A\cos\sqrt{2}x + B\ \text{sen}\sqrt{2}x)$
4.	$y'' - 2y' - 3y = 0$	$y = c_1e^{3x} + c_2e^{-x}$
5.	$y'' + 10y' + 25y = 0$	$y = c_1e^{-5x} + c_2xe^{-5x}$
6.	$y'' - 4y' + 13y = 0$	$y = e^{2x}(A\cos 3x + B\ \text{sen}\ 3x)$
7.	$16y'' + 16y' + 3y = 0$	$y = c_1e^{-x/4} + c_2e^{-3x/4}$
8.	$y'' + \frac{2}{3}y' + \frac{1}{9}y = 0$	$y = c_1e^{-x/3} + c_2x\ e^{-x/3}$
9.	$y'' - 6y' + 13y = 0$	$y = e^{3x}(A\cos 2x + B\ \text{sen}\ 2x)$
10.	$5y'' + 24y' - 5y = 0$	$y = c_1e^{x/5} + c_2e^{-5x}$
11.	$y'' - 2\sqrt{3}y' + 3y = 0$	$y = c_1e^{\sqrt{3}x} + c_2xe^{\sqrt{3}x}$
12.	$y'' - 8y' + 17y = 0$	$y = e^{4x}(A\cos x + B\ \text{sen}\ x)$
13.	$y'' - 8y' - 9y = 0$	$y = c_1e^{9x} + c_2e^{-x}$
14.	$y'' - \frac{4}{3}y' + \frac{4}{9}y = 0$	$y = c_1e^{2x/3} + c_2xe^{2x/3}$
15.	$y'' + 4y' + 5y = 0$	$y = e^{-2x}(A\cos x + B\ \text{sen}\ x)$

En los siguientes ejercicios elegir la opción que da la solución de:

16. $y'' + 6y' + 9y = 0$

a. $y = e^{-3x}\left[A\cos(-3x) + B\ \text{sen}(-3x)\right]$

b. $y = e^{-3x}\left[A\cos 3x + B\ \text{sen}\ 3x\right]$

c. $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{-3x}$

d. $y = c_1e^{-3x} + c_2xe^{-3x}$

17. $y'' - y' + \frac{5}{4}y = 0$

a. $y = c_1e^{x/2} + c_2e^{-x}$

b. $y = c_1e^{x/2} + c_2e^{x}$

c. $y = e^{x/2}(A\cos x + \text{sen}\, x)$

d. $y = e^{x/2}\left[A\cos(-x) + B\text{sen}(-x)\right]$

18. $y''+2y'+2y=0$

a. $y=e^{-x}\left(A\cos x+B\operatorname{sen} x\right)$

b. $y=e^{-x}\left[A\cos(-x)+B\operatorname{sen}(-x)\right]$

c. $y=c_1e^{-x}+c_2e^{x}$

d. $y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}$

19. $y''-6y'+8y=0$

a. $y=e^{2x}(A\cos 4x+B\operatorname{sen} 4x)$

b. $y=c_1e^{2x}+c_2e^{4x}$

c. $y=c_1e^{2x}+c_2xe^{4x}$

d. $y=e^{4x}\left(A\cos 2x+\operatorname{sen} 2x\right)$

20. $y''-2\pi y'+\pi^2y=0$

a. $y=c_1e^{\pi x}+c_2e^{\pi x}$

b. $y=e^{\pi x}\left(A\cos \pi x+B\operatorname{sen} \pi x\right)$

c. $y=c_1e^{-\pi x}+c_2xe^{-\pi x}$

d. $y=c_1e^{\pi x}+c_2xe^{\pi x}$

Respuestas:

16. *d.* Las otras tres opciones están mal pues suponen las formas de solución de los casos restantes y, además, la opción *a* tiene otro error: el ángulo no es negativo. Estas mismas razones sirven para los ejercicios siguientes.

17. *c.* **18.** *a.* **19.** *b.* **20.** *d.*

Hallar la ecuación diferencial correspondiente a cada una de las soluciones propuestas.

		Respuestas:
21.	$y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}$	$y''+2y'+y=0$
22.	$y=c_1e^{-x}+c_2e^{x/6}$	$6y''+5y'-y=0$
23.	$y=c_1e^{x}+c_2xe^{x}$	$y''-2y'+y=0$
24.	$y=e^{x}\left(A\cos 9x+B\operatorname{sen} 9x\right)$	$y''-2y'+82y=0$
25.	$y=e^{x}\left(A\cos\frac{x}{2}+B\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)$	$4y''-8y'+5y=0$
26.	$y=e^{-3x}\left(A\cos 2x+B\operatorname{sen} 2x\right)$	$y''+6y'+13y=0$
27.	$y=c_1e^{4x}+c_2xe^{4x}$	$y''-8y'+16y=0$
28.	$y=c_1e^{x/7}+c_2e^{2x/7}$	$49y''-21y'+2y=0$
29.	$y=c_1e^{2x/3}+c_2e^{x}$	$3y''-5y'+2y=0$
30.	$y=c_1e^{\sqrt{3}x}+c_2xe^{\sqrt{3}x}$	$y''-2\sqrt{3}y'+3y=0$

En los siguientes ejercicios, elegir la ecuación diferencial que corresponde a la solución dada:

31. $y = c_1 e^{-\sqrt{5}x} + c_2 x e^{-\sqrt{5}x}$

a. $y'' + 2\sqrt{5}y' + 5y = 0$

b. $y'' + 2\sqrt{5}y' - 5y = 0$

c. $y'' - 2\sqrt{5}y' + 5y = 0$

d. $y'' - 2\sqrt{5}y' - 5y = 0$

32. $y = e^{2x}\left(A\cos\frac{x}{3} + B\operatorname{sen}\frac{x}{3}\right)$

a. $9y'' + 36y' + 37y = 0$

b. $y'' - 4y' + 37y = 0$

c. $9y'' - 36y' + 37y = 0$

d. $y'' + 4y' + 37y = 0$

33. $y = c_1 e^{-2x/5} + c_2 e^{3x}$

a. $5y'' - 17y' - 6y = 0$

b. $5y'' - 13y' - 6y = 0$

c. $5y'' + 17y' + 6y = 0$

d. $5y'' - 17y' + 6y = 0$

34. $y = c_1 e^{6x} + c_2 x e^{6x}$

a. $y'' - 12y' + 36y = 0$

b. $y'' + 12y' + 36y = 0$

c. $y'' - 7y' + 6y = 0$

d. $y'' + 7y' + 6y = 0$

35. $y = c_1 e^{ex} + c_2 e^{x}$

a. $y'' + (e+1)y' + ey = 0$

b. $y'' + (e-1)y' - ey = 0$

c. $y'' - (e+1)y' + ey = 0$

d. $y'' - (e-1)y' - ey = 0$

Respuesta:

31. *a.* Las incorrectas se obtienen al cambiar los signos de las raíces de la ecuación auxiliar.

32. *c.* **33.** *b.* **34.** *a.* **35.** *c.*

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes para las condiciones iniciales dadas:

36. $y'' - y = 0$ para $y(0) = 0,\ y'(0) = -8$

Respuesta: $y = 4e^{-x} - 4e^{x}$

37. $y'' + 25y = 0$ $\quad y(0) = 0,\ y'\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1$

Respuesta: $y = -\frac{1}{5}\operatorname{sen} 5x$

38. $y'' - 16y = 0,$ $\quad y(0) = 2,\ y'(0) = 4$

Respuesta: $y = \frac{1}{2}e^{-4x} + \frac{3}{2}e^{4x}$

39. $y'' + 4y = 0,$ $\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$

Respuesta: $y = \cos 2x + \operatorname{sen} 2x$

40. $4y'' + 4\sqrt{3}y' + 3y = 0 \qquad y(0) = -1, \ \ y'(0) = \sqrt{3}$

Respuesta: $y = -e^{-\sqrt{3}x/2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} x e^{-\sqrt{3}x/2}$

41. $2y'' - 3y' - 2y = 0, \qquad y(0) = 0, \ \ y'(0) = 5/2$

Respuesta: $y = e^{2x} - e^{-x/2}$

42. $144y'' - 24y' + y = 0, \qquad y(0) = 4, \ \ y'(0) = 2$

Respuesta: $y = \left(4 + \dfrac{5}{3}x\right) e^{x/12}$

43. $y'' + 2y' + 8y = 0, \qquad y(0) = -2, \ \ y'(0) = 1$

Respuesta: $y = e^{-x}\left(-2\cos\sqrt{7}x - \dfrac{\sqrt{7}}{7}\operatorname{sen}\sqrt{7}x\right)$

44. $y'' - 2\sqrt{2}y' + 2y = 0, \qquad y(0) = \sqrt{2}, \ \ y'(0) = 0$

Respuesta: $y = \left(\sqrt{2} - 2x\right) e^{\sqrt{2}x}$

45. $25y'' - 30y' + 9y = 0, \qquad y(0) = \dfrac{5}{3}, \ \ y'(0) = 0$

Respuesta: $y = \left(\dfrac{5}{3} - x\right) e^{3x/5}$

Elegir la opción que contiene la solución particular de las siguientes ecuaciones:

46. $y'' + 49y = 0$ para $y(0) = 1, \ \ y'(0) = 7$

a. $y = 7\cos 7x + \dfrac{1}{7}\operatorname{sen} 7x$
b. $y = \cos 7x + \operatorname{sen} 7x$
c. $y = \cos 7x$
d. $y = \operatorname{sen} 7x$

47. $y'' - 6y' + 9y = 0$ para $y(0) = 3, \ \ y'(0) = 5$

a. $y = (5 - 12x)e^{3x}$
b. $y = 5e^{3x}$
c. $y = (3 - 4x)e^{3x}$
d. $y = (3 - 9x)e^{3x}$

48. $4y'' - 3y' - y = 0$ para $y(0) = -3, \ \ y'v(0) = -1$

a. $y = -\dfrac{8}{5}e^{-x/4} - \dfrac{7}{5}e^{x}$
b. $y = \dfrac{8}{5}e^{-x/4} - \dfrac{13}{5}e^{x}$
c. $y = \dfrac{8}{5}e^{-x/4} - \dfrac{7}{5}e^{x}$
d. $y = -\dfrac{8}{5}e^{-x/4} - \dfrac{13}{5}e^{x}$

49. $4y'' - 8y' + 5y = 0$ para $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

a. $y = \cos\frac{1}{2}x + 2\ \mathrm{sen}\frac{1}{2}x$

b. $y = 2\cos\frac{1}{2}x + \mathrm{sen}\frac{1}{2}x$

c. $y = e^{x}(2\cos\frac{1}{2}x + \mathrm{sen}\frac{1}{2}x)$

d. $y = e^{x}\cos\frac{1}{2}x$

50. $y'' + y' - 6y = 0$ para $y(0) = 0,\ y'(0) = 6$

a. $y = \frac{6}{5}e^{2x} - \frac{6}{5}e^{-3x}$

b. $y = \frac{18}{5}e^{2x} + \frac{12}{5}e^{-3x}$

c. $y = \frac{18}{5}e^{2x} - \frac{6}{5}e^{-3x}$

d. $y = \frac{6}{5}e^{2x} + \frac{6}{5}e^{-3x}$

Respuestas:

46. *b*. Las opciones equivocadas intercambian los valores de las condiciones iniciales o suponen otros.

47. *c*. **48.** *a*. **49.** *d*. **50.** *a*.

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de Cauchy-Euler:

	Respuestas:
51. $x^2y'' - 12y = 0$	$y = c_1x^4 + c_2x^{-3}$
52. $x^2y'' + \frac{2}{3}xy' - \frac{2}{9}y = 0$	$y = c_1x^{2/3} + c_2x^{-1/3}$
53. $x^2y'' + 2xy' - 12y = 0$	$y = c_1x^3 + c_2x^{-4}$
54. $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$	$y = x^{-2}(c_1 + c_2\ln x)$
55. $x^2y'' + 5xy' - 5y = 0$	$y = c_1x + c_2x^{-5}$
56. $x^2y'' + 8xy' + 10y = 0$	$y = c_1x^{-5} + c_2x^{-2}$
57. $x^2y'' - 3xy' + 5y = 0$	$y = x^2(A\cos\ln x + B\,\mathrm{sen}\ln x)$

Encontrar la ecuación diferencial correspondiente a la solución propuesta:

	Respuestas:
58. $y = c_1x^{-1} + c_2x^2$	$x^2y'' - 2y = 0$
59. $y = x^{-2}(A\cos\ln x^2 + B\,\mathrm{sen}\ln x^2)$	$x^2y'' + 5xy' + 8y = 0$
60. $y = x^3(c_1 + c_2\ln x)$	$x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$
61. $y = c_1x + c_2x\ln x$	$x^2y'' - xy' + y = 0$
62. $y = x^{-1}(A\cos\ln x^{1/2} + B\,\mathrm{sen}\ln x^{1/2})$	$x^2y'' + 3xy' + \frac{5}{4}y = 0$

63. $x^2y'' + 3xy' + y = 0, \qquad y(1) = 0, \; y'(1) = 4$

Respuesta: $y = \dfrac{4}{x}\ln x$

64. $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0 \qquad y(1) = 4, \; y'(1) = 0$

Respuesta: $y = \dfrac{8}{3}x + \dfrac{4}{3x^2}$

65. $x^2y'' + xy' - \dfrac{1}{4}y = 0, \qquad y(1) = 0, \; y'(1) = 1$

Respuesta: $y = -x^{-1/2} + x^{1/2}$

66. $9x^2y'' + 3xy' + y = 0, \qquad y(1) = 3, \; y'(1) = 0$

Respuesta: $y = x^{1/3}(3 - \ln x)$

67. $x^2y'' - xy' + 10y = 0, \qquad y(1) = 1, \; y'(1) = 1$

Respuesta: $y = x \cos \ln x^3$

68. $x^2y'' - xy' + 10y = 0, \qquad y(1) = 1, \; y'(1) = 1$

Respuesta: $y = -x^{-1/2} + 3x^{-1/3}$

Elegir en cada caso la opción correcta:

69. Qué contiene la solución de $25x^2y'' + 15xy' + y = 0$

a. $y = x^{-7}(A\cos\ln x^{4\sqrt{3}} + B\operatorname{sen}\ln x^{4\sqrt{3}})$

b. $y = c_1x^{1/5} + c_2x^{-1/5}$

c. $y = x^{1/5}(c_1 + c_2\ln x)$

d. $y = x^{-7}(c_1 + c_2\ln x)$

70. Qué contiene la solución de $x^2y'' + xy' + 4y = 0$

a. $y = x^{-1/2}(A\cos\ln x^{\sqrt{15}/2} + B\operatorname{sen}\ln x^{\sqrt{15}/2})$

b. $y = c_1 + c_2x^2$

c. $y = x^2(c_1 + c_2\ln x)$

d. $y = A\cos\ln x^2 + B\operatorname{sen}\ln x^2$

71. Qué contiene la solución de $x^2y'' + \dfrac{7}{2}xy' - \dfrac{3}{2}y = 0$

a. $y = c_1x^{x/2} + c_2x^{-3}$

b. $y = x^{1/2}(A\cos\ln x^3 + B\operatorname{sen}\ln x^3)$

c. $y = x^{-3}(A\cos\ln x^{1/2} + B\operatorname{sen}\ln x^{1/2})$

d. $y = x^{1/2}(c_1 + c_2x^{-3}\ln x)$

72. Qué contiene la ecuación diferencial correspondiente a la solución $y = c_{1x} + c_2x^5$.

a. $x^2y'' + 5xy' - 5y = 0$

b. $x^2y'' - 6xy' + 5y = 0$

c. $x^2y'' + 6xy' - 5y = 0$

d. $x^2y'' - 5xy' + 5y = 0$

73. Qué contiene la ecuación diferencial correspondiente a la solución $y = A$ cos ln $x + B$ sen ln x.

a. $x^2y'' + y = 0$
b. $x^2y'' - y = 0$
c. $x^2y'' + xy' + y = 0$
d. $x^2y'' - xy' - y = 0$

74. Qué contiene la ecuación diferencial correspondiente a la solución $y = x^{-4}(c_1 + c_2 \ln x)$.

a. $x^2y'' + 8xy' + 16y = 0$
b. $x^2y'' - 8xy' + 16y = 0$
c. $x^2y'' - 7xy' + 16y = 0$
d. $x^2y'' + 9xy' + 16y = 0$

75. Qué contiene la solución de la ecuación diferencial $x^2y'' - 6xy' + 12 = 0$ para las condiciones iniciales $y(1) = 1$, $y'(1) = 8$.

a. $y = 2x^3 - 6x^4$
b. $y = -4x^3 + 5x^4$
c. $y = 5x^3 + 2x^4$
d. $y = 2x^3 - 6x^4$

Respuestas:

69. *c*. **70.** *d*. **71.** *a*. **72.** *d*. **73.** *c*. **74.** *d*. **75.** *b*.

Todas las opciones erróneas son soluciones que satisfacen la ecuación, pero no las condiciones iniciales.

Ecuaciones de orden arbitrario con coeficientes constantes

Una ecuación diferencial con coeficientes constantes tiene la forma general:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

donde $a_i,\ \ i = 0, 1, \ldots, n$ son constantes.

Su ecuación auxiliar o característica es:

$$a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \ldots + a_2 m^2 + a_1 m^1 + a_0 = 0$$

que tendrá n raíces.

Estas raíces pueden ser, como en el caso de las de segundo orden, reales o complejas, iguales o distintas.

Si las raíces son *reales* y *distintas*, la solución es:

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \ldots + c_n e^{m_n x}$$

Si las raíces son *reales* e *iguales*, la solución es:

$$y = e^{mx}(c_1 + c_2x + c_3x^2 + \ldots + c_nx^{n-1})$$

Si las raíces son *reales* y de ellas unas son iguales y otras diferentes, se usan las dos leyes anteriores según el caso; así, supongamos seis raíces:

$$m_1 \neq m_2 = m_3 \neq m_4$$
$$m_1 \neq m_4 = m_5 = m_6$$

Entonces, la solución es $y = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x} + c_3xe^{\lambda_3 x} + c_4e^{\lambda_4 x} + c_5xe^{\lambda_5 x} + c_6x^2e^{\lambda_6 x}$
Si las raíces son *complejas*, para cada par conjugado la solución es:

$$y = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\operatorname{sen}\beta x)$$

Si hay otro par igual $\rightarrow y = e^{\alpha x}x(A\cos\beta x + B\operatorname{sen}\beta x)$ es solución, y así sucesivamente.

EJEMPLO 1

Resolver $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$

Su ecuación auxiliar es: $\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0$

cuya factorización es: $(\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0$

con raíces $\lambda_1 = -1; \lambda_2 = -2; \lambda_3 = -3$

$\therefore \; y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + c_3e^{-3x}$ es la solución general, como puede comprobarse fácilmente.

EJEMPLO 2

¿Cómo aparecieron las raíces de la ecuación $\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0$ del ejercicio anterior? Usamos división sintética; una vez que el coeficiente de la variable de mayor grado es 1, se buscan los divisores enteros del término independiente. Así:

$$6 = \begin{cases} (2)(3) \\ (-2)(-3) \\ (1)(6) \\ (-1)(-6) \end{cases}$$

Se elige uno de ellos, si el residuo de la operación es cero, el factor es correcto; si no da cero, hay que probar otro. Probemos el 6:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & 11 & 6 & \\ & +6 & +72 & +498 & 6 \\ \hline 1 & 12 & 83 & \neq 0 & \end{array}$$

no es divisor puesto que el residuo no es cero en la operación. Probemos el 3:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & 11 & 6 & \\ & +3 & +27 & +114 & 3 \\ \hline 1 & 9 & 38 & \neq 0 & \end{array}$$

Tampoco lo es. Probemos el –3:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & 11 & 6 & \\ & -3 & -9 & -6 & -3 \\ \hline 1 & 3 & 2 & 0 & \end{array}$$

¡Sí! Esto significa que $\lambda^3+6\lambda^2+11\lambda+6=\left(\lambda^2+3\lambda+2\right)(\lambda+3)$. Por último, $\lambda^3+6\lambda^2+11\lambda+6=(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)$ y $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=-2,\ \lambda_3=-3$.

Por supuesto, `Mathematica` puede encontrar las raíces con más eficiencia utilizando el comando `Solve`:

```
Solve[x^3+6x^2+11x+6==0]
{{x→-3},{x→-2},{x→-1}}
```

EJEMPLO 3

Resolver $y^{\text{iv}}+4y'''+10y''+12y'+5y=0$

Su ecuación auxiliar es $\lambda^4+4\lambda^3+10\lambda^2+12\lambda+5=0$

La factorización de este polinomio es $(\lambda+1)^2\left(\lambda^2+2\lambda+5\right)=0$

o sea, $(\lambda+1)^2(\lambda+1-2i)(\lambda+1+2i)=0$

Con $\lambda_1=\lambda_2=-1,\ \lambda_3=-1+2i,\ \lambda_4=-1+2i$

$\therefore\quad y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+e^{-x}(c_3\cos 2x+c_4\operatorname{sen}2x)$ es la solución general.

Por medio de `Mathematica`, las raíces del polinomio anterior son:

```
Solve[x^4+4x^3+10x^2+12x+5==0]
{{x→-1},{x→-1},{x→-1-2i},{x→-1+2i}}
```

EJEMPLO 4

Resolver $y^{\text{v}}+4y^{\text{iv}}+5y'''-6y'-4y=0.$ Su ecuación característica es polinomio de orden 5: $\lambda^5+4\lambda^4+5\lambda^3-6\lambda-4=0$

$$\begin{array}{rcccccc|c} & 1 & 4 & 5 & 0 & -6 & -4 & \\ & & -2 & -4 & -2 & 4 & 4 & -2 \\ \hline \text{de orden 4} & 1 & 2 & 1 & -2 & -2 & 0 & \end{array}$$

		-1	-1	0	2	-1
de orden 3	1	1	0	-2	0	

		$+1$	2	2	$+1$
de orden 2	1	2	2	0	

$$\to \lambda^5+4\lambda^4+5\lambda^3-6\lambda-4=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+2)\left(\lambda^2+2\lambda+2\right)$$
$$=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+1-i)(\lambda+1+i)$$

y las raíces son $\lambda_1=1,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=-2,\ \lambda_4=-1+i,\ \lambda_5=-1-i$
Así que la solución general es:

$$y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3e^{-2x}+e^{-x}(c_4\cos x+c_5\operatorname{sen} x)$$

EJEMPLO 5

Encontrar la ecuación diferencial cuya solución es:

$$y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3x^2e^x+c_4e^{2x}$$

Observamos que

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1 \quad \text{y} \quad \lambda_4=2$$
$$\to (\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-2)$$

y $\lambda^4-5\lambda^3+9\lambda^2-7\lambda+2=0$ es la ecuación auxiliar, por lo que:
$y^{\text{iv}}-5y'''+9y''-7y'+2y=0$ es la ecuación pedida.

EJERCICIOS 4.4

Hallar la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales:

	Respuestas:
1. $y'''-2y''-y'+2y=0$	$y=c_1e^{-x}+c_2e^x+c_3e^{2x}$
2. $y'''-3y''-y'+3y=0$	$y=c_1e^{-x}+c_2e^x+c_3e^{3x}$
3. $y'''-y''-4y'+4y=0$	$y=c_1e^x+c_2e^{-2x}+c_3e^{2x}$
4. $y'''-2y''-4y'+8y=0$	$y=c_1e^{-2x}+e^{2x}(c_2+c_3x)$
5. $y'''-6y''+12y'-8y=0$	$y=e^{2x}(c_1+c_2x+c_3x^2)$
6. $y'''+3y''+3y'+y=0$	$y=e^{-x}(c_1+c_2x+c_3x^2)$
7. $y'''-11y''+35y'-25y=0$	$y=c_1e^x+e^{5x}(c_2+c_3x)$
8. $y^{\text{iv}}-2y'''-3y''+4y'+4y=0$	$y=e^{-x}(c_1+c_2x)+e^{2x}(c_3+c_4x)$
9. $y^{\text{iv}}-4y'''+6y''-4y'+y=0$	$y=e^x(c_1+c_2x+c_3x^2+c_4x^3)$

10. $y^{\text{iv}} - 10y''' + 35y'' - 50y' + 24y = 0$ $\quad y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x} + c_4e^{4x}$

11. $y^{\text{iv}} - 2y'' + y = 0$ $\quad y = e^{-x}(c_1 + c_2x) + e^x(c_3 + c_4x)$

12. $y^{\text{iv}} - 5y''' + 9y'' - 7y' + 2y = 0$ $\quad y = e^x(c_1 + c_2x + c_3x^2) + c_4e^{2x}$

13. $y^{\text{iv}} + 2y''' - 2y' - y = 0$ $\quad y = e^{-x}(c_1 + c_2x + c_3x^2) + c_4e^x$

14. $y^{\text{iv}} - 4y''' + 7y'' - 6y' + 2y = 0$ $\quad y = e^x(c_1 + c_2x + c_3\cos x + c_4\operatorname{sen} x)$

15. $y^{\text{iv}} + 13y'' + 36y = 0$ $\quad y = A\cos 3x + B\operatorname{sen} 3x + C\cos 2x + D\operatorname{sen} 2x$

16. $y^{\text{iv}} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0$ $\quad y = e^x(A\cos x + B\operatorname{sen} x) + xe^x(C\cos x + D\operatorname{sen} x)$

Sugerencia: tome $\left(\lambda^2 - 2\lambda + 2\right)^2 = 0$

17. $y^{\text{iv}} + 5y'' + 4y = 0$ $\quad y = A\cos 2x + B\operatorname{sen} 2x + C\cos x + D\operatorname{sen} x$

Hallar la ecuación diferencial correspondiente a la solución dada:

18. $y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{-x}$ $\quad y''' - y'' - y' + y = 0$

19. $y = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x} + c_3x^2e^{3x}$ $\quad y''' - 9y'' + 27y' - 27y = 0$

20. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + c_3e^x$ $\quad y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$

21. $y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + c_3e^{5x}$ $\quad y''' - 9y'' + 24y' - 20y = 0$

22. $y = c_1e^{-x} + c_2e^x + c_3e^{6x}$ $\quad y''' - 6y'' - y' + 6y = 0$

23. $y = c_1e^{3x} + c_2\cos x + c_3\operatorname{sen} x$ $\quad y''' - 3y'' + y' - 3y = 0$

24. $y = c_1\cos 2x + c_2\operatorname{sen} 2x + c_3\cos 5x + c_4\operatorname{sen} 5x$ $\quad y^{\text{iv}} + 29y'' + 100y = 0$

25. $y = c_1\cos 3x + c_2\operatorname{sen} 3x + c_3e^x + c_4xe^x$ $\quad y^{\text{iv}} - 2y''' + 10y'' - 18y' + 9y = 0$

Resolver las siguientes ecuaciones para las condiciones iniciales dadas:

26. $y^{\text{iv}} - y = 0$ $\quad y(0) = 2; y'(0) = 1; y''(0) = 4; y'''(0) = -2$

Respuesta: $y = \frac{5}{4}e^{-x} + \frac{7}{4}e^x - \cos x + \frac{3}{2}\operatorname{sen} x$

27. $y^{\text{iv}} + 5y'' + 4y = 0$ $\quad y(\frac{\pi}{2}) = 0; y'(\frac{\pi}{2}) = 1; y''(\frac{\pi}{2}) = -1; y'''(\frac{\pi}{2}) = 0$

Respuesta: $y = -\frac{1}{3}\cos 2x + \frac{1}{6}\operatorname{sen} 2x - \frac{4}{3}\cos x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} x$

28. $y''' - 7y'' + 4y' + 12y = 0$ $\quad y(0) = 1; y'(0) = 0; y''(0) = 36$

Respuesta: $y = \frac{16}{7}e^{-x} - \frac{5}{2}e^{2x} + \frac{17}{14}e^{6x}$

29. $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$ $\quad y(0) = 5; y'(0) = 2; y''(0) = 0$

Respuesta: $y = e^{2x} + 4\cos x$

30. $y^{\text{iv}} + 2y'' + y = 0$ $\quad y(0) = 0; y'(0) = 0; y''(0) = 2; y'''(0) = -2$

Respuesta: $y = -\operatorname{sen} x + x\cos x + x\operatorname{sen} x$

Elegir la opción que contiene la respuesta correcta:

31. La solución de: $y^{\text{iv}} + 8y'' + 16y = 0$

a. $y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + c_3 e^{2x} + c_4 x e^{-2x}$
b. $y = (A\cos 2x + B\,\text{sen}\,2x)^2$
c. $y = A\cos 2x + B\,\text{sen}\,2x + Cx\cos 2x + Dx\,\text{sen}\,2x$
d. $y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + c_3 x^2 e^{-2x} + c_4 x^3 e^{-2x}$

32. La solución de: $y''' + 6y'' - 32y = 0$

a. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-4x} + c_3 x e^{-4x}$
b. $y = c_1 e^{2x} + c_2\cos 4x + c_3\,\text{sen}\,4x$
c. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-4x} + c_3 e^{4x}$
d. $y = c_1\cos 2x + c_2\,\text{sen}\,2x + c_3 e^{-4x}$

33. La ecuación diferencial correspondiente a la solución:
$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x/2} + c_3 e^{x/2}$

a. $4y''' - 4y'' + y' - y = 0$
b. $4y''' + 4y'' + y' + y = 0$
c. $4y''' + 4y'' - y' - y = 0$
d. $4y''' - 4y'' - y' + y = 0$

34. La ecuación diferencial correspondiente a la solución:
$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x/3} + c_3 x e^{-x/3}$

a. $9y''' + 15y'' + 7y' + y = 0$
b. $9y''' - 3y'' - 5y' - y = 0$
c. $9y''' - 15y'' + 7y' - y = 0$
d. $9y''' + 15y'' + 5y' + y = 0$

35. La solución particular de $y''' - y' - 3y = 0$ con las condiciones iniciales $y(0) = 2$; $y'(0) = 0$; $y''(0) = -6$

a. $y = e^{-x} + \dfrac{1}{2}e^{x} + \dfrac{1}{2}e^{-3x}$
b. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{-3x}$
c. $y = 3e^{-x} - e^{-3x}$
d. $y = \dfrac{3}{2}e^{x} + \dfrac{1}{2}e^{-3x}$

Respuestas:

31. *c.* Los errores provienen, en general, de mezclar los tipos de solución o de intercambiar los signos de las raíces de la ecuación auxiliar.

32. *a.* **33.** *d.* **34.** *b.*

35. *c.* La *b* representa la solución general, pero se pide la particular; por eso no es la respuesta correcta.

Ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de segundo orden

Una ecuación diferencial lineal *no homogénea* de coeficientes constantes, es de la forma: $y'' + f(x)\, y' + g(x)\, y = r(x)$, donde $f(x)$, y $g(x)$ son constantes (1).

La diferencia con las anteriores ecuaciones estudiadas estriba en que está igualada a una función de la variable independiente x. Esto nos sugiere una relación entre:

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0 \quad \text{y} \quad y'' + f(x)y' + g(x)y = r(x)$$

Llamaremos y_h a la solución general de la ecuación homogénea correspondiente y y_p a una solución particular de la *no homogénea* que podamos encontrar de alguna manera; entonces, se puede establecer el siguiente teorema:

Teorema 4

Si y_h es la solución general de $y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$ y y_p es cualquier solución particular de (1), entonces, $y = y_h + y_p$ es la solución general de (1).

DEMOSTRACIÓN: Supongamos $y = y_h + y_p$ es solución de (1):

$$\rightarrow y' = y_h' + y_p'$$
$$y'' = y_h' + y_p''$$

Sustituyendo en (1):

$$y_h'' + y_p'' + f(x)(y_h' + y_p') + g(x)(y_h + y_p) = r(x)$$

Agrupando:

$$(y_h'' + f(x)y_h' + g(x)y_h) + (y_p'' + f(x)y_p' + g(x)y_p) = r(x)$$

Como y_h es solución de la homogénea, el primer paréntesis se hace cero, y como y_p es solución de la no homogénea (1), el segundo paréntesis se convierte en $r(x)$, por lo que

$$0 + r(x) = r(x)$$

Por lo tanto, $y = y_h + y_p$ satisface a la ecuación (1).

Conocida la solución y_h por los métodos anteriores, el problema se reduce a encontrar la solución y_p para resolver las ecuaciones no homogéneas. Los métodos para encontrar y_p son: coeficientes indeterminados y variación de parámetros.

El método de variación de parámetros, llamado también *método general*, supone el cambio de las constantes c_1 y c_2 de la solución y_h, por funciones de x. El método de coeficientes indeterminados es más sencillo y se usa para ciertos tipos de la función $r(x)$.

Aquí, se centra la atención en la búsqueda de y_p; por lo que, para hallar y_h, se puede recurrir a `Mathematica`, con el comando `DSolve`. Por ejemplo, y_h de $y'' + 5y' - 6y = \text{sen}\, x$ es:

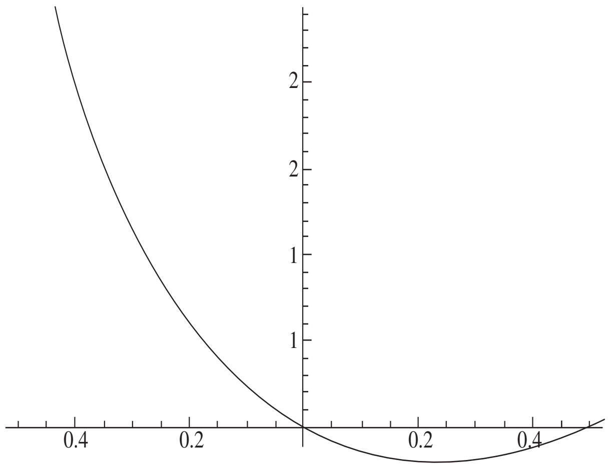
```
sol=DSolve[y''[x]+5*y'[x]-6y[x]==0,y,x]
{{y→Function[{x},e^-6x C[1]+e^x C[2]]}}
```

y con condiciones iniciales

```
sol1 = y[x]
       ─────────
       sol[[1]]
       /.{C[1]→2,C[2]→3}
2e^-6x+3e^x
```

cuya gráfica es:

```
Plot[{sol1},{x,-0.5,0.5}]
```



Método de coeficientes indeterminados para obtener y_p

Se usa para tres formas de $r(x)$: $r(x) =$ *polinomio,* $r(x) =$ *exponencial*, $r(x) =$ *función trigonométrica*, o combinaciones de ellas, que pueden resumirse, en forma general, de la siguiente manera:

$$r(x) = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\,\text{sen}\,\beta x]$$

Donde $\lambda = \alpha \pm i\beta$ es raíz de la ecuación auxiliar y $P_m(x)$ y $Q_n(x)$ son polinomios de grado m y n, respectivamente. Se busca una solución particular y_p de la forma:

$$y_p = x^z e^{\alpha x}[p_k(x)\cos\beta x + q_k(x)\text{sen}\,\beta x]$$

Donde $k = \text{máx}\ (m, n)$, $p_k(x)$ y $q_k(x)$ son polinomios en x de grado k, cuyos coeficientes están indeterminados, y z es la multiplicidad de la raíz $\lambda = \alpha \pm i\beta$ de la ecuación auxiliar. La forma de y_p, se puede resumir en el siguiente cuadro:

Forma de $r(x)$	Raíces de la ecuación auxiliar	Forma de y_p para $k = \text{máx}\ (m, n)$
$P_m(x)$	$\lambda_i \neq 0,\ i = 1, 2, \ldots, z$	$P_m(x)$
	Alguna $\lambda_i = 0$	$x^z P_m(x)$
$P_m(x)e^{\alpha x}$	α no es raíz	$P_m(x)e^{\alpha x}$
	α es raíz repetida z veces (de orden z)	$x^z p_m(x)e^{\alpha x}$
$P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\operatorname{sen}\beta x$	$\pm i\beta$ no son raíces	$p_k(x)\cos\beta x + q_k(x)\operatorname{sen}\beta x$
	$\pm i\beta$ son raíces de orden z	$x^z(p_k(x)\cos\beta x + q_k(x)\operatorname{sen}\beta x)$
$e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\operatorname{sen}\beta x]$	$\alpha \pm i\beta$ no son raíces	$e^{\alpha x}(p_k(x)\cos\beta x + q_k(x)\operatorname{sen}\beta x)$
	$\alpha \pm i\beta$ son raíces de orden z	$x^z e^{\alpha x}(p_k(x)\cos\beta x + q_k(x)\operatorname{sen}\beta x)$

EJEMPLO 1

Encontrar y_p dada la ecuación $y'' + 2y' + 4y = 5x^4 + 3x^2 - x$

$$\rightarrow r(x) = 5x^4 + 3x^2 - x \quad \text{y} \quad \lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0;\ \ \lambda = -1 \pm \sqrt{3}i$$

Por lo tanto, la solución y_p tendrá la forma de un polinomio de grado cuatro:

$$y_p = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$$

Nótese que aunque faltan términos del polinomio en $r(x)$, en la y_p deben aparecer todos.

El método consiste en derivar dos veces la y_p y sustituir y_p y sus derivadas en la ecuación dada, igualando después los coeficientes. Así:

$$y_p' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D$$

$$y_p'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C$$

Sustituyendo en la ecuación dada:

$$\underbrace{12Ax^2 + 6Bx + 2C}_{y''} + \underbrace{8Ax^3 + 6Bx^2 + 4Cx + 2D}_{2y'} + \underbrace{4Ax^4 + 4Bx^3 + 4Cx^2 + 4Dx + 4E}_{4y}$$
$$= 5x^4 + 3x^2 - x$$

Dado que los coeficientes del primer miembro de la igualdad han de ser igual a los coeficientes del segundo miembro, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$4A = 5$$
$$8A + 4B = 0$$
$$12A + 6B + 4C = 3$$
$$6B + 4C + 4D = -1$$
$$2C + 2D + 4E = 0$$

donde $A = \frac{5}{4}$; $B = -\frac{5}{2}$; $C = \frac{3}{4}$; $D = \frac{11}{4}$; $E = -\frac{7}{4}$

$$\therefore \quad y_p = \frac{5}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{11}{4}x - \frac{7}{4}$$

EJEMPLO 2

Encontrar y_p dada la ecuación $9y'' - 6y' + y = 9 - x^3$

$$\to y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \qquad \left(\lambda - \frac{1}{3}\right)^2 = 0$$

$$y_p' = 3Ax^2 + 2Bx + C$$
$$y_p'' = 6Ax + 2B$$

Sustituyendo:

$$\underbrace{54Ax + 18B}_{y''} - \underbrace{18Ax^2 - 12Bx - 6C}_{6y'} + \underbrace{Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}_{y} = 9 - x^3$$

Agrupando términos semejantes:

$$Ax^3 + (-18A + B)x^2 + (54A - 12B + C)x + (18B - 6C + D) = 9 - x^3$$
$$A = -1$$
$$-18A + B = 0$$
$$54A - 12B + C = 0$$
$$18B - 6C + D = 9$$
$$A = -1; \quad B = -18; \quad C = -162; \quad D = -639$$

$$\therefore \quad y_p = -x^3 - 18x^2 - 162x - 639$$

EJEMPLO 3

Encontrar y_p dada la ecuación $y'' - y = 8$

$$\to y_p = A$$
$$y_p' = 0$$
$$y_p'' = 0$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$0 - A = 8 \to A = -8$$

$$\therefore \quad y_p = -8$$

EJEMPLO 4

Hallar y_p de la ecuación diferencial $y'' + 4y = 2e^{-x}$

Observamos que $k = -1$

La ecuación auxiliar es: $\lambda^2 + 4 = 0$

con raíces $\lambda = \pm 2i$; $\lambda_1 = 2i$; $\lambda_2 = -2i$

Como $k \neq \lambda_1$ y $k \neq \lambda_2$, la solución y_p tiene la forma $y_p = Ae^{-x}$; usando el método de coeficientes indeterminados se hallan las derivadas, se sustituyen en la ecuación dada y se igualan los coeficientes:

$$y_p = Ae^{-x}$$

$$y_p' = -Ae^{-x}$$

$$y_p'' = Ae^{-x}$$

$$Ae^{-x} + 4Ae^{-x} = 2e^{-x}$$

$$5Ae^{-x} = 2e^{-x} \to 5A = 2; A = \frac{2}{5}$$

$$\therefore \quad y_p = \frac{2}{5}e^{-x}$$

EJEMPLO 5

Hallar y_p de la ecuación diferencial $y'' + y' - 6y = -5e^{2x}$ donde $k = 2$.

La ecuación auxiliar de la homogénea correspondiente es: $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$ con raíces $\lambda_1 = -3$ y $\lambda_2 = 2 \to \lambda_2 = k$; por tanto, la solución y_p tiene la forma $y_p = Axe^{2x}$.

Derivando:

$$y_p' = 2Axe^{2x} + Ae^{2x}$$

$$y_p'' = 4Axe^{2x} + 4Ae^{2x}$$

Sustituyendo en la ecuación no homogénea e igualando coeficientes:

$$4Axe^{2x} + 4Ae^{2x} + 2Axe^{2x} + Ae^{2x} - 6Axe^{2x} = -5e^{2x}$$

$$5A = -5 \to A = -1$$

$$\therefore \quad y_p = -xe^{2x}$$

EJEMPLO 6

Hallar y_p de la ecuación diferencial

$$y'' + 2y' + y = 3e^{-x}$$

donde $k = -1$ y la ecuación auxiliar de la homogénea correspondiente es:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 =$$
$$(\lambda + 1)^2 = 0$$
$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

Por tanto, y_p tiene la forma $y_p = Ax^2e^{-x}$

Derivando:

$$y_p' = -Ax^2e^{-x} + 2Axe^{-x}$$
$$y_p'' = Ax^2e^{-x} - 2Axe^{-x} + 2Ae^{-x} - 2Axe^{-x}$$

Sustituyendo en la ecuación dada:

$$Ax^2e^{-x} - 4Axe^{-x} + 2Ae^{-x} - 2Ax^2e^{-x} + 4Axe^{-x} + Ax^2e^{-x} = 3e^{-x}$$
$$2A = 3 \rightarrow A = \frac{3}{2}$$
$$\therefore \quad y_p = \frac{3}{2}x^2e^{-x}$$

EJEMPLO 7

Hallar y_p de la ecuación diferencial $y^{\text{iv}} - 5y''' + 9y'' - 7y' + 2y = 2e^x + x$

La ecuación homogénea correspondiente es:

$$y^{\text{iv}} - 5y''' + 9y'' - 7y' + 2y = 0$$

cuya ecuación característica es: $\lambda^4 - 5\lambda^3 + 9\lambda^2 - 7\lambda + 2 = 0$

con raíces $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ y $\lambda_4 = 2$

La parte exponencial de $r(x)$ con $k = 1$, sugiere una solución del tipo Ax^3e^x puesto que hay tres lambdas iguales a k, y la parte polinomial de $r(x)$ debe ser $Bx + C$ un polinomio de primer grado, entonces,

$$y_p = Ax^3e^x + Bx + C$$

Derivando:

$$y_p' = Ax^3e^x + 3Ax^2e^x + B$$
$$y_p'' = Ax^3e^x + 6Ax^2e^x + 6Axe^x$$
$$y_p''' = Ax^3e^x + 9Ax^2e^x + 18Axe^x + 6Ae^x$$
$$y_p^{\text{iv}} = Ax^3e^x + 12Ax^2e^x + 36Axe^x + 24Ae^x$$

Sustituyendo:

$$
\begin{array}{llllll}
 & Ax^3e^x & +12Ax^2e^x & +36Axe^x & +24Ae^x & \\
 & -5Ax^3e^x & -45Ax^2e^x & -90Axe^x & -30Ae^x & \\
 & +9Ax^3e^x & +54Ax^2e^x & +54Axe^x & & \\
 & -7Ax^3e^x & -21Ax^2e^x & & & -7B \\
 & +2Ax^3e^x & & & & +2C+2Bx=2e^x+x \\
\hline
 & 0 & 0 & 0 & -6Ae^x & +2Bx+2C-7B=2e^x+x
\end{array}
$$

$$-6A=2 \rightarrow A=-\frac{2}{3}$$

$$2B=1 \rightarrow B=\frac{1}{2}$$

$$2C-7B=0 \rightarrow C=\frac{7}{4}$$

$$\therefore \quad y_p=-\frac{1}{3}x^3e^x+\frac{1}{2}x+\frac{7}{4}$$

EJEMPLO 8

Hallar y_p de la ecuación diferencial:

$$y''-\frac{3}{2}y'-y=3\cos x$$

donde $m = 1$

La ecuación homogénea correspondiente es:

$$y''-\frac{3}{2}y'-y=0$$

y su auxiliar o característica es:

$$\lambda^2-\frac{3}{2}\lambda-1=0$$

con raíces

$$\lambda_1=2 \quad \text{y} \quad \lambda_2=-\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \lambda_1 \neq m \quad \text{y} \quad \lambda_2 \neq m$$

Por tanto, la forma de y_p es: $y_p = A\cos x + B\operatorname{sen} x$.

Derivando:

$$y_p'=-A\operatorname{sen} x+B\cos x$$

$$y_p''=-A\cos x-B\operatorname{sen} x$$

Sustituyendo:

$$-A\cos x - B\operatorname{sen} x + \frac{3}{2}A\operatorname{sen} x - \frac{3}{2}B\cos x - A\cos x - B\operatorname{sen} x = 3\cos x$$

$$(-A - \frac{3}{2}B - A)\cos x + (-B + \frac{3}{2}A - B)\operatorname{sen} x = 3\cos x$$

Igualando coeficientes:

$$-2A - \frac{3}{2} = 3$$

$$\frac{3}{2}A - 2B = 0$$

$$A = -\frac{24}{25} \quad \text{y} \quad B = -\frac{18}{25}$$

$$\therefore\ y_p = -\frac{24}{25}\cos x - \frac{18}{25}\operatorname{sen} x$$

EJEMPLO 9

Hallar y_p de la ecuación diferencial: $y'' + 4y = 12\operatorname{sen} 2x$

donde $m = 2$

La ecuación auxiliar de la homogénea es:

$$\lambda^4 + 4 = 0$$

con raíces: $\lambda = \pm 2i$, donde $\alpha = 0$ y $\beta = 2$

Como $m = \beta$, la solución y_p tendrá la forma:

$$y_p = x(A\cos 2x + B\operatorname{sen} 2x)$$

Derivando:

$$y_p' = x(-2A\operatorname{sen} 2x + 2B\cos 2x) + (A\cos 2x + B\operatorname{sen} 2x)$$

$$y_p'' = x(-4A\cos 2x - 4B\operatorname{sen} 2x) - 4A\operatorname{sen} 2x + 4B\cos 2x$$

Sustituyendo en la ecuación dada:

$$-4Ax\cos 2x - 4Bx\operatorname{sen} 2x - 4A\operatorname{sen} 2x + 4B\cos 2x$$
$$+4Ax\cos 2x + 4Bx\operatorname{sen} 2x = 12\operatorname{sen} 2x$$

Igualando coeficientes: $-4A = 12 \rightarrow A = -3;\ B = 0.$

$$\therefore\ \ y_p = -3x\cos 2x$$

EJEMPLO 10

Hallar y_p de la ecuación diferencial: $y'' - 2y' + y = 8\cos x$
donde $m = 1$.
La ecuación auxiliar de la homogénea correspondiente es:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$
$$(\lambda - 1)^2 = 0$$
$$\lambda_1 = \lambda_2 = m = 1$$
$$y_h = c_1 e^x + c_2\, x e^x$$

como $1 \neq \pm i$
tomamos $y_p = A\cos x + B\,\text{sen}\, x$
Derivando:

$$y_p' = -A\,\text{sen}\, x + B\cos x$$
$$y_p'' = -A\cos x - B\,\text{sen}\, x$$

Sustituyendo:

$$-A\cos x - B\,\text{sen}\, x + 2A\,\text{sen}\, x - 2B\cos x + A\cos x + B\,\text{sen}\, x = 8\cos x$$
$$-2B = 8 \to B = -4$$
$$2A = 0 \to A = 0$$
$$\therefore\ \ y_p = -4\,\text{sen}\, x$$

Comprobación:

$$y_p' = -4\cos x, \quad y_p'' = 4\,\text{sen}\, x$$
$$\to 4\,\text{sen}\, x + 8\cos x - 4\,\text{sen}\, x = 8\cos x$$

EJERCICIOS 4.5

Encontrar y_p mediante el método de coeficientes indeterminados.

	Respuestas:
1. $y'' + y = \text{sen}\, x$	$y_p = -\frac{1}{2}x\cos x$
2. $y'' + y = e^x + x$	$y_p = \frac{1}{2}e^x + x$
3. $y'' - 4y' + 2y = 5e^x$	$y_p = -5e^x$
4. $y'' - 3y' + y = 2e^x + e^{-x}$	$y_p = -2e^x + \frac{1}{5}e^{-x}$
5. $y'' + 6y' - 7y = 3e^{2x} - e^{-x}$	$y_p = \frac{1}{3}e^{2x} + \frac{1}{12}e^{-x}$
6. $y'' + y' - 12y = 8e^x + 7e^{3x}$	$y_p = -\frac{2}{3}e^{-x} + xe^{3x}$

7. $y'' - y' - 2y = 3e^{2x} - x^2$ $\quad y_p = xe^{2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$

8. $y'' + y = 2e^{-x} + 8x$ $\quad y_p = e^{-x} + 8x$

9. $y'' - y = 2e^{x} + 2e^{-x} + x$ $\quad y_p = xe^{x} - xe^{-x} - x$

10. $y'' - y = 8e^{-2x} + x^3 - 2x$ $\quad y_p = \frac{8}{3}e^{-2x} - x^3 - 4x$

11. $y'' - 9y = 9e^{3x} - 6x^4$ $\quad y_p = \frac{3}{2}xe^{3x} + \frac{2}{3}x^4 + \frac{8}{9}x^2 + \frac{16}{81}$

12. $y'' - 9y = 20\operatorname{sen} x + 3x^2$ $\quad y_p = -2\operatorname{sen} x - \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{27}$

13. $y'' - 2y' + y = 4\cos 3x - 2\operatorname{sen} 2x$ $\quad y_p = -\frac{8}{25}\cos 3x - \frac{6}{25}\operatorname{sen} 3x - \frac{8}{25}\cos 2x + \frac{6}{25}\operatorname{sen} 2x$

14. $y'' - 4y = 8\operatorname{sen} 2x$ $\quad y_p = -\operatorname{sen} 2x$

15. $y'' + 4y = 4\operatorname{sen} 2x$ $\quad y_p = -x\cos 2x$

16. $y'' + \frac{3}{5}y' - \frac{1}{5}y = \cos x + 5x^2$ $\quad y_p = -\frac{2}{3}\cos x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} x - 25x^2 - 150x - 700$

17. $y'' - 2y' + y = 8\cos x$ $\quad y_p = -4\operatorname{sen} x$

18. $y'' + 3y' + 9y = 12\operatorname{sen} x + 9x$ $\quad y_p = -\frac{36}{73}\cos x + \frac{96}{73}\operatorname{sen} x + x - \frac{1}{3}$

19. $y'' - 3y' - 9y = 4\cos 2x - 5e^{-x}$ $\quad y_p = -\frac{52}{205}\cos 2x - \frac{24}{205}\operatorname{sen} 2x + e^{-x}$

20. $y'' + y = 4\cos x - 2\operatorname{sen} x$ $\quad y_p = x\cos x + 2x\operatorname{sen} x$

21. $y'' + 4y = -16\operatorname{sen} 2x$ $\quad y_p = 4x\cos 2x$

22. $y'' - 2y' + 5y = 17\cos 2x + 15x$ $\quad y_p = \cos 2x - 4\operatorname{sen} 2x + 3x + \frac{6}{5}$

23. $y'' + 9y = 24\cos 3x - 16\operatorname{sen} x$ $\quad y_p = 4x\operatorname{sen} 3x - 2\operatorname{sen} x$

24. $y'' - y = -6\operatorname{sen} x + 10e^{x} - 7x^2 + 14$ $\quad y_p = 3\operatorname{sen} x + 5xe^{x} + 7x^2$

25. $y'' - 3y' - 10y = 50\cos 5x - 7e^{-2x} + 12e^{x} + 20x$ $\quad y_p = -\frac{35}{29}\cos 5x - \frac{15}{29}\operatorname{sen} 5x + xe^{-2x} - e^{x} - 2x + \frac{3}{5}$

Hallar la solución general:

26. $y'' - 4y' + 4y = 6e^{2x} + x$ $\quad y = e^{2x}(c_1 + c_2x + 3x^2) + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$

27. $y'' - 2y' + y = 6e^{x} + 8e^{-x} - 2$ $\quad y = c_1e^{x} + c_2xe^{x} + 3x^2e^{x} + 2e^{-x} - 2$

28. $y'' + 8y' = 48x^2 + 65\operatorname{sen} x$ $\quad y = c_1 + c_2e^{-8x} + 8\cos x - \operatorname{sen} x + 2x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{16}x$

29. $y'' - 2y' = 2e^{2x} + 4\cos 2x$ $\quad y = c_1 + c_2e^{2x} + xe^{2x} - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$

30. $y'' + 16y = -8\,\text{sen}\,4x + 17e^x$ $\quad y = A\cos 4x + B\,\text{sen}\,4x + x\cos 4x + e^x$

31. $y'' - 4y = -12e^{-2x} + 15\cos x + 8x$ $\quad y = c_1e^{-2x} + c_2e^{2x} + 3xe^{-2x} - 3\cos x - 2x$

32. $y'' + 6y' + 9y = 4e^{-3x} + 50\,\text{sen}\,x$ $\quad y = (c_1 + c_2x + 2x^2)e^{-3x} - 3\cos x + 4\,\text{sen}\,x$

33. $y''' - 2y'' - y' + 2y = -8e^x + 6e^{-x}$ $\quad y = c_1e^{-x} + c_2e^x + c_3e^{2x} + 4xe^x + xe^{-x}$

34. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 6e^{2x} + 16x^2$ $\quad y = (c_1 + c_2x + c_3x^2 + x^3)e^{2x} - 2x^2 - 6x - 6$

35. $y^{\text{iv}} - 16y = e^{2x} - 15\cos x$ $\quad y = c_1e^{-2x} + c_2e^{2x} + c_3\cos 2x + c_4\,\text{sen}\,2x + \frac{1}{32}xe^{2x} + \cos x$

Elegir la opción que contiene la solución general $y = y_h + y_p$ en los siguientes ejercicios:

36. $y'' - 4y' + 13y = -40\cos x + 13x$

a. $y = Ae^{2x}\cos 3x + Be^{2x}\text{sen}\,3x$

b. $y = Ae^{2x}\cos 3x + Be^{2x}\text{sen}\,3x + C\cos x + D\,\text{sen}\,x + Ex + F$

c. $y = e^{2x}(A\cos 3x + B\,\text{sen}\,3x) - 3\cos x + \text{sen}\,x + x + \dfrac{4}{13}$

d. $y = \text{sen}\,x - 3\cos x + x + \dfrac{4}{13}$

37. $y'' - 8y' - 9y = -10e^{-x} - 425\cos 2x$

a. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{9x} + xe^{-x} + 13\cos 2x + 16\,\text{sen}\,2x$

b. $y = xe^{-x} - \dfrac{13}{2}\cos 2x + \text{sen}\,2x$

c. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{9x} + xe^{-x} - \dfrac{13}{2}\cos x + \text{sen}\,2x$

d. $y = xe^{-x} + 13\cos 2x + 16\,\text{sen}\,2x$

38. $y'' - 2y' + y = 8e^x - \dfrac{1}{6}x^3 + 3x$

a. $y = (c_1 + c_2x + 4x^2)e^x - \dfrac{1}{6}x^3 + 3x$

b. $y = 4x^2e^x - \dfrac{1}{6}x^3 - x^2 + 2$

c. $y = c_1e^x + c_2e^x + 4x^2e^x - \dfrac{1}{6}x^3 + 3x$

d. $y = c_1e^x + c_2xe^x + 4x^2e^x - \dfrac{1}{6}x^3 - x^2 + 2$

39. $y'' + 2y' + y = 18e^{2x} - 4\,\text{sen}\,x - x^2$

a. $y = (c_1 + c_2x)e^{-x} + 18e^{2x} - 4\,\text{sen}\,x - x^2$

b. $y = (c_1 + c_2x)e^{-x} + 2e^{2x} + 2\cos x - x^2 + 4x - 6$

c. $y = 2e^{2x} + 2\cos x - x^2$

d. $y = e^{-x}(A\cos x + B\,\text{sen}\,x) + 2e^{2x} + 2\cos x - x^2$

40. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = -6e^x + 10\cos x$

a. $y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{2x} + \cos x + 2\,\text{sen}\,x$

b. $y = (c_1 + c_2x + 3x^2)e^x + c_3e^{2x} + \cos x + 2\,\text{sen}\,x$

c. $y = c_1e^x + c_2e^x + c_3e^{2x} + 3x^2e^x + \cos x + 2\,\text{sen}\,x$

d. $y = 3x^2e^x + \cos x + 2\,\text{sen}\,x$

Respuestas:

36. *c.* La opción *a* contiene solamente la y_h. La opción *d* contiene a y_p. La opción *b* debe tener especificados los valores de las constantes C, D, E y F.

37. *a.* La opción *b* tiene error en las derivadas de y_p y le falta y_h. La opción *c* tiene error en las derivadas de y_p. La opción *d* sólo tiene a y_p.

38. *d.* La opción *a* tiene equivocada la y_p. La opción *b* sólo contiene y_p, le falta y_h. La opción *c* tiene confundidas la y_p y la y_h.

39. *b.* La opción *a* en vez de y_p tiene a $r(x)$ como solución. La opción *c* tiene y_p con error y le falta y_h. La opción *d* tiene y_h en forma trigonométrica y las raíces de la ecuación auxiliar son reales; además, tiene a y_p con errores.

40. *b.* En la opción *a* le falta un término a y_p. En la opción *c* le falta una *x* al segundo término de la y_h, pues hay raíces iguales en la ecuación auxiliar. En la opción *d* falta la y_h.

Método general

Variación de parámetros para obtener y_p. Se usa para cualquier forma de $r(x)$. Sabemos que la solución general de una ecuación diferencial de la forma:

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0, \text{ es } y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \tag{1}$$

Si tenemos una ecuación no homogénea, es natural suponer que su solución y_p tiene algo que ver con (1), como observamos en el método anterior.

El cambio de parámetros que se va a realizar en (1) es

$$y = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$$

cambiando las constantes por funciones de *x*; y además vamos a pedir que

$$u'y_1 + v'y_2 = 0 \tag{2}$$

Pero, ¿qué forma han de tener $u(x)$ y $v(x)$ para que $y = uy_1 + vy_2$ sea la solución particular y_p de la ecuación $y'' + f(x)y' + g(x)y = r(x)$? Suponiendo que $y_p = uy_1 + vy_2$ es solución. Derivando:

$$y_p' = uy_1' + u'y_1 + vy_2' + v'y_2$$

Como tenemos la condición (2), entonces,

$$y_p' = uy_1' + vy_2'$$
$$y_p'' = uy_1'' + u'y_1' + vy_2'' + v'y_2'$$

Sustituyendo en la ecuación no homogénea:

$$\underbrace{uy_1'' + u'y_1' + vy_2'' + v'y_2'}_{y''} + \underbrace{f(x)(uy_1' + vy_2'}_{f(x)y'} + \underbrace{g(x)(uy_1 + vy_2)}_{g(x)y} = r(x)$$

Reacomodando términos y sacando como factor común a u y v:

$$u\underbrace{(y_1'' + f(x)y_1' + g(x)y_1}_{cero} + v\underbrace{(y_2'' + f(x)y_2' + g(x)y_2}_{cero} + u'y_1' + v'y_2' + r(x)$$

Lo que hay entre paréntesis se anula porque y_1 y y_2 son solución; entonces, $u'y_1' + v'y_2' = r(x)$, que junto con la suposición (2) forman un sistema de ecuaciones, cuyas incógnitas son u' y v'. Este sistema va a resolverse por la regla de Cramer. Entonces,

$$u'y_1 + v'y_2 = 0$$
$$u'y_1' + v'y_2' = r(x)$$

$$u' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ r(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = -\frac{y_2 r(x)}{W(y_1, y_2)}$$

$$v' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & r(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{y_1 r(x)}{W(y_1, y_2)}$$

Como y_1 y y_2 son LI en el intervalo; entonces, el *wronskiano* es diferente de cero en él; por lo tanto, existen u' y v'.

De tal manera:

$$u = -\int \frac{y_2 r(x)}{W} dx; \qquad v = \int \frac{y_1 r(x)}{W} dx$$

Concluimos que sí existe una solución de la forma $y_p = uy_1 + vy_2$:

$$y_p = -y_1 \int \frac{y_2 r(x)}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 r(x)}{W} dx$$

EJEMPLO 1

Hallar la solución particular y_p de la ecuación:

$$y'' - 3y' + 2y = e^x \operatorname{sen} x$$

La ecuación auxiliar $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ tiene las raíces $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$; por lo que, $y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$.

Sea $y_1 = e^x$ y $y_2 = e^{2x}$

$$\rightarrow W = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{3x} - e^{3x} = e^{3x}$$

$$\rightarrow y_p = -e^x \int \frac{e^{2x} e^x \operatorname{sen} x}{e^{3x}} dx + e^{2x} \int \frac{e^x e^x \operatorname{sen} x}{e^{3x}}$$

$$y_p = -e^x \int \operatorname{sen} x dx + e^{2x} \int e^{-x} \operatorname{sen} x dx$$

$$y_p = e^x \cos x + e^{2x} [-\frac{1}{2} e^{-x} (\operatorname{sen} x + \cos x)]$$

$$y_p = e^x \cos x - \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x + \cos x)$$

$$y_p = e^x [\cos x - \frac{1}{2} (\operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \cos x)]$$

$$y_p = \frac{1}{2} e^x (\cos x - \operatorname{sen} x)$$

Una solución por variación de parámetros utilizando `Mathematica`, se muestra en la ecuación diferencial:

$$y'' - 4y = \frac{1}{x^3 e^{4x}}$$

```
Clear[y1,y2,yc,yp,u1,u2]
{{m→-2},{m→2}}
Solve[m^2-4==0]
f[x]=Exp[-4x]/x3
```

$$\frac{e^{-4x}}{x^3}$$

```
y1[x_]=Exp[2x];
y2[x_]=Exp[-2x];
wronskian = Det[{{y1[x],y2[x]},{y1'[x]y2'[x]}}]
-4
u1prime = -y2[x]f[x]/wronskian
```

$$\frac{e^{-6x}}{4x^3}$$

```
u1[x]=Integrate[u1prime,x]
```

$$\frac{1}{4}(e^{-6x}\left(-\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{x}\right)+18\text{ExpIntegralEi}[-6x])$$

```
u2prime = y1[x]f[x]/wronskian
```

$$-\frac{e^{-6x}}{4x^3}$$

```
u2[x]=Integrate[u2prime,x]
```

$$\frac{1}{4}(-e^{-2x}\left(-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x}\right)-2\text{ExpIntegralEi}[-2x])$$

```
yp[x] = y1[x]u1[x] + y2[x]u2[x]
```

$$\frac{1}{4}e^{2x}(e^{-6x}\left(-\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{x}\right)+18\text{ExpIntegralEi}[-6x])+\frac{1}{4}e^{-2x}(-e^{-2x}\left(-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x}\right)$$
$$-2\text{ExpIntegralEi}[-2x])$$

```
yc[x] = c[1]Exp[-2x] + c[3]Exp[2x]
```

$$e^{-2x}c[1] + e^{2x}c[3]$$

```
y[x] = yp[x] + yc[x]
```

$$e^{-2x}c[1] + e^{2x}c[3]+\frac{1}{4}e^{2x}(e^{-6x}\left(-\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{x}\right)+18\text{ExpIntegralEi}[-6x])+\frac{1}{4}e^{-2x}$$
$$(-e^{-2x}\left(-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x}\right)-2\text{ExpIntegralEi}[-2x])$$

EJEMPLO 2

Resolver por variación de parámetros: $y''+y=\cos x$

Las raíces de la ecuación característica $\lambda^2+1=0$ son $\lambda=\pm i$ con $\alpha=0$ y $\beta=1$.

La solución de la ecuación homogénea correspondiente es:

$$y_h = A\cos x + B\,\text{sen}\,x$$

Sean $y_1=\cos x$, $y_2=\text{sen}\,x$

y $W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}\cos x & \text{sen}\,x\\ -\text{sen}\,x & \cos x\end{vmatrix}=\cos^2 x+\text{sen}^2 x=1$

$$\to y_p=-\cos x\int \text{sen}\,x\cos x\,dx+\text{sen}\,x\int\cos x\cos x\,dx$$

$$y_p=-\cos x\left(\frac{1}{2}\ \text{sen}^2 x\right)+\text{sen}\,x\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\ \text{sen}\,2x\right)$$

$$y_p=-\frac{1}{2}\ \text{sen}^2 x\cos x+\frac{1}{2}x\,\text{sen}\,x+\frac{1}{4}(2\,\text{sen}\,x\cos x)\,\text{sen}\,x$$

$$y_p=\frac{1}{2}x\,\text{sen}\,x$$

EJEMPLO 3

Qué forma han de tener u y v para que $y_p = uy_1 + vy_2$ sean solución de:

$$y'' - 8y' + 16y = xe^{4x}$$

Como $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 4$

Entonces, $y_h = c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x}$

Sean $y_1 = e^{4x}$, $y_2 = xe^{4x}$ y

$$W = \begin{vmatrix} e^{4x} & xe^{4x} \\ 4e^{4x} & 4xe^{4x} + e^{4x} \end{vmatrix} = 4xe^{8x} + e^{8x} - 4xe^{8x} = e^{8x}$$

$$u = -\int \frac{xe^{4x}\left(xe^{4x}\right)}{e^{8x}}dx = -\frac{x^3}{3} \rightarrow u = -\frac{x^3}{3}$$

$$v = \int \frac{e^{4x}\left(xe^{4x}\right)}{e^{8x}}dx = \frac{x^2}{2} \rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

COMPROBACIÓN:

$$y_p = -\frac{1}{3}x^3 e^{4x} + \frac{x^2}{2}xe^{4x}$$

$$y_p = +\frac{1}{6}x^3 e^{4x}$$

Derivando y sustituyendo en la ecuación dada:

$$y_p{}' = \frac{2}{3}x^3 e^{4x} + \frac{1}{2}x^2 e^{4x}$$

$$y_p{}'' = \frac{8}{3}x^3 e^{4x} + 4x^2 e^{4x} + xe^{4x}$$

$$\underbrace{\frac{8}{3}x^3 e^{4x} + 4x^2 e^{4x} + xe^{4x}}_{y''} - \underbrace{\frac{16}{3}x^3 e^{4x} - 4x^2 e^{4x}}_{8y'} + \underbrace{\frac{8}{3}x^3 e^{4x}}_{16y} = xe^{4x}$$

$$\therefore \; xe^{4x} = xe^{4x}$$

EJEMPLO 4

Resolver por variación de parámetros, la ecuación de Cauchy-Euler $x^2 y'' + 8xy' + 10y = x^{-1}\ln x$.

Su ecuación auxiliar es: $m^2 + 7m + 10 = 0$

con raíces $m_1 = -2$ y $m_2 = -5$.

$$\rightarrow y_h = c_1 x^{-5} + c_2 x^{-2} \qquad \text{y} \qquad r(x) = x^{-3}\ln x$$

Sean: $y_1 = x^{-5}$ y $y_2 = x^{-2}$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x^{-5} & x^{-2} \\ -5x^{-6} & -2x^{-3} \end{vmatrix} = -2x^{-8} + 5x^{-8} = 3x^{-8}$$

$$y_p = -x^{-5}\int \frac{x^{-2}x^{-3}\ln x}{3x^{-8}}dx + x^{-2}\int \frac{x^{-5}x^{-3}\ln x}{3x^{-8}}dx$$

$$= -\frac{x^{-5}}{3}\int x^3 \ln x dx + \frac{x^{-2}}{3}\int \ln x dx$$

$$= -\frac{x^{-5}}{3}\left(\frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{16}x^4\right) + \frac{x^{-2}}{3}(x\ln x - x)$$

$$= -\frac{x^{-1}}{12}\ln x + \frac{x^{-1}}{48} + \frac{x^{-1}}{3}\ln x - \frac{x^{-1}}{3} = \frac{1}{4}x^{-1}\ln x - \frac{15}{48}x^{-1}$$

$$= \frac{x^{-1}}{4}(\ln x - \frac{15}{12})$$

$$\therefore y_p = \frac{x^{-1}}{4}\left(\ln x - \frac{5}{4}\right)$$

La solución general será $y = y_h + y_p$

$$\to y = c_1 x^{-5} + c_2 x^{-2} + \frac{x^{-1}}{4}\left(\ln x - \frac{5}{4}\right)$$

EJERCICIOS 4.6

Encontrar la solución y_p mediante variación de parámetros:

1. $y'' - y' + \frac{5}{4}y = e^{x/2}\cos x$

Respuesta: $y_p = \frac{1}{2}e^{x/2}(x\,\text{sen}\,x)$

2. $y'' - 4y' + 3y = x^2 e^x$

Respuesta: $y_p = \frac{1}{24}e^x(-4x^3 - 6x^2 - 6x - 3)$

3. $y'' - 4y' + 3y = xe^{2x}$

Respuesta: $y_p = -xe^{2x}$

4. $y'' + 4y = 2\cos 2x$

Respuesta: $y_p = \frac{x}{2}\text{sen}2x$

5. $y'' + y' - 2y = 3xe^{4x}$

Respuesta: $y_p = \frac{1}{12}e^{4x}(2x - 1)$

6. $y'' + y' = x^2 e^{3x}$

Respuesta: $y_p = \frac{e^{3x}}{864}(72x^2 - 84x + 37)$

7. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}$

Respuesta: $y_p = -xe^{-x} + xe^{-x}\ln x$

8. $y'' - y = e^{2x}\,\text{sen}2x$

Respuesta: $y_p = \dfrac{1}{65}(-\text{sen}\,2x - 8\cos 2x)e^{2x}$

9. $y'' + y = -8x\cos x$

Respuesta: $y_p = -2x\cos x + \text{sen}\,x(1 - 2x^2)$

10. $y'' - y = e^x\cos x$

Respuesta: $y_p = \dfrac{e^{4x}}{2}(\text{sen}\,x - \cos x)$

11. $y'' - 4y' = 4xe^{4x}$

Respuesta: $y_p = \dfrac{e^{4x}}{16}(8x^2 - 4x + 1)$

12. $y'' + 9y' = 18e^x\,\text{sen}\,x$

Respuesta: $y_p = e^x\left(\dfrac{81}{101}\text{sen}\,x - \dfrac{99}{101}\cos x\right)$

13. $y'' - 9y' = 18x^2e^{9x}$

Respuesta: $y_p = \dfrac{2}{729}e^{9x}(243x^3 - 81x^2 + 18x - 2)$

14. $y'' - y = 4x^3e^x$

Respuesta: $y_p = e^x\left(\dfrac{1}{2}x^4 - x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{4}\right)$

Encontrar y_p en las siguientes ecuaciones de Cauchy-Euler por el método de variación de parámetros:

15. $x^2y'' - xy' = 4x^2e^x$

Respuesta: $y_p = 4e^x(x - 1)$

16. $x^2y'' - xy' + y = 2x$

Respuesta: $y_p = x(\ln x)^2$

17. $x^2y'' - 2xy' = 2y = 6x^3e^{2x}$

Respuesta: $y_p = \dfrac{3}{2}xe^{2x}$

18. $x^2y'' - xy' - 3y + 8x^4\,\text{sen}\,x$

Respuesta: $y_p = -8x^2\text{sen}\,x - 24x\cos x + 48\,\text{sen}\,x + 48\dfrac{\cos x}{x}$

19. $x^2y'' - xy' + 2y = x\ln x$

Respuesta: $y_p = x\ln x$

Encontrar la solución general $y = y_h + y_p$ de las siguientes ecuaciones:

20. $y'' - 4y' = 8xe^{3x}$

Respuesta: $y = c_1 + c_2e^{4x} - \dfrac{8}{3}xe^{3x} - \dfrac{16}{9}e^{3x}$

21. $y'' - y' - 6y = 5e^{2x}$ sen x

Respuesta: $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{3x} + e^{2x}\left(-\frac{15}{34}\cos x - \frac{25}{34}\operatorname{sen} x\right)$

22. $y'' - 2y' = 6xe^{2x}$

Respuesta: $y = c_1 + c_2e^{2x} + e^{2x}\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}\right)$

23. $y'' - y = 4e^x \cos x$

Respuesta: $y = c_1e^{-x} + c_2e^x + \frac{4}{5}e^x(2\operatorname{sen} x - \cos x)$

24. $y'' - 6y' + 5y = 8xe^{-x}$

Respuesta: $y = c_1e^x + c_2e^{5x} + e^{-x}\left(\frac{2}{3}x + \frac{4}{9}\right)$

En los siguientes ejercicios, resolver las ecuaciones para las condiciones iniciales dadas:

25. $y'' + 4y = 4\cos 2x;$ $y(0) = 1, y'(\frac{\pi}{2}) = 0$

Respuesta: $y = -\frac{\pi}{2}\operatorname{sen} 2x + \cos 2x + x\operatorname{sen} 2x$

26. $y'' - 4y' + 4y = \frac{2e^{2x}}{x};$ $y(1) = 0, y'(1) = 1$

Respuesta: $y = (2 - \frac{1}{e^2})e^{2x} + \frac{1}{e^2}xe^{2x} + 2xe^{2x}(\ln x - 1)$

27. $y'' - 3y' = 12e^{4x}(x+1);$ $y(0) = 0, y'(0) = 4$

Respuesta: $y = -\frac{7}{12} + \frac{4}{3}e^{3x} + 3xe^{4x} - \frac{3}{4}e^{4x}$

28. $y'' - 4y = 4x^2e^{2x};$ $y(0) = 0, y'(0) = 0$

Respuesta: $y = \frac{1}{32}e^{-2x} + e^{2x}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{8} - \frac{1}{32}\right)$

29. $y'' + y' - 6y = 10e^x\operatorname{sen} x;$ $y(0) = \frac{2}{17}, y'(0) = 0$

Respuesta: $y = \frac{91}{85}e^{2x} - \frac{6}{85}e^{-3x} + e^x\left(-\frac{25}{17}\operatorname{sen} x - \frac{15}{17}\cos x\right)$

30. $y'' - 8y' = -8xe^{-2x};$ $y(0) = \frac{144}{25},\ y'(0) = \frac{402}{25}$

Respuesta: $y = 4 + 2e^{8x} + e^{-2x}\left(-\frac{2}{5}x - \frac{6}{25}\right)$

31. $x^2y'' - 2y = 9x^3e^x;$ $y(1) = 9e, y'(1) = 1$

Respuesta: $y = -\frac{1}{3}x^{-1} + \frac{1}{3}x^2 + 9e^x\left(x - 2 + \frac{2}{x}\right)$

32. $x^2y'' + 3xy' + 2y = 2;$ $\quad y(1) = 1, y'(1) = 5$

Respuesta: $y = 5\dfrac{\operatorname{sen}\ln x}{x} + 1$

33. $x^2y'' - xy' = 6x^3 \operatorname{sen} x;$ $\quad y(0) = 0, y'(\frac{\pi}{2}) = \pi$

Respuesta: $y = 6 + x^2 - 6x\operatorname{sen} x - 6\cos x$

Elegir, en cada caso, la opción correcta.

34. La forma que han de tener $u(x)$ y $v(x)$ para que $y_p = uy_1 + vy_2$ sea solución de $y'' - 4y = e^{-2x}\operatorname{sen} x$.

a. $u = -\frac{1}{4}\cos x$ $\quad v = -\frac{1}{4}\operatorname{sen} x - \frac{1}{16}\cos x$

b. $u = -\frac{1}{4}\cos x$ $\quad v = e^{-4x}\left(-\frac{1}{4}\operatorname{sen} x - \frac{1}{16}\cos x\right)$

c. $u = \frac{1}{4}\cos x$ $\quad v = e^{-4x}\left(-\frac{1}{17}\operatorname{sen} x - \frac{1}{68}\cos x\right)$

d. $u = \frac{1}{4}\cos x$ $\quad v = \frac{1}{20}\left(-e^{-4x}\operatorname{sen} x - e^{-4x}\cos x\right)$

35. Reconocemos la y_p de: $y'' + y' = x^2e^x$

a. $y_p = c_1 + c_2e^{-x}$

b. $y_p = -e^{-x}$

c. $y_p = -e^x\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)$

d. $y_p = e^x\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}\right)$

36. Encontrar la solución general de: $y'' - 4y' = 8e^{6x}(x-1)$

a. $y = c_1 + c_2e^{4x} + e^{6x}\left(\frac{2}{3}x - \frac{10}{9}\right)$

b. $y = c_1 + c_2e^{4x}$

c. $y = c_1 + c_2e^{4x} - e^{6x}\left(\frac{x}{3} - \frac{7}{18}\right)$

d. $y = c_1 + c_2e^{4x} + e^{6x}\left(x - \frac{3}{2}\right)$

37. Resolver para las condiciones iniciales dadas: $y'' + y' - 2y = 9xe^{3x}$; $y(0) = 0.37$, $y'(0) = -0.01$.

a. $y = 0.126e^{-2x} + 0.244e^x$

b. $y = \frac{2}{3}e^{-2x} + \frac{1}{3}e^x + 3e^{3x}\left(\frac{3}{10}x - \frac{21}{100}\right)$

c. $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{x} + 3e^{3x}\left(\frac{3}{10}x - \frac{21}{100}\right)$

d. $y = e^{3x}\left(\frac{9}{10}x - \frac{63}{100}\right)$

38. Encontrar la solución general: $x^2y'' - 3xy' + 4y = 7x^4$

a. $y = c_1x^2 + c_2x^2 \ln x - 7x^2\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2\right)$

b. $y = c_1x^2 + c_2x^2 \ln x + \frac{7}{2}x^4 \ln x$

c. $y = c_1x^2 + c_2x^2 \ln x + \frac{7}{4}x^4$

d. $y = c_1x^2 + c_2x^2 \ln x$

39. Encontrar la función u para que $y = uy_1 + vy_2$ sea solución particular de: $x^2y'' - 2xy' + 2y = \ln^2 x - \ln x^2$ donde $y_1 = x$; $y_2 = x^2$

a. $u = -x^{-1}(\ln^2 x + 2\ln x + 2)$

b. $u = -x^{-1}(\ln x^2 + 2)$

c. $u = x^{-1}\ln^2 x$

d. $u = \frac{1}{2}\ln^2 x + \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{4}$

40. La solución general de la ecuación $x^2y'' - 2xy' + 2y = \ln^2 x - \ln x^2$ es:

a. $y = x^{-2}(-\frac{1}{2}\ln^2 x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{4})$

b. $y = c_1x + c_2x^2$

c. $y = \frac{1}{2}\ln^2 x + \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{4}$

d. $y = c_1x + c_2x^2 + \frac{1}{2}\ln^2 x + \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{4}$

Respuestas:

34. *c*. Dado que la función $u = -\int \frac{y_2r(x)}{W}dx$ y la función $v = \int \frac{y_1r(x)}{W}dx$ las opciones *a*, *b* y *d* contienen errores en cuanto a la aplicación correcta de las fórmulas o en el proceso de integración.

35. *d*. La opción *a* contiene a la y_h en vez de la y_p. La opción *b* es el *wronskiano* de $y_1 = 1$ y $y_2 = e^x$. La opción *c* presenta parte de la solución, es sólo vy_2, falta añadir uy_1

36. *a*. La opción *b* presenta a la solución general de la homogénea $y'' - 4y' = 0$. La opción *c* está incompleta, le falta añadir vy_2. La opción *d* también está incompleta, le falta añadir uy_1.

37. *b*. La opción *a* presenta la solución particular de la ecuación homogénea correspondiente. La opción *c* no aplica las condiciones iniciales, es la solución general. La opción *d* contiene y_p.

38. *c*. La opción *a* contiene y_h más una parte de $y_p = uy_1 + vy_2$ que es uy_1. La opción *b* contiene y_h más la otra parte de y_p, que es vy_2. A la opción *d* le falta añadir la y_p.

39. *c*. La opción *a* es el resultado de $\int x^{-2}\ln^2 x dx$. La opción *b* es el resultado de $\int x^{-2}\ln x^2 dx$. La opción *d* contiene, precisamente a y_p.

40. *d*. La opción *a* contiene a la función *v*. La opción *b* contiene a y_h. La opción *c* contiene a y_p.

Resumen

Ecuaciones de segundo orden reducibles a primer orden

1. Si la ecuación es de la forma $f(x, y', y'') = 0$, entonces, usamos $z = y'$; $z' = y''$.
2. Si la ecuación es de la forma $f(y, y', y'') = 0$, entonces, usamos $z = y'; z\dfrac{dz}{dy} = y''$.

La ecuación diferencial *lineal* de segundo orden tiene la forma: $y'' + f(x)y' + g(x)y = r(x)$.

- Si $r(x) \equiv 0 \rightarrow$ es *lineal homogénea.*
- Si $r(x) \neq 0 \rightarrow$ es *lineal no homogénea.*

Principio de superposición o linealidad

Sean y_1 y y_2 soluciones en un intervalo, y c_1 y c_2 constantes, entonces, $y = c_1y_1 + c_2y_2$, es solución en el intervalo de la ecuación homogénea $y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$.

Este principio *no* se aplica si la ecuación es *no lineal* o *no homogénea*.

Dependencia lineal

1. y_1, y_2 son LD en un intervalo si $y_1 = k_1y_2$ o $y_2 = k_2y_1$, con k_1, k_2 = constantes.
2. $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son LD en un intervalo si al menos una de ellas puede expresarse como combinación lineal de las otras.
3. Sistema fundamental, o base de soluciones, de una ecuación diferencial es la combinación lineal

$$Y = c_1y_1 + c_2y_2$$

Donde y_1, y_2 son LI en un intervalo.

4. El *wronskiano* de *n* funciones se define como el determinante de orden (*n*) de la matriz:

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

4. Sean $f(x)$ y $g(x)$ continuas en $[a, b]$

Sean y_1 y y_2 soluciones en $[a, b]$ de: $y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$

$$\rightarrow y_1 \text{ y } y_2 \text{ son LI en } [a,b]$$
$$\leftrightarrow W(y_1, y_2) \neq 0, \text{ para toda } x \in [a,b]$$

Problema con valores iniciales = ecuación diferencial + condiciones iniciales

Teorema de existencia y unicidad

$$h(x)y'' + f(x)y' + g(x)y = r(x), \text{ con } y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$$

Donde h, f, g y r son continuas en un intervalo I, y $h(x) \neq 0$. Si $x = x_0$ es cualquier punto en este intervalo, entonces, la solución $y(x)$ *existe* y es *única* en I.

Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas

1. De segundo orden con coeficientes constantes. Son de la forma: $y'' + ay' + by = 0$; a, b = constantes, cuya ecuación auxiliar o característica es: $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$.

$$\text{Si } \begin{cases} a^2 - 4b > 0 \rightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2 & \textit{raíces reales diferentes.} \\ a^2 - 4b = 0 \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 & \textit{raíces reales iguales.} \\ a^2 - 4b < 0 \rightarrow \lambda = \alpha \pm i\beta & \textit{raíces complejas.} \end{cases}$$

Solución general:

Caso 1. $\lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \rightarrow y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

Caso 2. $\lambda_1 = \lambda_2 \quad \rightarrow y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$

Caso 3. $\lambda = \alpha \pm i\beta \rightarrow y = e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \text{ sen } \beta x)$

2. **Ecuación de Cauchy-Euler**. Es de la forma:

$$x^2 y'' + axy' + by = 0; \quad a, b \in R.$$

Ecuación auxiliar o característica $m^2 + (a-1)m + b = 0$

Solución general:

Caso 1. $m_1 \neq m_2 \quad \rightarrow y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}$

Caso 2. $m_1 = m_2 \quad \rightarrow y = c_1 x^m + c_2 (\ln x) x^m$

Caso 3. $m = \alpha \pm i\beta \rightarrow y = x^{\alpha}(A \cos \ln x^{\beta} + B \text{ sen} \ln x^{\beta})$

Formas para encontrar la solución:
a. Suponer una solución de la forma $y = x^m$
b. Usar la transformación $x = e^t$

3. **Ecuaciones de orden arbitrario con coeficientes constantes**.

Son de la forma $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0.$

Ecuación auxiliar: $a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + ... + a_2 m^2 + a_1 m + a_0 = 0$ que tendrá n raíces.

Si $m_1 \neq m_2 \neq ... \neq m_n$

la solución es $y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \cdots + c_n e^{m_n x}$

Si $m_1 = m_2 = \cdots = m_n$

la solución es $y = e^{mx}(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_n x^{n-1})$

Si hay raíces iguales y también raíces diferentes, se aplican los dos casos anteriores a los grupos de λ_i que convenga.

Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden

Son de la forma $y'' + f(x)y' + g(x)y = r(x)$.

Solución $y = y_h + y_p$.

Formas para obtener y_p: **1.** coeficientes indeterminados; **2.** método general; variación de parámetros.

1. Método de coeficientes indeterminados (vea el cuadro de la página 187).
2. Método de variación de parámetros:

Suponemos como solución $y = uy_1 + vy_2$, donde y_1 y y_2 son solución de la ecuación homogénea correspondiente, y, u y v tienen la forma:

$$u = -\int \frac{y_2 r(x)}{W(y_1, y_2)} dx \qquad v = \int \frac{y_1 r(x)}{W(y_1, y_2)} dx$$

$$\rightarrow y_p = -y_1 \int \frac{y_2 r(x)}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 r(x)}{W} dx$$

Autoevaluación 4

1. Usar la sustitución apropiada para resolver $y'' - y' = 0$ con $y(0) = 2$; $y'(0) = 1$
2. Elegir la opción que contiene la solución general de la ecuación $y'' - \frac{1}{2} y' = yy'$:
   a. $y = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + c_1$
   b. $y = \frac{4c_1 - 1}{2} \tan \frac{\sqrt{4c_1 - 1}}{4}(x + c_2) - \frac{1}{2}$
   c. $y = c_1 \tan c_1 (x + c_2)$
   d. $x = c_1 \tan^{-1}(y + c_1)$
3. Dadas las funciones $\cos x$, $\cos(x - 1)$, $\cos(x + 1)$, averiguar si son linealmente independientes o linealmente dependientes.
4. Seleccionar la opción que contiene soluciones linealmente independientes en el intervalo [1, 2].
   a. $2 \operatorname{sen} h 2x,\ e^{2x},\ e^{-2x}$
   b. $2 \cosh i\theta,\ e^{i\theta},\ e^{-i\theta}$
   c. $1,\ e^{x},\ xe^{-x}$
   d. $1\log_{10} x, \frac{\ln x}{\ln 10}$

5. Encontrar el *wronskiano* de las funciones: $e^{-x}\operatorname{sen}3x,\ e^{-x}\cos 2x,\ 1$

6. Elegir la opción que muestra la dependencia o independencia lineal, mediante el *wronskiano*, de las funciones cos*hx, e*^{x}

a. Son LD porque $W = e^x \operatorname{sen} hx$ y $\operatorname{sen} hx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

b. Son LI porque $W = 1$

c. Son LI porque $W = e^x \cos hx$

d. Son LD porque $W = 0$, ya que $\operatorname{sen} hx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ y $\cos hx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

7. Enunciar el teorema de existencia y unicidad de las soluciones.

8. Resolver $y'' + 3y' - 4y = 0$.

9. Seleccionar la opción que contiene la solución general de: $4y'' + 16y' + 17y = 0$.

a. $y = e^{-2x}(A\cos\frac{x}{2} + B\operatorname{sen}\frac{x}{2})$

b. $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x/2}$

c. $y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{x/2}$

d. $y = e^{x/2}(A\cos(-2x) + B\operatorname{sen}(-2x))$

10. Resolver $9y'' - 6y' + y = 0$.

11. Resolver $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$.

12. Elegir la opción que contiene la solución particular de $x^2 y'' - xy' + 5y = 0$ con condiciones iniciales $y(1) = 1$; $y'(1) = 0$.

a. $y = 2x - x^2$

b. $y = e^x(A\cos 2x + B\operatorname{sen} 2x)$

c. $y = e^x(\dfrac{\cos 2}{e}\cos 2x + \dfrac{\operatorname{sen}2}{e}\ \operatorname{sen} 2x)$

d. $y = x(\cos \ln x^2 - \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} \ln x^2)$

13. Demostrar que $x = e^t$ es una transformación correcta para encontrar la solución de la ecuación de Cauchy-Euler.

14. Elegir la opción que contiene la solución general de: $y^{\text{iv}} - 7y''' + 17y'' - 17y' + 6y = 0$.

a. $y = e^x(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x) + c_3 e^{2x} + c_4 e^{3x}$

b. $y = c_1 e^x + c_2 e^x + c_3 e^{2x} + c_4 e^{3x}$

c. $y = e^x(c_1 + c_2 x) + c_3 e^{2x} + c_4 e^{3x}$

d. $y = c_1 e^x + c_2 e^x + e^{2x}(c_3 + c_4 x^3)$

15. Resolver la ecuación:

$$y''' - 3y'' + y' - 3 = 0 \ \text{ con } \ y(0) = 2;\ y'(0) = 6;\ y''(0) = 0$$

16. Hallar la solución general por el método de coeficientes indeterminados:

$$y'' - y = 2x^4 + x^2 - 8x$$

17. Elegir la opción que contiene la solución general de la ecuación diferencial, obtenida por el método de coeficientes indeterminados:

$$y'' - \frac{4}{9}y = x^3 - 2$$

a. $y = c_1 e^{-2x/3} + c_2 e^{2x/3} - \frac{9}{4}x^3 - \frac{243}{8}x + \frac{9}{2}$

b. $y = c_1 e^{2x/3} + c_2 e^{2x/3} - \frac{9}{4}x^3 - \frac{243}{8}x + \frac{9}{2}$

c. $y = c_1 \cos\frac{2}{3}x + c_2 \operatorname{sen}\frac{2}{3}x - \frac{9}{4}x^3 - \frac{27}{8}x + \frac{9}{2}$

d. $y = e^{-2x/3}(c_1 \cos\frac{2}{3}x + c_2 \operatorname{sen}\frac{2}{3}x) - \frac{9}{4}x^3 - \frac{27}{8}x + \frac{9}{2}$

18. Hallar la solución general de: $y'' - y' + \frac{3}{16}y = -\frac{1}{4}e^{x/4} + \frac{1}{16}x$

19. Elegir la opción que contiene la solución general de:

$$y'' - \frac{25}{2}y' + 6y = 10e^x - 4\operatorname{sen} x$$

a. $y = c_1 e^{12x} + c_2 e^{1/2x} - \frac{20}{11}e^x + \frac{8}{21}\cos x + \frac{16}{105}\operatorname{sen} x$

b. $y = c_1 e^{12x} + c_2 x e^{x/2} - \frac{20}{11}e^x - \frac{8}{29}\cos x + \frac{16}{145}\operatorname{sen} x$

c. $y = e^{12x}(A\cos\frac{1}{2}x + B\operatorname{sen}\frac{1}{2}x) - \frac{20}{11}e^x$

d. $y = -\frac{20}{11}e^x \, \frac{8}{29}\cos x - \frac{16}{145}\operatorname{sen} x$

20. Elegir la opción que contiene la solución general de:

$$y'' - y' - 6y = 10\cos 2x - 4x^2$$

a. $y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{-2x} - \frac{25}{26}\cos 2x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{7}{27}$

b. $y = e^{-2x}(A\cos 3x + B\operatorname{sen} 3x) - \frac{25}{26}\cos 2x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{7}{27}$

c. $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x} - \frac{25}{26}\cos 2x - \frac{5}{26}\operatorname{sen} 2x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{7}{27}$

d. $y = -\frac{25}{26}\cos 2x - \frac{5}{26}\operatorname{sen} 2x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{7}{27}$

21. Resolver por el método de coeficientes indeterminados la ecuación: $y'' - 2y' + y = 3e^{2x} + \frac{25}{3}\operatorname{sen} 2x$, para las condiciones iniciales $y(0) = 1;\ y'(0) = 0$.

22. Resolver por el método de coeficientes indeterminados y hallar la solución general de la ecuación $y''' - y'' + y' - y = 8e^{-x} + 6\operatorname{sen} 2x$.

23. Elegir la opción que contiene la forma que deben tener u y v para que $y_p = uy_1 + vy_2$ sea la solución de la ecuación $y'' - 3y' = 9x\operatorname{sen} 2x$.

a. $u = -1$ $\quad v = e^{3x}$

b. $u = -3\int x\operatorname{sen} 2x\,dx$ $\quad v = 3\int xe^{-3x}\operatorname{sen} 2x\,dx$

c. $u = 1$ $\quad v = 3e^{3x}$

d. $u = c_1$ $\quad v = c_2 e^{3x}$

24. Encontrar la y_p de la ecuación $y'' - \frac{1}{4}y = 3x^2 e^{x/2}$.

25. Elegir la opción que contiene la solución de $x^2y'' + xy' - y = x(2 - \ln x)$ con condiciones iniciales: $y(1) = -\frac{1}{8}$; $y'(1) = \frac{5}{8}$.

a. $y = c_1x^{-1} + c_2x + \frac{x}{4}(-\frac{5}{2} + 5\ln x - \ln^2 x)$

b. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{x} + \frac{x}{4}(-\frac{5}{2} + 5\ln x - \ln^2 x)$

c. $y = -\frac{1}{4x} + \frac{x}{4}(-\frac{3}{2} + 5\ln x - \ln^2 x)$

d. $y = \frac{x}{4}(-\frac{5}{2} + 5\ln x - \ln^2 x)$

Respuestas de la autoevaluación 4

1. $y = e^x + 1$

2. *b*. La opción *a* representa y' y no y. Las opciones *c* y *d* no respetan las constantes.

3. Son LD porque $c_1\cos x = c_2\cos(x-1) + c_3\cos(x+1)$ para $c_1 = 2\cos 1$, $c_2 = c_3 = 1$.

4. *c*. No es la opción *a* porque $2\operatorname{sen}hx = e^{2x} - e^{-2x}$. No es la opción *b* porque 2 $\cosh i\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$. Ni la *d* porque $\log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}$.

5. $W = -30e^{-2x}$.

6. *b*. El *wronskiano* antes de aplicar las identidades es $e^x(\operatorname{sen}hx - \cos hx)$. Por ello, las opciones *a* y *b* muestran un resultado incompleto. La opción *d* no tiene sentido.

7. Vea el texto.

8. $y = c_1e^{-2x} + c_2e^x$.

9. *a*. La opción *b* sería el caso de $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. En la opción *c* se mezclan las formas de solución. En la opción *d* se intercambian los valores de α y β.

10. $y = c_1e^{x/3} + c_2xe^{x/3}$.

11. $y = c_1x^2 + c_2x^2\ln x$.

12. *d*. La opción *a* supone que la solución es del tipo de raíces diferentes y reales. La *b* muestra una solución general, sin condiciones iniciales y falta aplicar $t = lnx$. A la opción *c* también le falta la transformación.

13. Vea el texto.

14. *c*. La opción *a* supone raíces complejas. La *b* supone raíces desiguales. Y la *d* mezcla conceptos y pone un término como si la ecuación fuera de Cauchy-Euler.

15. $y = \frac{1}{5}e^{3x} + \frac{9}{5}\cos x + \frac{27}{5}\operatorname{sen} x$

16. $y = c_1e^{-x} + c_2e^x - 2x^4 - 25x^2 + 8x - 50$.

17. *a*. La opción *b* supone raíces iguales de la ecuación auxiliar. La opción *c* supone raíces complejas y la y_p tiene error algebraico. La *d* lo mismo.

18. $y = c_1e^{3x/4} + c_2e^{x/4} + \frac{1}{2}xe^{x/4} + \frac{1}{3}x + \frac{16}{9}$.

19. *a*. La opción *b* supone la solución de la homogénea con raíces iguales. La opción *c* supone raíces complejas de la ecuación auxiliar. La opción *d* presenta la y_p, le falta sumar la y_h.

20. *c*. La opción *a* considera raíces iguales a la ecuación auxiliar y le falta un término de la y_p. La opción *b* considera raíces complejas de la ecuación auxiliar y también le falta un término de la y_p. La opción *d* está incompleta, le falta sumar y_p.

21. $y=-\dfrac{10}{3}e^{x}-\dfrac{2}{3}xe^{x}+3e^{2x}+\dfrac{4}{3}\cos 2x-\operatorname{sen} x.$

22. $y=c_1e^{x}+c_2\operatorname{sen} x+c_3\cos x-2e^{-x}+\dfrac{2}{5}\operatorname{sen} 2x+\dfrac{4}{5}\cos 2x.$

23. *b*. La opción *a* representa $-y_1$ y y_2. La opción *c* contiene a y_1 y al *wronskiano* de y_1 y y_2. La opción *d* presenta los términos cuya combinación lineal da y_h.

24. $y_p=e^{x/2}(x^3-3x^2+6x-6).$

25. *c*. La opción *a* no aplica las condiciones iniciales. La opción *b* supone la solución exponencial sin efectuar la transformación $t = lnx$. La *d* representa la y_p.

Leonard Euler

Leonard Euler
(1707-1783)

En 1707 nació en Basel, Suiza, un niño que sería años más tarde el mejor alumno de Juan Bernoulli y, finalmente, el matemático más productivo de todos los tiempos: Leonard Euler.

Su padre, pastor calvinista, a pesar de tener cierta formación matemática, deseó que su hijo estudiara teología. Sin embargo, la facilidad notoria del muchacho para la ciencia pura lo encaminó hacia las matemáticas. Con todo, la educación de Euler resultó completísima, abarcando disciplinas tan variadas como la teología, la medicina, la física, la astronomía y las lenguas orientales.

A los 20 años, recomendado por los Bernoulli, Euler fue invitado por la emperatriz Catalina I de Rusia para ocupar la cátedra de medicina y fisiología en San Petersburgo. Aceptó, pero poco después de su llegada, quedó como catedrático en matemáticas, puesto que conservó hasta 1741.

Durante esta estancia, Euler perdió el uso de su ojo derecho, suceso que de ninguna manera alteró su producción diaria de descubrimientos ya que, como comentara el académico francés Arago: "Euler calcula sin esfuerzo aparente, tal como el hombre respira, o el águila se sostiene en el aire." Es sabido también que hacía matemáticas al tiempo que jugaba con sus niños.

En 1741 aceptó una invitación de Federico "el Grande" y dejó San Petersburgo para irse a Berlín, donde vivió hasta 1766, fecha en la cual regresó definitivamente a Rusia, país en el que murió en 1783.

La producción de Euler no sólo fue enorme en tamaño, sino también en variedad. Le debemos avances en mecánica celeste, hidráulica, construcción de barcos, teoría de la música, etc. Su intuición genial lo llevó a inventar buena parte de las notaciones que usamos hoy en día, a establecer algoritmos nuevos y a manejar formalmente ciertas expresiones hasta obtener resultados tan sorprendentes como el famoso $e^{i\pi}+1=0,$ que contiene los cinco números más importantes de la matemática. Su nombre quedó relacionado con todas las ramas de la ciencia; por ejemplo, en ecuaciones diferenciales inventó el método del factor integral.

Las obras completas de Euler ocupan 75 volúmenes de tamaño respetable, colocándolo, sin lugar a dudas, en el primer lugar en cuanto a productividad. Es de notar que este gran hombre pasó sus últimos 17 años en la ceguera total, sin que por ello decreciera su ritmo de trabajo creativo. Para eso, escribió sintéticamente sus pensamientos en un pizarrón, del cual algunos discípulos copiaron a su vez los resultados. La leyenda relata que el día de su muerte se acercó al pizarrón poco después de haber encontrado algo de importancia y escribió: *Ich sterbe* (me muero) y cayó muerto.

Dios creó el número entero, lo demás es obra del hombre.

KRONECKER

Anécdota

Euler creía en Dios. Cierto día, Diderot fue a visitar la corte rusa, invitado por la emperatriz Catalina de Rusia (1773). La conversación con Diderot era liberal, amena y con tendencias ateas. Esta desenvoltura divertía mucho a la emperatriz, pero no tanto a sus ministros, que le pidieron cortara por lo sano la exposición de doctrinas sospechosas. La emperatriz utilizó un ardid: hizo saber a Diderot que un ilustre matemático había conseguido demostrar por álgebra la existencia de Dios y que deseaba presentarle su demostración ante la corte. Diderot aceptó de buen grado. El matemático (que era Euler) anunció solemnemente con perfecta convicción:

"Caballero: $\frac{a+b^n}{n}=x$, luego Dios existe; ¡Respondedme!"

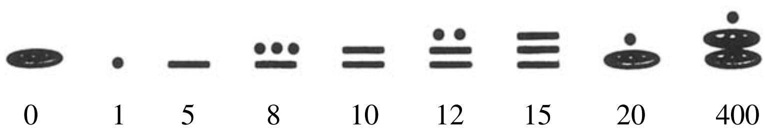
Diderot, que no sabía nada de álgebra, quedó atónito y desconcertado, mientras la corte entera se reía. Su regreso a Francia fue inmediato.

Propiedades metafísicas del número 4

Representa el principio de realidad, fundamento de la ciencia de los números y causa permanencia. Para Pitágoras contiene en sí el fuego del 1, el aire del 2, el agua del 3 y la tierra del 4.

En la materialización de la virtud divina en el hombre, es la afirmación y la negación, la discusión y la solución. Además, representa el esfuerzo en la mano de obra y la voluntad en el pensamiento.

Numeración maya (aproximadamente 300 a. C.)



¿Qué expresión contiene cada uno de estos símbolos, una y sólo una vez?

$$0,\ 1,\ i,\ e,\ \pi$$

Euler era intuitivo y, a veces, no ahondaba en la precisión de sus resultados, por eso le sucedían cosas así:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{+1}=-1-1=-2$$

¿Es posible este resultado negativo? Si hay error, ¿dónde está?

HORIZONTALES

1. Determinante para encontrar si dos o más funciones son linealmente independientes o no.
2. Dios de los vientos en la mitología griega. Gran matemático alemán autor de la famosa fórmula $e^{i\pi} + 1 = 0$.
3. Abreviaturas de: eminencia y capital. Primeras letras de erosión.
4. Filósofo alemán que escribió "Crítica de la razón pura". Lejano, apartado, distante.
5. Preposición. Separan, distancian, retiran.
6. Negación, habiten, vivan. Consonante.
7. Quinientos en números romanos. Río de Rusia. Cuatrocientos seis, en números romanos.
8. Pieza de artillería. Río de Rusia.
9. Terminación de aumentativo.
10. Comercia al por mayor. El primero de su clase.

VERTICALES

1. Fin de semana. Vacación, en inglés. OM.
2. Natural de Roma. Habitante de la Tierra del Fuego.
3. Terminación genérica de los alcoholes. Consonante. Preposición inseparable que significa; por causa, en virtud de, conjunción.
4. El que anda vagando en la noche.
5. Consonante. Vocal. Ocio en francés.
6. Astrónomo alemán famoso por sus tres leyes sobre los movimientos de los planetas, uno de los cuales es: *los planetas giran alrededor del Sol formando elipses en la que el Sol ocupa uno de los focos*. Pronombre personal.
7. Vocales. Realizó, elaboró, ajustició, aniquiló.
8. General macedonio, hijo de Filipo II, de sobrenombre: Magno.
9. Emperador romano, célebre por su crueldad y el incendio de Roma. Nula, inoperante, inútil.
10. Uno de los cuatro palos de la baraja española. Diez por cien. Consonante.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2					■					
3			■				■			
4					■					
5			■							■
6			■						■	
7		■				■				
8	■					■				
9			■							■
10								■		

5 Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de segundo orden

Karl Friedrich Gauss
(1777-1855)

El secreto, según Chiang, consistía en que Juan dejase de verse a sí mismo como prisionero de un cuerpo limitado, con una envergadura de 104 centímetros y un rendimiento susceptible de programación. El secreto era saber que su verdadera naturaleza vivía con la perfección de un número no escrito, simultáneamente en cualquier lugar del espacio y del tiempo. Juan se dedicó a ello con ferocidad.

JUAN SALVADOR GAVIOTA
R. BACH

Aplicaciones geométricas

Para encontrar ecuaciones de curvas que satisfacen ciertas propiedades se usan ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Otra propiedad es la relacionada con el radio de curvatura de una curva. Si $y = f(x)$ es una curva dada, entonces, su curvatura está dada por la ecuación:

$$K = \frac{|y''|}{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}$$

Y el radio de curvatura es: $r = \dfrac{\left(1 + (y')^2\right)^{3/2}}{|y''|}$

EJEMPLO 1

Hallar la ecuación diferencial de la familia de elipses con centro en el origen y cuyos ejes coincidan con los ejes de coordenadas.

SOLUCIÓN:

La ecuación de una elipse con ejes a y b es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Derivando las veces que sean necesarias para obtener una ecuación, tenemos:

$$2b^2 x + 2a^2 yy' = 0$$

$$yy' = -\frac{b^2}{a^2} x$$

En la ecuación original: $\dfrac{b^2}{a^2} x^2 + y^2 = b^2$,

de donde $\dfrac{b^2}{a^2} = \dfrac{b^2 - y^2}{x^2}$; sustituyendo:

$$yy' = -\left(\frac{b^2 - y^2}{x^2}\right)x$$
$$xyy' = y^2 - b^2$$

Tomando otra derivada:

$$xyy' + y'(xy' + y) = 2yy'$$
$$xyy'' + xy'^2 = yy'$$

$\therefore\ y'' = \dfrac{y'^2}{y} - \dfrac{y'}{x}$ es la ecuación diferencial no lineal pedida.

EJEMPLO 2

Si el radio de curvatura de una curva $y = f(x)$ en un punto es $r = \dfrac{\left[1 + y'^2\right]^{\frac{3}{2}}}{y''}$ y la longitud de la normal desde dicho punto al eje x es $y\sqrt{1 + y'^2}$, encontrar las curvas con la propiedad de que el radio es proporcional a la longitud de la normal. (Observar la diferencia entre $k = 1$ y $k = -1$).

Tomemos $k = 1$; entonces,

$$\frac{\left[1 + (y')^2\right]^{3/2}}{y''} = y\sqrt{1 + (y')^2}$$
$$1 + y'^2 = y''y$$

Mediante reducción de orden:

$$1 + z^2 = yz\frac{dz}{dy}$$
$$\frac{zdz}{1 + z^2} = \frac{dy}{y}$$

Integrando:

$$\frac{1}{2}\ln\left(1 + z^2\right) = \ln y + \ln c_1$$
$$z = \sqrt{c_1^2 y^2 - 1}$$

Como $z = \dfrac{dy}{dx}$, entonces,

$$\frac{dy}{c_1^2 y^2 - 1} = dx$$

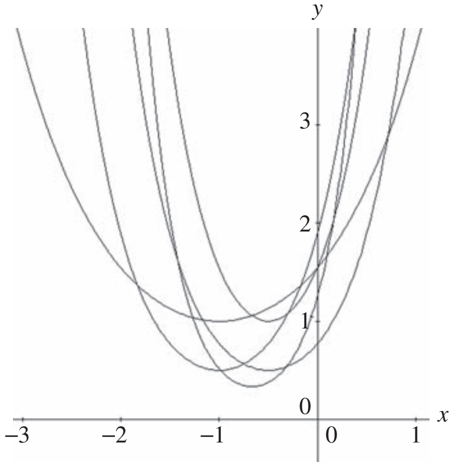
y por sustitución trigonométrica, la nueva integral da:

$$\sqrt{c_1^2 y^2 - 1} = e^{c_1 x + c_2} - c_1 y$$

elevando al cuadrado y despejando y, tenemos:

$$y = \frac{1}{2c_1}\left[e^{(c_1x+c_2)} + e^{-(c_1x+c_2)}\right],$$

que representa una familia de *catenarias*.



Tomemos $k = -1$, entonces,

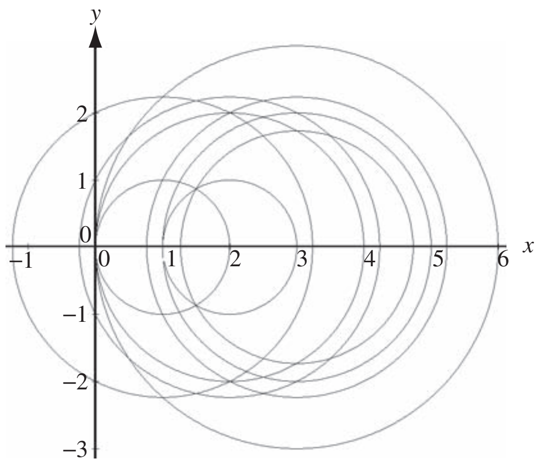
$$\left(1+y'^2\right)^{3/2} = -y\sqrt{1+y'^2}\,y''$$

de donde $yy'' + y'^2 + 1 = 0$

La expresión $yy'' + y'^2$ proviene de derivar yy'; entonces,

$$yy' + x = c_1$$
$$ydy + (x - c_1) = 0,$$

integrando de nuevo: $y^2 + (x-c_1)^2 = c_2$, que representa la familia de *circunferencias* con centro en el eje x.



EJERCICIOS 5.1

1. Hallar la familia de curvas cuyo radio de curvatura es constante.
   Respuesta: $(x+c_1)^2+(y-c_2)^2=k^2$
2. Hallar la familia de curvas con la propiedad de que su radio de curvatura en cualquier punto es igual a la longitud de la normal en dicho punto y en su mismo sentido.
   Respuesta: $y^2+(x-c_1)^2=c_2$
3. Lo mismo que en el problema anterior, pero con sentido opuesto.
   Respuesta: $2c_1ye^{c_1x+c_2}=e^{2(c_1x+c_2)}+1$
4. Hallar la familia de curvas con la propiedad de que su radio de curvatura es proporcional al cubo de la longitud de la normal.
   Respuesta: $y^2=2c_1(x+c_2)^2+\dfrac{1}{2c_1k}$
5. Hallar la familia de curvas para las cuales el radio de curvatura es dos veces mayor que la normal (considerar $|y''|$ como $\pm y''$).
   Respuestas: para $|y''|=y''$, $4c_1y-4c_1^2=(x+c_2)^2$, parábolas con ejes paralelos al eje y.
   Para $-y''$, $x=a(\theta-\operatorname{sen}\theta)$
   $y=a(1-\cos\theta)$ cicloides.
6. Encontrar el área bajo la curva $y=f(x)$ y sobre el eje x, sabiendo que esta curva es tangente al eje x en el origen y satisface la ecuación diferencial: $y''=\sec y'$
   Respuesta: la curva es: $y=x\operatorname{sen}^{-1}x+\sqrt{1-x^2}-1$, y el área pedida es 0.3565 unidades cuadradas.
7. Hallar una curva que pase por el origen de coordenadas, de tal manera que el área del triángulo formado por la tangente a la curva en uno de sus puntos, la ordenada del mismo punto y el eje x, sea proporcional al área bajo dicha curva, acotada por el eje x y la ordenada de este punto. *Sugerencia:* el punto de intersección de la tangente con el eje x es: $x-\dfrac{y}{y'}$.
   Respuesta: $y^{2k-1}=cx$
8. Encontrar la curva cuyo radio de curvatura es proporcional a la pendiente de su tangente.
   Respuesta: $y=\pm\sqrt{k^2-(x+c_1)^2}+k\ln\dfrac{k-\sqrt{k^2-(x+c_1)^2}}{x+c_1}+c_2$
9. Hallar el área bajo la curva $y=f(x)$ y sobre el eje x, sabiendo que esta curva es tangente a la recta $y=4$ en $x=0$ y satisface la ecuación diferencial:
   $$y''=\frac{y'}{\sqrt{4-y}}$$
   Respuesta: la función es $y=4-x^2$ y el área pedida 32/3 unidades cuadradas.

10. Hallar la longitud de la curva $y = f(x)$, desde $x = 0$ hasta $x = 1$, sabiendo que pasa por el punto (0, 1) y que $y'' = \dfrac{\left(e^x + e^{-x}\right)}{2}$

Respuesta: 1.1752

Osciladores

Movimiento armónico simple (oscilación libre). Se rige por la ecuación:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

o $\dfrac{d^2x}{dt^2} + a^2x = 0$, para $a^2 = \dfrac{k}{m}$

donde $-kx$ es la fuerza de restitución del resorte. La solución de esta ecuación tiene la forma:

$$x = c_1 \cos at + c_2 \operatorname{sen} at\ ,$$

con amplitud $x = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, periodo $\dfrac{2\pi}{a}$ seg y frecuencia $\dfrac{a}{2\pi}$ ciclos/segundo.

Movimiento amortiguado (oscilación libre). Se rige por la siguiente ecuación:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt},\quad b > 0$$

o bien, $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2n\dfrac{dx}{dt} + a^2x = 0,\ 2n = \dfrac{b}{m},\ a^2 = \dfrac{k}{m}$

cuya ecuación auxiliar es:

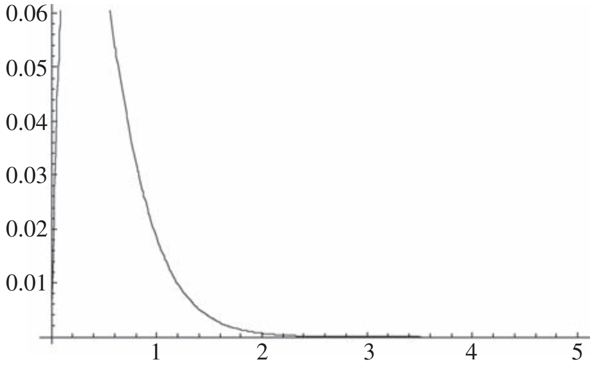
$$m^2 + 2nm + a^2 = 0,\ m = -n \pm \sqrt{n^2 - a^2}$$

Cuando $n^2 > a^2$, la solución es $x = c_1e^{m_1t} + c_2e^{m_2t}$ y el movimiento se llama *sobreamortiguado*; para $n^2 = a^2$, la solución es $x = c_1e^{m_1t} + c_2e^{m_2t}$ y el movimiento se llama *críticamente amortiguado* y se expresa $x = c_1e^{mt} + c_2te^{mt}$, y si $n^2 < a^2$, la solución es $x = e^{-nt}\left(c_1 \cos\sqrt{a^2 - n^2}\,t + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{a^2 - n^2}\,t\right)$ y el movimiento se llama *subamortiguado*.

En los tres casos se observa que cuando $t \to \infty$, el desplazamiento $x \to 0$.

Una ecuación de este estilo, por ejemplo $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 8\dfrac{dx}{dt} + 16x = 0$, en `Mathematica` se muestra como

```
Clear [de]
de=DSolve[{x''[t]+8x'[t]+16x[t]□0,
x[0]□0,x'[0]□1},x[t],t]
{{x[t]e^-4t t}}
sol[t□]=de[[1,1,2]]
e^-4t t
Plot[sol[t],{t,0,5}]
```



Oscilaciones forzadas

Si se aplica una fuerza exterior sobre el sistema, la ecuación diferencial es:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt} + F(t)$$

o bien, $\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + a^2x = F(t)$, $2n = \frac{b}{m}$, $a^2 = \frac{k}{m}$

La solución general es $x(t) = x_h + x_p$, donde la solución x_h tiene siempre el factor e^{-nt}, el cual tiende a cero cuando t tiende a infinito; por eso, x_h se llama solución *transitoria*. Si $F(t)$ es periódica, entonces, x_p se llama solución *estacionaria.*

Si una oscilación forzada llega a una amplitud máxima, la frecuencia impulsora recibe el nombre de *resonancia.*

EJEMPLO 1

Una llanta de masa m cuelga de un resorte. Una vez conseguido el punto de equilibrio, se suelta la llanta con una velocidad inicial v_0 a una distancia x_0 debajo de la posición de equilibrio y simultáneamente se le aplica una fuerza externa $F(t)$ dirigida hacia abajo. Encontrar la ecuación del movimiento. (Considerar la resistencia del aire.)

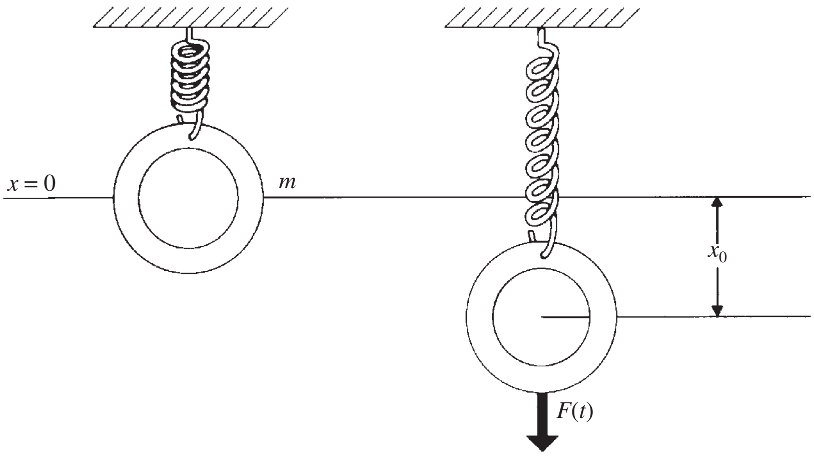


Figura 5-1.

Se toma como positiva la dirección hacia abajo del eje x y se tiene en cuenta la fricción del aire (resistencia proporcional a la velocidad de la masa).

En cualquier tiempo t, hay tres fuerzas que actúan en el sistema:

$F(t)$ es la fuerza externa medida en el sentido positivo.

$F_r = -kx,\ k > 0$ es la fuerza de restitución del resorte (ley de Hooke).

$F_b = -bx',\ b > 0$ es la fuerza debida a la resistencia del aire y actúa siempre en dirección opuesta a la velocidad; por ello, tiende a retardar el movimiento.

F_r y F_b son negativas porque van en sentido opuesto al eje x considerado. Por la segunda ley de Newton, la fuerza neta que actúa sobre la masa es: $F =$ (*masa*)(*aceleración*).

Entonces, $F = F_r + F_b + F(t)$ representa la aplicación de todas las fuerzas sobre la masa m. Es decir, $mx'' = -kx - bx' + F(t)$; o bien, $x'' + 2nx' + a^2x = f(t)$,

donde: $2n = \dfrac{b}{m},\ a^2 = \dfrac{k}{m},\ f = \dfrac{F}{m}$,

es la ecuación que rige una oscilación forzada. Las condiciones iniciales del proceso son: $x(0) = x_0$ y $x'(0) = v_0$.

EJEMPLO 2

A un resorte, que se estira 50 cm al aplicarle una fuerza de 4 N, se le cuelga un peso de 19.6 N. A este peso se le aleja de su posición de equilibrio jalándolo 1 m hacia abajo. Si se suelta el peso, estudiar el movimiento en los casos: *a*. no hay resistencia del aire, *b*. si la resistencia del aire es $8\dfrac{dx}{dt}$ y *c*. si además de la resistencia del aire, hay una fuerza aplicada al peso de $80\operatorname{sen}2t$.

El peso W del objeto es 19.6 y como $W = mg$, la masa

$$m = \frac{W}{g} = \frac{19.6}{9.8} = 2 \text{ kg}$$

a. Sea x el alargamiento del resorte, por la ley de Hooke $F_r = kx$; en este caso: $F_r = 4N$ para $x = 0.5$ m.

Entonces, $k = \dfrac{4}{0.5} = 8$

Además, $F_b = 0$ y $F(t) = 0$

La ecuación del sistema es: $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx$

es decir, $x'' + 4x = 0$

cuya solución es: $x = c_1\cos 2t + c_2\operatorname{sen}2t$.

Aplicando las condiciones iniciales: cuando $t = 0$, $x = 1$ y $x' = 0$ se obtiene $c_1 = 1$, $c_2 = 0$. Por tanto, $x = \cos 2t$ representa un movimiento armónico de amplitud 1 m, periodo $\dfrac{2\pi}{2} = \pi$ seg y frecuencia: $\dfrac{2}{2\pi} = \dfrac{1}{\pi} =$ 0.318 ciclos/segundo.

b. En este caso, la ecuación es:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - 8\frac{dx}{dt}$$
$$x'' + 4x' + 4x = 0$$

cuya solución es: $x = e^{-2t}\left(c_1 + c_2 t\right)$.

Aplicando de nuevo las condiciones iniciales:

$$x = e^{-2t}\left(1 + 2t\right)$$

El factor de amortiguamiento es e^{-2t}

c. En este caso, tenemos la ecuación:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -8x + 80\operatorname{sen} 2t - 8\frac{dx}{dt},$$
$$x'' = -4\left(x - 10\operatorname{sen} 2t\right) - 4x',$$
$$x'' + 4x' + 4x = 40\operatorname{sen} 2t.$$

Su solución es $x = x_h + x_p$, donde: $x_h = e^{-2t}\left(c_1 + c_2 t\right)$ y

$$x_p = -5\cos 2t.$$

Para las condiciones iniciales dadas:

$$x = e^{-2t}\left(6 + 12t\right) - 5\cos 2t,$$

La parte $e^{-2t}\left(6 + 12t\right)$ representa un movimiento transitorio y $-5\cos 2t$ es el movimiento estable.

EJERCICIOS 5.2

1. Un resorte cuelga verticalmente; su extremo superior está fijo y del inferior pende una caja que pesa 196 N. Una vez en equilibrio se tira de la caja hacia abajo haciéndola desplazar 0.25 m y se suelta. Sabiendo que $k = 80\frac{N}{m}$ y que la resistencia del aire es despreciable, hallar:

a. La ley de movimiento de la caja.

b. El tiempo necesario para que la caja se mueva desde la posición inicial hasta 0.0625 m por debajo de la posición de equilibrio.

Respuestas: *a.* $x = \frac{\cos 2t}{4}$ *b.* $t = 0.659$ segundos.

2. Resolver el problema uno suponiendo que hay una resistencia del aire:
a. $v/4$.
b. $4v$.

Respuestas: *a.* $x = e^{-\frac{1}{160}t}\left(0.25\cos 1.996t + 0.00078\,\text{sen}\,1.996t\right)$

b. $x = e^{-\frac{1}{10}t}(0.25\cos 1.997t + 0.0125\,\text{sen}\,1.997t)$

En ambos casos el movimiento es oscilatorio amortiguado.

3. Una masa de 98 N de peso se cuelga de un resorte con lo que éste interrumpe su estado de reposo. Sabiendo que $k = 4.9$ N/m, hallar el movimiento de la masa si al soporte del resorte se le imprime una fuerza de $y = \text{sen}\sqrt{2g}t$ metros.

Respuesta: $x = \dfrac{-0.7\sqrt{2g}}{0.49 - 2g}\text{sen}\,0.7t + \dfrac{0.49}{0.49 - 2g}\text{sen}\sqrt{2g}t.$

4. Se suspende una masa de 10 kg de un resorte, el cual se alarga 0.6533 m. La masa se pone un movimiento desde la posición de equilibrio con una velocidad inicial de 1 m/seg. dirigida hacia arriba. Hallar el movimiento resultante si la fuerza debida al aire es de $80v$ newtons.

Respuesta: $x = \dfrac{e^{-5t} - e^{-3t}}{2}$

5. Supongamos que al sistema del problema anterior se le aplica una fuerza externa: $f(t) = 10\,\text{sen}\,t$. Hallar el movimiento resultante de la masa.

Respuesta: $x = -\dfrac{9}{20}e^{-3t} + \dfrac{25}{52}e^{-5t} + \dfrac{1}{130}\left(7\,\text{sen}\,t - 4\cos t\right).$

6. De un resorte que tiene una constante $k = 50$ se suspende un peso de 49 N. El peso se pone en movimiento desde el reposo, estirándolo 0.98 m hacia arriba de la posición de equilibrio y aplicando una fuerza externa $f(t)$ = 10 sen$2t$. Si no hay resistencia del aire, hallar el movimiento del peso.

Respuesta: $x = -0.98\cos\sqrt{10}t - 0.21\,\text{sen}\sqrt{10}t + \dfrac{1}{3}\text{sen}\,2t.$

7. Dos pesos iguales están colgados del extremo de un resorte. Si uno de ellos se desprende, hallar la ecuación del movimiento del otro peso. Sugerencia: $x(0) = b$.

Respuesta: $x = b\cos\sqrt{\dfrac{g}{b}}\,t.$

8. Una cadena de 8 m de longitud se desliza, sin rozamiento, desde un soporte hacia abajo. Si el movimiento se inicia en el momento en que la cadena cuelga 1 m del soporte, hallar el tiempo que tardará en deslizarse toda la cadena.

Respuesta: $t = 2.49$ segundos

9. Se cuelga de un resorte una masa de 2 kg, de tal manera que el resorte se alarga 0.6125 m. A esta masa se la aleja (aparta) de su posición de equilibrio jalándola 1 m hacia arriba y se la suelta. Hallar el movimiento resultante de la masa, sabiendo que hay una resistencia del aire de $16v$.

Respuesta: $x = e^{-4t}\left(-1 - 4t\right).$

10. Un resorte cuelga verticalmente. En su extremo libre se coloca una masa de mkg. Si la masa se mueve con velocidad v_0 m/seg cuando el resorte está sin alargar, hallar la velocidad en función del alargamiento.

Respuesta: $v^2 = 2gx - \dfrac{k}{m}x^2 + v_0^2$.

Caída libre y leyes de movimiento

Se va a considerar la caída vertical de un cuerpo de masa m que está afectado por dos fuerzas: la aceleración de la gravedad y la resistencia del aire proporcional a la velocidad del cuerpo. Suponemos que tanto la gravedad como la masa permanecen constantes y que la dirección positiva es hacia abajo.

Por la segunda ley de Newton:

$$F = ma = m\frac{dv}{dt}.$$

La fuerza de gravedad dada por el peso w del cuerpo es: $w = mg$, donde $g = 9.8\ \dfrac{\text{m}}{\text{seg}^2}$.

La fuerza debida a la resistencia del aire es $-kv$, $k \geq 0$ por ser opuesta a la velocidad; k es la constante de proporcionalidad. Entonces, la fuerza neta sobre el cuerpo es:

$$F = mg - kv$$

es decir, $m\dfrac{dv}{dt} = mg - kv$

de donde $\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{k}{m}v = g$,

es la ecuación del movimiento del cuerpo. Si la resistencia del aire es despreciable, entonces, $k = 0$ y la ecuación es:

$$\frac{dv}{dt} = g$$

La velocidad límite se define así: $v_1 = \dfrac{mg}{k}$.

Si la resistencia del aire no es proporcional a la velocidad sino al cuadrado de la velocidad u otra relación, entonces las ecuaciones deben modificarse.

EJEMPLO 1

Un paracaidista, junto con su paracaídas, cae partiendo del reposo. El peso total es w kilogramos. Sobre el sistema actúa una fuerza debida a la resistencia del aire que es proporcional a la velocidad. Si la caída es vertical, hallar:

1. La ecuación del movimiento.
2. La ecuación con los siguientes datos: $w = 98$ kg y $k = 10$.
3. La distancia recorrida por el paracaidista.

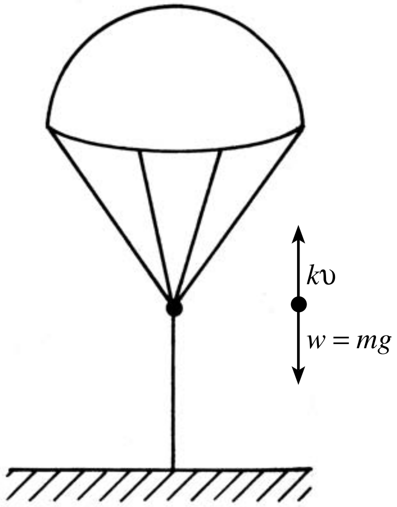


Figura 5-2.

a. La fuerza neta es: $F = mg - kv$

de donde $m\dfrac{dv}{dt} = mg - kv$

y $\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{k}{m}v = g$ es la ecuación diferencial del sistema con las condiciones para $t = 0$, $v = 0$.

La solución de la ecuación es:

$$v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-kt/m}\right)$$

b. $w = mg = 98$ kg. Entonces, $m = \dfrac{98}{9.8} = 10$ kg, $g = 9.8\dfrac{m}{\text{seg}^2}$ $\therefore v = 9.8$ $(1 - e^{-t})$, cuando $t \to \infty$, v se aproxima a $\dfrac{mg}{k}$ que es la velocidad límite constante.

c. Como $v = \dfrac{dx}{dt}$ tenemos:

$$dx = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-kt/m}\right)dt$$

Con condiciones iniciales: $x = 0$ para $t = 0$

$$x = \frac{mg}{k}\left(t + \frac{m}{k}e^{-kt/m} - \frac{m}{k}\right),$$

y para los datos del inciso *b*:

$$x = 9.8\left(t + e^{-t} - 1\right).$$

Una partícula se mueve a lo largo del eje x según la ecuación:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+9\frac{dx}{dt}+20x=0$$

A partir de un punto a 2 m a la derecha del origen, la partícula en el tiempo t = 0 seg se dispara hacia la izquierda con una velocidad $v=12\dfrac{m}{seg}$. Hallar:

a. El tiempo en que la partícula pasa por el origen.

b. El desplazamiento máximo negativo.

c. La velocidad máxima (positiva).

SOLUCIÓN:

La ecuación auxiliar correspondiente a esta ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes es:

$$\lambda^2+9\lambda+20=0$$

con raíces $\lambda_1=-4,\ \lambda_2=-5.$

Por tanto, las ecuaciones del desplazamiento y de la velocidad, son:

$$x=c_1e^{-4t}+c_2e^{-5t},$$
$$v=-4c_1e^{-4t}-5c_2e^{-5t}.$$

Encontramos los valores de c_1 y c_2 mediante las condiciones iniciales; así: para $t=0\rightarrow x=2$ y también para $t=0\rightarrow v=-12,$

$$\left.\begin{aligned}2&=c_1+c_2\\-12&=-4c_1-5c_2\end{aligned}\right\}\quad\begin{aligned}c_1&=-2\\c_2&=4.\end{aligned}$$

$$\therefore x=-2e^{-4t}+4e^{-5t},$$
$$v=8e^{-4t}-20e^{-5t}.$$

a. Cuando la partícula pasa por el origen: $x=0$. Entonces,

$$4e^{-5t}=2e^{-4t}$$

Multiplicando por $\dfrac{1}{2}e^{5t}$

$2=e^t\rightarrow t=\ln 2=0.6931$ segundos

b. El desplazamiento máximo negativo se dará cuando $v=0$.

Entonces,

$$8e^{-4t}=20e^{-5t}\rightarrow t=\ln 2.5$$
$$x=-2e^{-4\ln 2.5}+4e^{-5\ln 2.5}$$
$$=-2(2.5)^{-4}+4(2.5)^{-5}$$
$$=-(2.5)^{-5}$$
$$\therefore x=-0.01024\ \text{m}.$$

c. La máxima velocidad se tendrá para:

$$\frac{dv}{dt} = -32e^{-4t} + 100e^{-5t} = 0$$

$$100e^{-5t} = 32e^{-4t}$$

de donde $t = \ln\left(25/8\right)$.

Entonces, $v = 8e^{-4\ln\left(25/8\right)} - 20e^{-5\ln\left(25/8\right)}$

$$= 8\left(\frac{25}{8}\right)^{-4} - 20\left(\frac{25}{8}\right)^{-5}$$

$$= 5\left(\frac{25}{8}\right)^{-5}$$

$$\therefore v = 0.01677 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

EJERCICIOS 5.3

1. Hallar el tiempo necesario para que un cuerpo caiga a la Tierra desde la altura de 400 000 km. Se tiene conocimiento de que la altura se mide desde el centro de la Tierra y que el radio de ésta es de 6 400 km, aproximadamente.

Respuesta: $y^2 y'' = -k,\ t = 122$ horas.

2. Una partícula se mueve a lo largo del eje x de acuerdo con la ley:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 13x = 0$$

Si esa partícula empieza su movimiento en $x = 0$, con una velocidad inicial de 6 m/seg hacia la izquierda, hallar:

a. x en función de t.

b. Los tiempos en que se producen las paradas.

Respuestas: a. $x = -2e^{-2t}\operatorname{sen}3t$

b. $t = 0.33 + \dfrac{n\pi}{3}$ radianes, $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,...$

3. Una partícula de masa m se mueve por el eje x con una fuerza de repulsión que es inversamente proporcional al cubo de la distancia desde el punto x_0 al origen. Determinar la ley de movimiento.

Respuesta: $x^2 = c_1\left(t + c_2\right)^2 + \dfrac{k}{c_1 m}$

4. Un cuerpo de masa m cae desde cierta altura con una velocidad v. Durante la caída, el cuerpo experimenta una resistencia que es proporcional al cuadrado de la velocidad. Hallar la ecuación del movimiento.

Respuesta: $x = \dfrac{m}{k}\ln\cosh\sqrt{\dfrac{\text{kg}}{\text{m}}}\,t.$

5. Si en el problema anterior $m = 4$ kg, $g = 9.8\dfrac{\text{m}}{\text{seg}^2}$, $k = 3.673$ Hallar:

a. La velocidad al cabo de dos segundos.

b. El tiempo necesario para caer a una distancia de 8 metros.

Respuesta: $v = 3.26 \dfrac{\text{m}}{\text{seg}}$, $t = 2.68$ segundos.

6. Un hombre y su barca pesan 98 kg. La fuerza ejercida en la dirección del movimiento es 4.9 kg y la resistencia al movimiento es igual al doble de la velocidad. Determinar:

a. La velocidad 20 seg después de que la barca haya empezado a moverse.

b. La distancia recorrida al cabo de esos 20 segundos.

Respuesta: *a*. $v = 2.4 \dfrac{\text{m}}{\text{seg}}$, $x = 36.97$ metros.

Circuitos eléctricos

Se puede establecer la siguiente analogía entre un sistema mecánico y un circuito eléctrico:

Sistema mecánico	*Circuito eléctrico*
$m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\dfrac{dx}{dt} + F(t)$	$L\dfrac{d^2q}{dt^2} = -R\dfrac{dq}{dt} - \dfrac{1}{c}q + E(t)$
Desplazamiento: x	Carga: q (culombios)
Velocidad: $v = \dfrac{dx}{dt}$	Corriente: $I = \dfrac{dq}{dt}$ (amperios)
Masa: m	Inductancia: L (henrios)
Amortiguamiento: b	Resistencia: R (ohmios)
Constante del resorte: k	Capacitancia: C (faradios)
Fuerza externa: $F(t)$	Voltaje aplicado, *fem*, $E(t)$ (voltios)

Tendremos presentes las siguientes leyes:

- Segunda ley de Kirchhoff: la suma algebraica de los cambios de potencial en el recorrido de cualquier malla de un circuito es cero.
- Es decir, el voltaje aplicado en un circuito cerrado es igual a la suma de las caídas de voltaje en el resto del circuito.
- La caída de voltaje a través de la resistencia es: IR.
- La caída de voltaje a través de la inductancia es: $L\dfrac{dI}{dt}$.
- La caída de voltaje a través del condensador es: $\dfrac{1}{c}q$.

EJEMPLO 1

Un circuito tiene una *fem* $E = 100e^{-5t}$ voltios, una *resistencia* de 10 ohmios y una capacitancia de 0.02 faradios. Si $q(0) = 0$, hallar: *a*. la carga y la intensidad de la corriente en cualquier instante t, y *b*. carga máxima y el tiempo necesario para obtener la carga máxima.

Voltaje proporcionado:

$$E = 100e^{-5t}$$

Caída de voltaje en la resistencia: $IR = 10I$

Caída en el condensador:

$$\frac{q}{c} = \frac{q}{0.02} = 50q$$

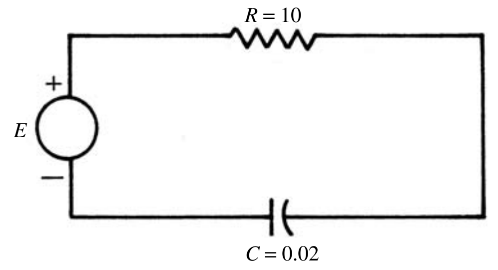


Figura 5-3.

a. Por la segunda ley de Kirchhoff:

$10I + 50q = 100e^{-5t}$, como $I = \dfrac{dq}{dt}$ entonces,

$$10\frac{dq}{dt} + 50q = 100e^{-5t}$$

o $\dfrac{dq}{dt} + 5q = 10e^{-5t}$, con $q(0) = 0$

cuya solución es: $q = 10te^{-5t}$

La intensidad de la corriente es $I = \dfrac{dq}{dt}$, es decir,

$$I = \frac{dq}{dt} = 10e^{-5t} - 50te^{-5t} = 10e^{-5t}(1 - 5t)$$

b. La carga máxima ocurre cuando: $\dfrac{dq}{dt} = 0$ entonces,

$$10e^{-5t}(1 - 5t) = 0, t = 0.2 \text{ segundos.}$$

Para este tiempo, la carga es: $q = 2e^{-1} = \dfrac{2}{e} = 0.735$ culombios.

EJEMPLO 2

Un circuito consta de una *inductancia* $I = 0.25$ henrios, una *resistencia* $R = 1$ ohmio, una *capacitancia* $C = 0.2$ faradios, una *fem* $E = 10$ sen $2t$ voltios y un interruptor *k*. Hallar: *a*. la ecuación diferencial de la carga en cualquier momento *t* y *b*. la carga y la intensidad de la corriente en *t* si al cerrar el interruptor en $t = 0$, la carga es nula.

Caída en la *resistencia:* $IR = E$

Caída en la *inductancia:*

$$L\frac{dI}{dt} = 0.25\frac{dI}{dt}$$

Caída en el condensador:

$$\frac{q}{C} = \frac{q}{0.2} = 5q$$

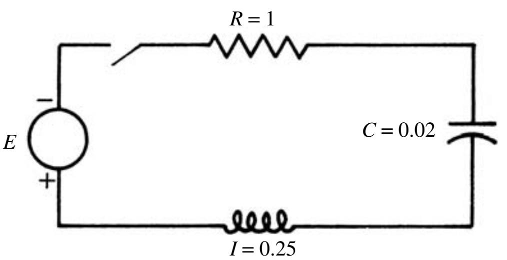


Figura 5-4.

a. Aplicando la segunda ley de Kirchhoff:

$$I + 0.25\frac{dI}{dt} + 5q = 10\,\mathrm{sen}\,2t$$

Como $I = \dfrac{dq}{dt}$, entonces, $0.25\dfrac{d^2q}{dt^2} + \dfrac{dq}{dt} + 5q = 10\,\mathrm{sen}\,2t$

o $\dfrac{d^2q}{dt^2} + 4\dfrac{dq}{dt} + 20q = 40\,\mathrm{sen}\,2t,$

es la ecuación diferencial que rige a este circuito, con las condiciones siguientes: en $t = 0$, $q = 0$, $I = 0$.

b. La solución q_h es:

$$q_h = e^{-2t}\left(c_1 \cos 4t + c_2\,\mathrm{sen}\,4t\right),$$

La solución q_p es:

$$q_p = -\cos 2t + 2\,\mathrm{sen}\,2t$$

Y la solución general es: $q = e^{-2t}\left(c_1 \cos 4t + c_2\,\mathrm{sen}\,4t\right) - \cos 2t + 2\,\mathrm{sen}\,2t$

Que para las condiciones iniciales dadas queda:

$$q = e^{-2t}\left(\cos 4t - \frac{1}{2}\mathrm{sen}\,4t\right) - \cos 2t + 2\,\mathrm{sen}\,2t$$

La intensidad de la corriente es: $I = \dfrac{dq}{dt}$; entonces,

$$I = e^{-t}(-3\,\mathrm{sen}\,4t - 4\cos 4t) + 2(\mathrm{sen}\,2t + 2\cos 2t)$$

La parte transitoria de q y de I es: q_h y q'_h y la permanente es: q_p y q'_p.

EJERCICIOS 5.4

1. Un circuito consta de una *inductancia de* $L = 0.5$ henrios, una resistencia $R = 20$ ohmios, un condensador cuya capacidad es $C = 0.0025$ faradios y una *fem* $E = 100$ voltios. Hallar la carga y la corriente, sabiendo que en $t = 0$, $q = 0$ e $I = 0$.

Respuesta: $q = 0.25[e^{-20t}(-\cos 20t - \mathrm{sen}\ 20t) + 1]$,
$I = 10e^{-20t}\ \mathrm{sen}\ 20t$

2. Un circuito eléctrico consta de una *inductancia* de $L = 0.2$ henrios, una resistencia $R = 4$ ohmios, un condensador cuya capacidad es $C = 0.01$ faradios. Hallar la carga q y la corriente I en el tiempo t, si en $t = 0$, $q =$ 0.5 columbios e $I = -1$ amperio.

Respuesta: $q = e^{-10t}\left(0.5\cos 20t + 0.2\,\mathrm{sen}\,20t\right)$,
$I = e^{-10t}\left(-12\,\mathrm{sen}\,20t - \cos 20t\right)$

3. Resolver el problema 1, sabiendo que la *fem* aplicada es $E = 50\cos 10t$

Respuesta: $q = \frac{1}{65}\left[e^{-20t}\left(-7\cos 20t - 9\,\mathrm{sen}\,20t\right) + 7\cos 10t + 4\,\mathrm{sen}\,10t\right]$

Respuesta:

$$I = \frac{1}{65}\left[e^{-20t}\left(320\,\mathrm{sen}\,20t - 40\cos 20t\right) - 70\,\mathrm{sen}\,10t + 40\cos 10t\right]$$

4. Un circuito tiene $L = 10$ henrios, $R = 90$ ohmios, $C = 0.005$ faradios y un voltaje $E = 500$ sen t. En $t = 0$ no hay carga en el circuito, pero sí hay una corriente inicial de 0.5 amperios, hallar la carga del condensador.

Respuesta: $q = \frac{9}{442}\left(169e^{-4t} - 119e^{-5t}\right) + \frac{25}{221}\left(-9\cos t + 19\,\mathrm{sen}\,t\right)$

Flexión de vigas

Consideramos vigas horizontales a aquellas que son uniformes en forma y material. El eje de simetría (línea punteada) se llama *curva elástica* y su ecuación da información acerca de la flexión de la viga producida por su propio peso y por cargas externas.

En mecánica se demuestra que el momento de flexión de todas las fuerzas exteriores que actúan sobre la viga está dado por:

$$M = \frac{EI}{R}$$

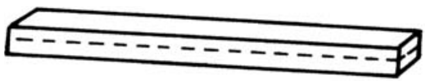


Figura 5-5.

donde E es el módulo de elasticidad de Young que depende del material y del diseño de la viga, I es el momento de inercia de la sección transversal de la viga en x, tomado con respecto a una línea horizontal que pasa por el centro de gravedad de la sección. El producto EI se llama *rigidez a la flexión* y es una constante, r es el radio de curvatura de la curva elástica con ecuación:

$$r = \frac{\left[1 + \left(y'\right)^2\right]^{3/2}}{y''}$$

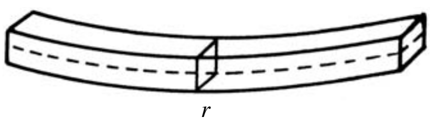


Figura 5-6.

Como y' en todos sus puntos es muy pequeña, entonces,

$$r = \frac{1}{y''}$$

de ahí que: $M = EIy''$

El momento M en la sección transversal es la suma algebraica de los momentos de las fuerzas exteriores. Suponemos que las fuerzas hacia arriba dan momentos positivos y las fuerzas hacia abajo dan momentos negativos, el eje y se toma positivo hacia arriba.

El desplazamiento y de la curva elástica desde el eje x se llama *flecha* de la viga.

EJEMPLO 1

Viga simplemente apoyada. Una viga uniforme, de longitud $l = 5$ m, apoyada según se muestra en la figura 5.7 se flexiona bajo su propio peso, que es $w = 2$ kg/m. Hallar la ecuación de la curva elástica.

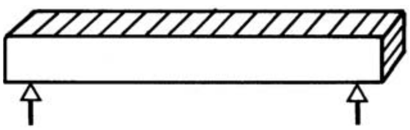


Figura 5-7.

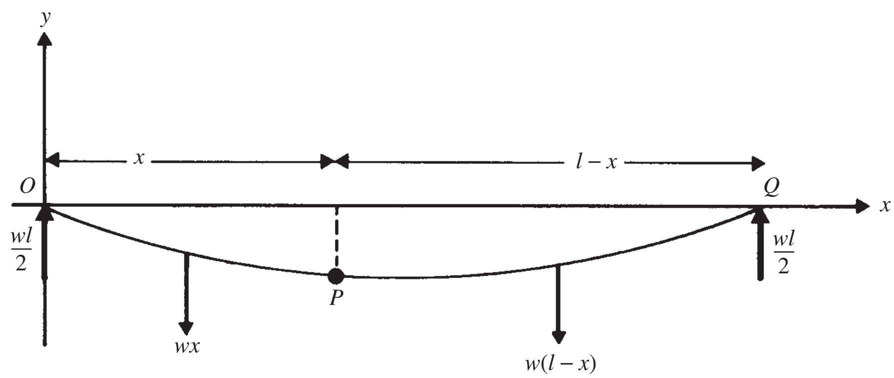


Figura 5-8.

Como la viga está simplemente apoyada, cada extremo soportará la mitad del peso de la viga: $\dfrac{wl}{2} = 5.$

Tomando un punto P a una distancia x del origen, observamos primero las fuerzas que actúan a la izquierda de P:

- Una fuerza hacia arriba $\dfrac{wl}{2}$
- Una fuerza hacia abajo wx en el centro de OP; entonces, el momento total de flexión en P es:

$$M = \frac{wl}{2}x - wx\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{wl}{2}x - \frac{w}{2}x^2$$

$$M = 5x - x^2$$

Para demostrar que el momento flector en P es independiente del segmento estudiado, vamos a ver qué pasa en PQ. Hay dos fuerzas:

- Una fuerza hacia arriba $\frac{wl}{2}$ a una distancia $l - x$ de P.
- Una fuerza hacia abajo $w(l-x)$ a una distancia $\frac{l-x}{2}$ de P.

Entonces,

$$M = \frac{wl}{2}(l-x) - w(l-x)\frac{(l-x)}{2} \quad \text{(igual que antes)}$$

$$M = \frac{wl}{2}x - \frac{w}{2}x^2$$

Sustituyendo el valor de M en la ecuación

$$M = EIy''$$

teniendo en cuenta que $y = 0$ cuando $x = 0$ y cuando $x = l$, tenemos:

$$EIy'' = \frac{wl}{2}x - \frac{w}{2}x^2$$

Integrando:

$$EIy = \frac{wl}{12}x^3 - \frac{w}{24}x^4 + c_1x + c_2$$

Para las condiciones dadas $c_2 = 0$ y $c_1 = -\frac{wl^3}{24}$

Por tanto:

$$y = \frac{w}{24EI}\left(-x^4 + 2lx^3 - l^3x\right)$$

y, en particular, para este caso:

$$y = \frac{1}{12EI}\left(-x^4 + 10x^3 - 125x\right)$$

EJEMPLO 2

Viga cantilever. (Apoyada en un extremo y libre en el otro). Una viga uniforme de longitud $l = 5$ m y con $w = 2$ kg/m tiene libre un extremo. Hallar la curva elástica y la flecha del extremo libre.

Para calcular M, es más sencillo estudiar el segmento a la derecha de P, en el que actúa la fuerza $w(l-x)$:

$$M = -w(l-x)\left(\frac{l-x}{2}\right) = \frac{-w}{2}(l-x)^2 = -(5-x)^2$$

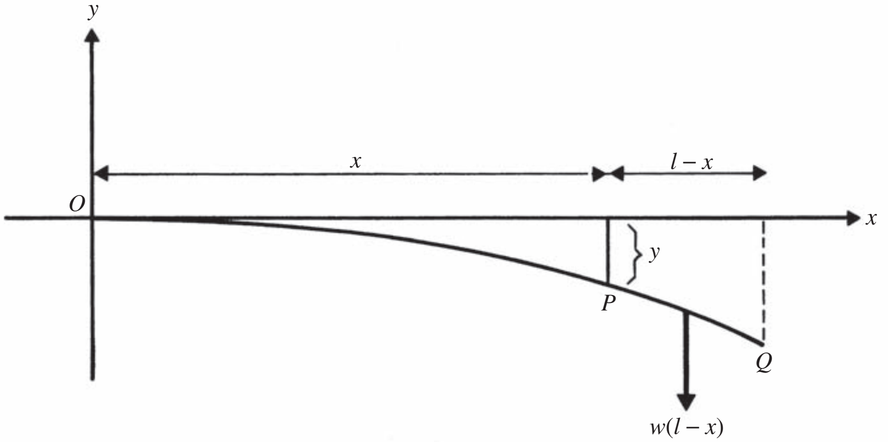


Figura 5-9.

Sustituyendo en la ecuación

$$M = EIy''$$

tenemos:

$$EIy'' = \frac{-w(l-x)^2}{2}$$

con las condiciones siguientes: cuando $x = 0$, $y = 0$, y la pendiente de la recta tangente $y' = 0$.

Integrando:

$$EIy' = \frac{w}{2} \cdot \frac{1}{3}(l-x)^3 + c_1$$

Para $x = 0$, $y = 0$, entonces, $c_1 = -\frac{w}{6}l^3$

Integrando de nuevo:

$$EIy = -\frac{w}{24}(l-x)^4 - \frac{w}{6}l^3 x + c_2$$

Para $x = 0$, $y = 0$, entonces, $c_2 = \frac{w}{24}l^4$

$$\text{y} \quad EIy = -\frac{w}{24}(l-x)^4 - \frac{w}{6}l^3 x + \frac{w}{24}l^4$$

$$\therefore y = \frac{w}{24EI}\left(-x^4 + 4lx^3 - 6l^2x^2\right)$$

La flecha será la deformación máxima que ocurre cuando $x = l$,

$$y_{\text{máx}} = -\frac{w}{8EI}l^4$$

En particular, para este caso, la curva elástica es:

$$y = \frac{1}{12EI}\left(-x^4 + 20x^3 - 150x^2\right)$$

y la flecha:

$$y_{\text{máx}} = \frac{625}{4EI}$$

EJEMPLO 3

Una viga horizontal de 8 m de longitud está empotrada en un extremo y apoyada en el otro. Hallar: *a*. la ecuación de la curva elástica si la viga tiene una carga uniforme de 4 kg/m y soporta un peso de 100 kg en el punto medio y *b*. el punto en el cual la flecha es máxima

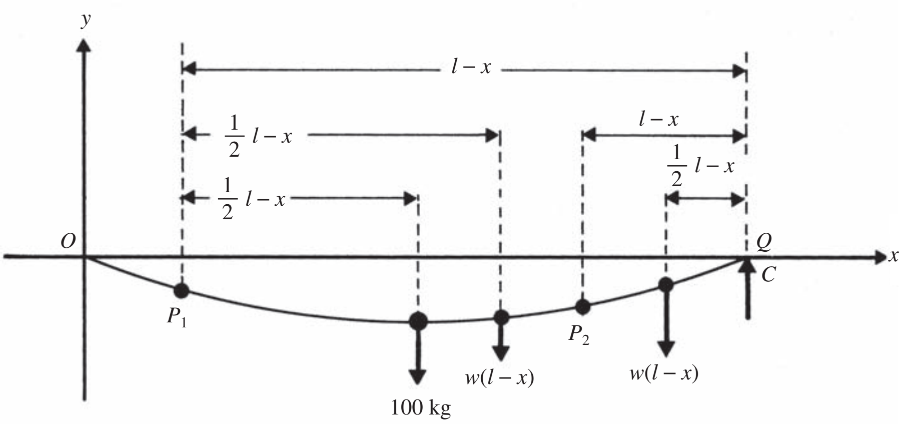


Figura 5-10.

Consideramos dos intervalos $0 < x < l/2$ y $l/2 < x < l$, para P_1Q y P_2Q, respectivamente.

a. Las fuerzas que actúan en P_1Q son: C hacia arriba (desconocida) en Q situada a $(l-x)$ m de P_1; la carga $w(l-x)$ kg en el punto medio de P_1Q situada a $\frac{1}{2}(l-x)$ m de P_1 y 100 kg a $\left(\frac{1}{2}l - x\right)$ de P_1.

Entonces,

$$EIy'' = C(l-x) - w(l-x)\frac{1}{2}(l-x) - 10(\frac{1}{2}l - x)$$

$$EIy'' = C(l-x) - \frac{w}{2}(l-x)^2 - 100(\frac{1}{2}l - x)$$

Integrando:

$$EIy' = -\frac{1}{2}C(l-x)^2 + \frac{w}{6}(l-x)^3 + 50(\frac{1}{2}l - x)^2 + c_1$$

Para $x = 0$, $y' = 0$,

$$EIy' = -\frac{1}{2}C(l-x)^2 + \frac{w}{6}(l-x)^3 + 50(\frac{1}{2}l-x)^2 + \frac{1}{2}Cl^2 - \frac{w}{6}l^3 - \frac{50}{4}l^2$$

Integrando de nuevo:

$$EIy = \frac{1}{6}C(l-x)^3 - \frac{w}{24}(l-x)^4 - \frac{50}{3}(\frac{1}{2}l-x)^3 + \left(\frac{1}{2}Cl^2 - \frac{w}{6}l^3 - \frac{50}{4}l^2\right)x + c_2$$

Como $y\,(0) = 0$, entonces,

$$EIy = \frac{1}{6}C(l-x)^3 - \frac{w}{24}(l-x)^4 - \frac{50}{3}(\frac{1}{2}l-x)^3 + \left(\frac{1}{2}Cl^2 - \frac{w}{6}l^3 - \frac{50}{4}l^2\right)x + \frac{w}{24}l^4 + \frac{50}{3}(\frac{1}{2}l)^3 - \frac{C}{6}l^3$$

Para los valores dados:

$$EIy = \frac{1}{6}C(8-x)^3 - \frac{1}{6}(8-x)^4 - \frac{50}{3}(4-x)^3 + \left(32C - \frac{1024}{3} - 800\right)x + \frac{2048}{3} + \frac{3200}{3} - \frac{C}{3}256.$$

Las fuerzas que actúan en P_2Q son C en Q a $(l-x)$ metros de P_2, la carga $w(l-x)$ kg a $\frac{1}{2}(l-x)$ m de P_2. Entonces,

$$EIy'' = C(l-x) - \frac{w}{2}(l-x)^2$$

$$EIy' = -\frac{C}{2}(l-x)^2 + \frac{w}{6}(l-x)^3 + c_1$$

$$EIy = \frac{C}{6}(l-x)^3 - \frac{w}{24}(l-x)^4 + c_1x + c_2$$

Los valores de c_1 y c_2 deben coincidir con los obtenidos antes; por tanto,

$$EIy = \frac{C}{6}(l-x)^3 - \frac{w}{24}(l-x)^4 + \left(\frac{C}{2}l^2 - \frac{w}{6}l^3 - \frac{50}{4}l^2\right)x + \frac{w}{24}l^4 + \frac{50}{24}l^3 - \frac{C}{6}l^3$$

Para los valores dados:

$$EIy = \frac{C}{6}(8-x)^3 - \frac{1}{6}(8-x)^4 + (32C - \frac{1024}{3} - 800)x + \frac{2048}{3} + \frac{3200}{3} - \frac{C}{3}256.$$

Si tomamos $x = l$ para $y = 0$, se obtiene la fuerza C:

$$0 = l\left(\frac{C}{2}l^2 - \frac{w}{6}l^3 - \frac{50}{4}l^2\right) + l^3\left(\frac{w}{24}l + \frac{50}{24} - \frac{C}{6}\right)$$

de donde:

$$C = \frac{3}{8}wl + \frac{125}{4} = \frac{173}{4}$$

Sustituyendo en las ecuaciones anteriores:

$$y = \frac{1}{24EI}(355x^3 - 2184x^2 - 4x^4),\;\; 0 \le x \le l/2$$

$$y = \frac{1}{24EI}(25600 - 19200x + 2616x^2 - 45x^3 - 4x^4), \quad l/2 \le x \le l$$

b. La y máxima de la flecha se presenta a la derecha del punto medio de la viga. Tomando $y' = 0$:

$$16x^3 + 135x^2 - 5232x + 19200 = 0$$

tiene la raíz real $x = 4.45$, aproximadamente, e indica la distancia al origen a la que está situada la flecha máxima.

EJERCICIOS 5.5

1. Una viga horizontal de 9 m de longitud está empotrada en ambos extremos. Hallar la ecuación de su curva elástica y su máxima deformación vertical cuando tiene una carga uniformemente distribuida de 1 kilogramo por metro.
   Respuesta: $y = \dfrac{1}{24EI}(35x^3 - x^4 - 2187)x, \; y_{\text{máx}} = -\dfrac{37179}{128EI}$
2. Una viga horizontal simplemente apoyada tiene una longitud de 10 m y un peso despreciable pero sufre una carga concentrada de 40 kg que está a una distancia de 2 m del extremo izquierdo (origen). Hallar la ecuación de la curva elástica.
   Respuesta: $y = \begin{cases} \dfrac{1}{3EI}(4x^3 + 400x), \; 0 \le x \le 2 \\ \dfrac{1}{3EI}(-16x^3 + 120x^2 + 400x), \; 2 \le x \le 10 \end{cases}$
3. Una viga horizontal de 8 m de longitud está empotrada en un extremo y libre en el otro. Si la carga uniformemente repartida es $w = 4$ kg/m, hallar:
   a. La ecuación de su curva elástica.
   b. la flecha máxima.
   Respuestas: *a.* $y = \dfrac{1}{6EI}(-384x^2 + 32x^3 - x^4)$ *b.* $y_{\text{máx}} = -\dfrac{2048}{EI}$
4. Una viga horizontal de 12 m de longitud está empotrada en ambos extremos. Si tiene una carga uniformemente distribuida de 3 kg/m hallar la ecuación de la curva elástica y la flecha máxima.
   Respuesta: $y = \dfrac{x^2}{8EI}(-144 + 24x - x^2), \; y_{\text{máx}} = -\dfrac{162}{EI}$
5. Resolver el problema 4 si además actúa un peso de 20 kg en el punto medio de la viga.
   Respuesta:
   $$y = \begin{cases} \dfrac{1}{24EI}(-792x^2 + 112x^3 - 3x^4), \; 0 \le x \le 6 \\ \dfrac{1}{24EI}(648x^2 + 32x^3 - 3x^4 - 8640x + 17280), \; 6 \le x \le 12 \end{cases}$$
   $$y_{\text{máx}} = -\frac{342}{EI}$$

6. Una viga sujeta en un extremo y libre en el otro tiene 6 m de longitud y varias cargas: una carga uniformemente repartida de $2\dfrac{\text{kg}}{\text{m}}$ y dos cargas de $w = 10$ kg aplicadas cada una en los puntos que distan 2 y 4 metros del extremo fijo. Hallar la ecuación de la curva elástica y la flecha máxima.

Respuesta: $y=\begin{cases}\dfrac{1}{12EI}(-x^4+64x^3-576x^2), 0\le x\le 2\\ \dfrac{1}{12EI}(160-240x-456x^2+44x^3-x^4), 2\le x\le 4,\\ \dfrac{1}{12EI}(24x^3-216x^2-x^4-1200x+1440), 4\le x\le 6,\end{cases}$

$$y_{\text{máx}}=-\frac{804}{EI}$$

Otras aplicaciones

EJEMPLO 1

Cable colgante. Un cable de peso despreciable sostiene un puente uniforme. Determinar la forma del cable.

La ecuación diferencial de un cable suspendido es:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{H}\cdot\frac{dW}{dx}$$

donde H es la fuerza horizontal aplicada en el punto más bajo del cable y W es la carga vertical total.

En este ejemplo, la carga es uniforme, por lo que $dW/dx = k$ es constante y la ecuación es:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{k}{H}$$

con condiciones $y'(0) = 0$ y $y(0) = a$ (constante que representa la distancia del punto más bajo del cable al piso del puente).

Integrando:

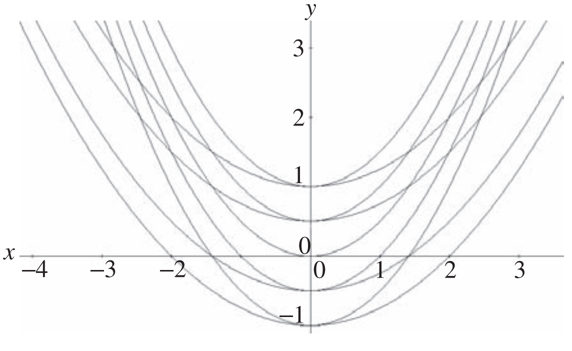
$$\frac{dy}{dx}=\frac{k}{H}x+c_1$$

Para $y'(0) = 0$ tenemos $c_1 = 0$ y:

$$y=\frac{k}{2H}x^2+c_2$$

Para $y(0) = a$ tenemos $c_2 = a$, así que:

$$y=\frac{k}{2H}x^2+a$$



que es la ecuación de una familia de parábolas; por tanto, el cable adopta la forma de parábola.

EJEMPLO 2

Péndulo. El péndulo simple consta de una masa *m* suspendida de una varilla de longitud *l* y masa despreciable. Suponiendo que el movimiento se realiza en un plano vertical, determinar el ángulo de desplazamiento θ y el periodo de vibración.

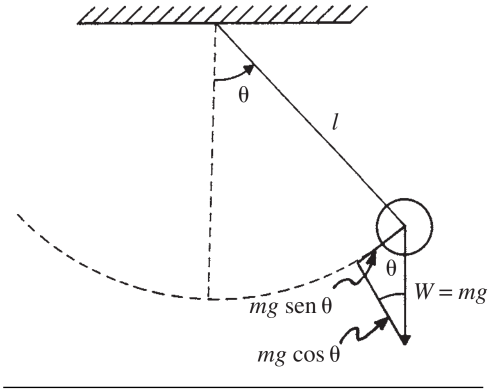


Figura 5-11.

El arco *s* de un círculo de radio *l* que se abre un ángulo θ, cumple la igualdad:

$$s = l\theta$$

y la aceleración angular es:

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Por la segunda ley de Newton, tenemos:

$$F = ma = ml\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

lo que da una fuerza tangencial que puede igualarse con la otra fuerza que representa la componente tangencial del peso *w*. Entonces,

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\,\text{sen}\,\theta$$

Es decir,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\text{sen}\,\theta = 0$$

Para valores pequeños del ángulo se puede considerar que

$$\theta = \text{sen}\,\theta$$

Entonces,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

cuya solución es:

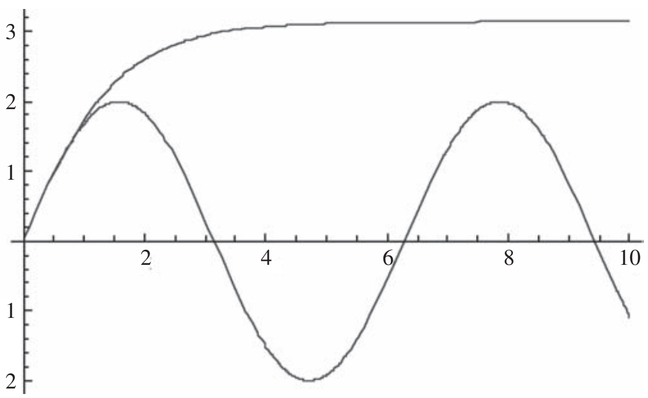
$$\theta = c_1 \operatorname{sen}\sqrt{\frac{g}{l}}t + c_2 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

El periodo es:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Con `Mathematica` se puede determinar la solución de ambas versiones del problema del péndulo, aproximaciones lineales y no lineales, para valores de g y l tales que $\frac{g}{l} = 1$ en una posición inicial $\theta_0 = 0$ y una velocidad inicial $\theta'(0) = 2$ con $l\frac{d^2\theta}{dt^2} + g\theta = 0.$

```
eqn=x'[t]+Sin[x[t]]==0
Sin[x[t]]+x'[t]==0
soln1=NDSolve[{eqn,x[0]==0,x'[0]==2},x[t],{t,0,10}]
{{x[t]→InterpolatingFunction[{{0.,10.}},<>][t]}}
plot1=Plot[x[t]/.soln1.{t,0,10},
PlotRange→All,
DisplayFunction→Identity];
eq=DSolve[{x''[t]+x[t]==0,x[0]==a,x'[0]==b},x[t],t]
{{x[t]→aCos[t]+bSin[t]}}
pen[t,a_b]=eq[[1,1,2]]
aCos[t]+bSin[t]
approx1=Plot[pen[t,0,2],{t,0,10}.
DisplayFunction→Identity];
PlotStyle→GrayLevel[.3],
Show[plot1,approx1,
DisplayFunction→SDisplayFunction]
```



EJEMPLO 3

Un cilindro circular recto de 2 m de radio está verticalmente sumergido en agua cuya densidad es 1 000 kg/m^3. Si se empuja hacia abajo y se suelta tiene un periodo de vibración de un segundo. Hallar el peso del cilindro.

Sea positiva la dirección hacia abajo, y sea y m el movimiento del cilindro en el tiempo t. Según el principio de Arquímedes, todo cuerpo sumergido, total o parcialmente, en un fluido experimenta un empuje hacia arriba igual al peso del fluido desalojado. Entonces, la variación que corresponde a la fuerza de flotación es:

$$1000\pi 2^2 y$$

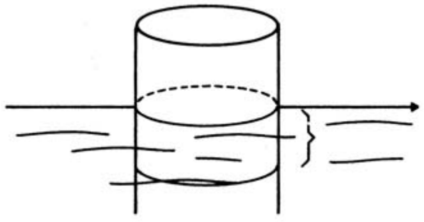


Figura 5-12.

Por lo tanto,

$$\frac{W}{g}\frac{d^2y}{dt^2} = -4000\pi y$$

(ley del movimiento vibratorio), donde W es el peso del cilindro y g = 9.8 m/seg^2; es decir,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{39200}{W}\pi y = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{39200}{W}\pi = 0 \quad \lambda = \pm\sqrt{39200\pi/W}\,i$$

$$y = c_1 \cos\sqrt{39200\pi/W}\,t + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{39200\pi/W}\,t$$

Vemos que el periodo es:

$$\frac{2\pi}{\sqrt{39200\pi/W}} = \frac{2\sqrt{\pi W}}{\sqrt{39200}}$$

Es decir,

$$1 = \frac{2\sqrt{\pi W}}{39200}$$

de donde

$$W = \frac{39200}{4\pi} = 3119 \text{ kg}$$

EJERCICIOS 5.6

1. Una cuerda cuelga de dos extremos fijos. Determinar la forma de la cuerda si su densidad es constante.

   Respuesta: $y=\dfrac{H}{w}\cosh\dfrac{w}{H}x$ es una *catenaria*.

2. Un péndulo de 1/5 m de longitud se suelta con una velocidad de 1/2 radián/seg, desde un extremo situado a 1/10 radianes respecto de la vertical hacia dicha vertical. Hallar la ecuación de movimiento.

   Respuesta: $\theta=\dfrac{1}{10}\cos 7t+\dfrac{1}{14}\operatorname{sen} 7t$

3. Una cadena colocada sobre un clavo grueso pende 1 m de un lado y 2 m del otro. Si la cadena está resbalando, hallar el tiempo que tarda en caerse si el rozamiento es despreciable.

   Respuesta: $y=\dfrac{1}{2}\left(\cosh\sqrt{\dfrac{2g}{3}}t-1\right)$

   $$t=\sqrt{\frac{3}{2g}}\ln(3+\sqrt{8})=0.69 \text{ segundos}$$

4. Resolver el problema 3 si el rozamiento es igual al peso de 0.5 m de cadena.

   Respuesta: $t=\sqrt{\dfrac{3}{2g}}\ln(5+2\sqrt{6})=0.897$

5. Una caja cúbica de 2 m de lado flota en agua. La caja sube y baja con un periodo de 1/2 seg. Si la densidad del agua es 1000 kg/m^3, hallar el peso de la caja.

   Respuesta: $W=496.4$ kg

Karl Friedrich Gauss

Niño prodigio, Gauss nació en Brunswick, Alemania. A los tres años corrigió un error de suma en las cuentas de su padre y a los 10 años resolvió instantáneamente un problema que su maestro planteó a la clase para tener un momento de tranquilidad. Se trataba de sumar todos los números del 1 al 100, y el muchacho lo resolvió encontrando mentalmente la fórmula $\dfrac{m(m+1)}{2}$ y sustituyendo en ella. Su genio llegó a ser famoso y el duque de Brunswick decidió ayudarlo económicamente. Así fue como Gauss obtuvo su doctorado en Helmstädt, habiendo hecho la mayor parte de sus estudios en Göttingen.

A los 19 años Gauss vacilaba entre dedicarse a la lingüística o a la matemática. Su descubrimiento de cómo construir un polígono de 17 lados con puras herramientas euclidianas, lo decidió a favor de esta última. Es menester recordar aquí que el problema llevaba 2 000 años sin haberse resuelto. Este hallazgo corresponde, por otra parte, al primero de 146 resultados encontrados en su diario personal después de su muerte.

En su tesis doctoral, Gauss dio por primera vez una demostración rigurosa del teorema fundamental del álgebra. Su genio fue tan variado como riguroso y se dedicó en

Karl Friedrich Gauss (1777-1855)

un principio a la teoría de los números, que desarrolló enormemente, demostrando, entre otras cosas, el teorema fundamental de la aritmética. Se interesó también en la astronomía donde, gracias a su método de los mínimos cuadrados y su gran facilidad de cómputo, predijo con éxito la posición de Ceres. En geometría creó el primer modelo no euclidiano, y en electromagnetismo demostró su célebre teorema. En ecuaciones diferenciales, Gauss dio su nombre a la hipergeométrica que abarca como casos particulares otras famosas ecuaciones.

Es curioso el hecho de su repugnancia por la enseñanza, considerando que los buenos alumnos no requieren de un maestro y que los malos no tienen por qué estudiar, Gauss marcó el principio de una época gloriosa para la matemática de su país con la aparición de una pléyade de genios, discípulos suyos o influenciados por su trabajo. En cambio, durante su juventud, se encontraba en Alemania como un gigante en un desierto y eso se comprueba con la pregunta que alguna vez harían a Laplace: “¿Quién es el mayor matemático alemán?”, a lo que contestó: “Pfaff…” “Pero, ¿y Gauss?” “¡Ah, Gauss es el mejor matemático del mundo!”

Voy y vengo
por mi biblioteca,
donde mis libros son ya luz, como los otros,
igual que por mi sueño adolescente;
y quien viene es quien quise —quien soñé—
entonces que viniera —la mujer, el hombre.
El mediodía pone solitario
el alrededor, donde
hablo, sonriente, con los que me ignoran, porque tengo,
en círculo distante, lo infinito.

JUAN RAMÓN JIMÉNEZ (Fragmento: *La obra*)

He aquí un teorema de Gauss: la ecuación $x^n - 1 = 0$ se puede resolver mediante raíces cuadradas o, de modo equivalente, el polígono regular de n vértices se puede construir con regla y compás, cuando n sea un número primo de la forma siguiente: $n = 2^{2k} + 1$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

Y otro más: toda ecuación de grado n tiene al menos una raíz en los números complejos.

Modelos de exposición sencilla y clara, aunque la demostración rigurosa sea bastante densa.

PREGUNTA:

¿Quién inventó el telégrafo eléctrico?

Propiedades metafísicas del número 5

Representa el fuego viviente, de acción circular. Pitágoras lo llama varón y hembra, alianza esencial, lo insuperable, lo inconquistable, lo que es justo por esencia y no admite disputa. Representa el deseo de la mano de obra y la purificación en el pensamiento. Promete intuición para penetrar las causas primeras y las razones últimas, impulso para buscar y encontrar.

Numeración griega, aproximadamente 400 a. C.

A’	B’	ϒ’	Δ’	E’	F’	Z’	H’	θ’	I’
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
K’	Λ’	M’	N’	Ξ’	O’	Π’	Q’	P’	
20	30	40	50	60	70	80	90	100	
Σ’	T’	γ’	Φ’	χ’	ψ’	Ω’	$\widehat{\text{H}}$	,A	
200	300	400	500	600	700	800	900	1,000	

Ejemplo: 282 = $\sigma\pi\beta$ (también usaron las letras minúsculas).

Cinco por ocho cuarenta, más siete, igual a 49.

¿Verdadero o falso?

SOLUCIÓN: $5 \times 8.40 + 7 = 49$.

La matemática y la longevidad

“Grandes” del panteón matemático: *Leibniz* vivió hasta los 70 años, *Euler* hasta los 76, *Lagrange* hasta los 78 y también *Gauss*; *Platón,* que llamó a la matemática muleta de la filosofía, medicina del alma y, según se dice, no permitió que pasara algún día de su vida sin descubrir un teorema, vivió hasta los 82 años; *Newton* hasta los 85; *Arquímedes,* probablemente el que más se acerca en genio a Newton, vivió hasta los 75, pero pudo haber vivido hasta los 100 de no haber sido degollado, mientras resolvía un problema, por un soldado impaciente e irritable; *Pitágoras* abrió una escuela a los cincuenta y tantos, se casó con una joven a los sesenta y tantos y siguió trabajando con igual energía hasta el final, cuando tenía 99 años (según otra fuente: 86 años).

Se pueden citar también: *De Morgan* (70), *Cantor* (73), *Peano*(74), *Galileo* (78), *Legendre y Hilbert* (81), *Weierstrass* (82), *Dedekind y Borel* (85), *Hadamard* (98), entre otros.

La matemática no pudo remediar las naturalezas débiles y enfermizas de *Abel* (murió a los 27 años, víctima de la tuberculosis)*, Riemann* (a los 40, de la misma enfermedad); ni tampoco los azares de la vida, como el caso de *Galois*, quien falleció a los 21 en un duelo.

¿Podríamos encontrar alguna explicación al hecho de que la mayoría de los “grandes” pasara de los 70 años? ¿Hay en el mundo un estudio que lleve todas las facultades de la mente a un ejercicio tan armonioso y completo?

HORIZONTALES

1. Viga sujeta en un extremo y el otro en voladizo.
2. Cólera, furia. Divinidad griega que representa a la Luna.
3. (Al réves). Dirigirse. Templos orientales.
4. Extremo inferior de la antena. Hidrocarburo gaseoso natural, saturado acíclico, que se desprende de los pozos de petróleo.
5. Utilizo. Nombre de constante. O. u, de lo contrario (en inglés).
6. Vocal. Carruaje antiguo. Consonante.
7. Hermanos del padre o de la madre. Conjunción. Vocales.
8. Aparato para producir oscilaciones
9. Labiérnago, arbusto oleáceo. Símbolo del oxígeno. Ilustre familia de artistas alemanes de los siglos XVII y XVIII.
10. Símbolo del rodio. Cuerpo que oscila suspendido de un punto.

VERTICALES

1. Conjuntos de conductores que recorre una corriente eléctrica.
2. Cantos, melodías, solos. Río de Alemania que desagua en el Danubio.
3. Símbolo del sodio. Barroco, recargado.
4. Consonante. Símbolo del fósforo. De esta manera. En música, abreviatura de piano.
5. Nombre propio de mujer. Alabé.
6. Abogadillo. Picapleitos (femenino). Símbolo del nitrógeno.
7. Mazorcas de maíz verde. Donad.
8. Cada uno de los libros sagrados primitivos de la India. Símbolo del argón. (Al revés) utilizo.
9. Pequeño de tamaño, chico. Lago salado de Rusia.
10. Muelle, fuerza elástica de una cosa. Símbolo del molibdeno.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2				■						
3			■							
4				■						
5				■				■		
6		■							■	
7					■		■	■		
8										■
9				■		■				
10	■		■							

6 Resolución de ecuaciones diferenciales mediante series

Guillermo Bessel
(1784-1846)

Pruebas de convergencia de series

Desarrollo de una función en series

Operaciones con series de potencias

Puntos notables

Método para resolver ecuaciones diferenciales, alrededor de puntos ordinarios, usando series de potencias

Solución de ecuaciones diferenciales alrededor de puntos singulares

Método de Frobenius. Ecuación indicial

Ecuación de Bessel

Introducción

¿Se puede demostrar que:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots=\ln 2?$$

Escribiendo de nuevo la expresión del lado izquierdo en su forma de serie de potencias (más general), tenemos:

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\ldots,$$

la cual es una serie convergente en: $-1<x\leq 1$

Derivándola término a término:

$$1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\ldots$$

resulta una serie geométrica, con razón $r=-x$, que también converge y tiene el mismo radio de convergencia (como se vio en cálculo). Entonces, esta serie tiene como suma: $\frac{1}{1+x}$.

Integrando este resultado para obtener la suma de la serie que fue derivada:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt=\ln(1+t)\Big|_0^x=\ln(1+x).$$

Concluimos:

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots=\ln(1+x) \ \text{ en } \ -1<x\leq 1$$

Hagamos $x=1$:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\ln 2$$

Como acabamos de comprobar, este capítulo nos da una herramienta poderosa para encontrar resultados notables y para resolver aquellas ecuaciones diferenciales que se dificultan por los medios anteriores o que tengan coeficientes variables. Primero se hará un repaso del tema sobre series que se vio en cálculo.

Definición 6.1

Una *serie de términos positivos* es la suma de los términos de una sucesión:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$$

En el curso de cálculo se demostraron los siguientes teoremas llamados:

Pruebas de convergencia de series

a. Teorema de *divergencia*.

Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0 \to \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

b. Prueba de la *serie geométrica.*

Sea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n r^{n-1}$ una serie geométrica, donde r es la razón.

Si $|r| \geq 1 \to$ la serie diverge.

Si $|r| < 1 \to$ la serie converge,

y converge a su suma $\dfrac{a}{1-r}$.

c. Prueba de la *integral*.

Si $a_n = f(n)$, donde $f(x)$ es continua, decreciente y positiva $\to$ si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge, $\to \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ diverge $\to \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

d. Series p (serie de Dirichlet).

De la forma: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$

Si $p > 1 \to \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ converge.

Si $p \leq 1 \to$ la serie p diverge.

e. Criterio de *comparación*:

1. Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ converge y $a_n \leq c_n$, para toda n, $\to \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

2. Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ diverge y $a_n \geq d_n$, para toda n, $\to \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

f. Criterio de *comparación por límite.*

Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series de términos positivos.

1. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = c > 0 \to$ ambas series convergen o divergen.

2. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ y si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ converge,

$\to \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

3. Si $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=+\infty$ y si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge,

$\to \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

g. Criterio de la *razón* o *cociente*.

Sea $\to \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie

y $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$

$\to$ Si $L<1$ la serie converge,

$L>1$ la serie diverge,

$L=1$ no hay información acerca de la convergencia o divergencia.

Definición 6.2

Una *serie alternante* es de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots$$

Pruebas de convergencia de las series alternantes

a. Para que una serie alternante sea convergente deben cumplirse:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ y,

2. $|a_{n+1}| < |a_n|$ para toda n.

b. Prueba de la *razón*, la cual da *convergencia absoluta*.

Clases de convergencia

Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ converge

y $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ también converge,

$\to \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ es *absolutamente convergente*.

Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ converge

y $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ diverge

$\to \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ es *condicionalmente convergente*.

Definición 6.3

Una serie de potencias es de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

(alrededor de $x = a$, según Taylor),

o bien, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$

(alrededor de $a = 0$, según Maclaurin).

Convergencia de las series de potencias

Teorema 1

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ una serie de potencias

$\rightarrow$ exactamente se cumple una de las tres:

1. La serie converge solamente cuando $x = 0$
2. La serie es absolutamente convergente para toda $x \in \Re$ (reales).
3. Existe un número $R > 0$ tal que la serie es absolutamente convergente para todos los valores de x tales que $|x| < R$ y diverge $|x| > R$.

   R es el radio de convergencia de la serie.

Definición 6.4

El *intervalo de convergencia absoluta* es el intervalo *abierto* que contiene los valores de x para los cuales la serie de potencias converge.

El *conjunto de convergencia absoluta* es la totalidad de los valores de x para los cuales la serie de potencias converge; es decir, consta del intervalo abierto más los extremos del mismo, en caso de que también la serie converja en ellos.

El *radio de convergencia* es la mitad de la longitud del intervalo abierto de convergencia absoluta.

FORMA DE ENCONTRAR LA CONVERGENCIA DE SERIES DE POTENCIAS

Prueba de razón:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1} x^{n+1}}{c_n x^n} \right| = L$$

Se toma $L < 1$ para encontrar los valores de x, en los cuales la serie converge.

FORMAS DE DETERMINAR EL RADIO DE CONVERGENCIA

1. $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$

2. $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{c_n}{c_{n+1}} \right|$

EJEMPLO 1

Hallar el intervalo de convergencia absoluta de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}(x-1)^n$$

Sean $c_n = \dfrac{n^2}{2^n}(x-1)^n$ y $c_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2}{2^{n+1}}(x-1)^{n+1}$

$$\to \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{(n+1)^2}{2^{n+1}}(x-1)^{n+1}}{\dfrac{n^2}{2^n}(x-1)^n} \right| = |x-1| \lim_{n\to\infty} \frac{2^n (n+1)^2}{2^{n+1} n^2}$$

$$= \frac{1}{2}|x-1| \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{n^2} = \frac{1}{2}|x-1| \lim_{n\to\infty} \frac{2n+2}{2n}$$

$$= \frac{1}{2}|x-1| \lim_{n\to\infty} 1 = \frac{1}{2}|x-1| = L$$

Como la condición de convergencia es $L < 1$

$$\to \frac{1}{2}|x-1| < 1, \qquad |x-1| < 2,$$

$$-2 < x-1 < 2 \to -1 < x < 3$$

$\therefore$ el intervalo de convergencia absoluta es $(-1, 3)$.

EJEMPLO 2

Hallar el intervalo de convergencia absoluta de:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)!\, x^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+2)!\, x^{n+1}}{(n+1)!\, x^n} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} (n+2) = |x| \infty$$

Como la condición de convergencia es: $|x|\infty < 1$

$\rightarrow |x| < \frac{1}{\infty}, |x| < 0$ ¡Absurdo!

Esto significa que esta serie solamente converge en $x = 0$, ya que cuando $x = 0 \rightarrow |x| \lim\limits_{n\to\infty}(n+2) = 0$

y cuando $x \neq 0 \rightarrow |x| \lim\limits_{n\to\infty}(n+2) = \infty$

$\therefore$ la serie converge en $x = 0$

EJEMPLO 3

Hallar el intervalo de convergencia absoluta de:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{x^n}{n^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}n^n}{x^n(n+1)^{n+1}}\right|$$

$$= |x|\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n(n+1)} = |x|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}$$

Tomando el $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ para ver si no da ∞ y evitar así la forma indeterminada $\infty \cdot 0$, vemos que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}{\frac{1}{n}}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{\frac{1}{n}}{n+1}\left(\frac{(n+1)-n}{(n+1)^2}\right)}{-\frac{1}{n^2}}}$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n+1}\right)}{-\frac{1}{n^2}}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{n}{n+1}\right)}$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}(-1)} = e^{-1}$$

$$\therefore |x|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = |x|e^{-1}0$$

Haciendo $|x|0 < 1 \rightarrow |x| < \infty$

y el intervalo de convergencia absoluta es $(-\infty, \infty)$.

EJEMPLO 4

Hallar el conjunto de convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3+1}(x-2)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)^{n+1}\dfrac{\sqrt{n+1}}{(n+1)^3+1}}{(x-2)^n\dfrac{\sqrt{n}}{n^3+1}}\right| = |x-2|\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^3+1\right)\sqrt{n+1}}{\left[(n+1)^3+1\right]\sqrt{n}}$$

$$= |x-2|\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+1}{n^3+3n^2+3n+2}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}}$$

$$= |x-2|\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{n^3}}{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{2}{n^3}}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}$$

$$= |x-2|(1)(1).$$

$\therefore |x-2|<1, \qquad -1<x-2<1, \qquad 1<x<3,$

intervalo de convergencia absoluta: (1, 3).

Para $x = 1$

$$\to \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n^3+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n^{-1/2}}{3n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6n^{5/2}} = 0$$

y
$$\frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)^3+1} < \frac{\sqrt{n}}{n^3+1}$$

porque
$$\frac{\left(n^3+1\right)\sqrt{n+1}}{\left[(n+1)^3+1\right]\left(n^3+1\right)} < \frac{\left[(n+1)^3+1\right]\sqrt{n}}{\left[(n+1)^3+1\right]\left(n^3+1\right)}$$

$\to$ converge absolutamente en $x = 1$

Para $x = 3$

$\to \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^3+1}$, comparándola con: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/2}}$:

Serie $p = \dfrac{5}{2} > 1 \to$ converge.

Como $\frac{\sqrt{n}}{n^3} > \frac{\sqrt{n}}{n^3+1} \to \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^3+1}$ converge.

$\therefore$ el conjunto de convergencia es $[1,3]$.

EJEMPLO 5

Hallar el radio de convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{1/n} x^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^{\frac{1}{n+1}}x^{n+2}}{e^{\frac{1}{n}}x^{n+1}}\right| = |x|\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}}$$

$$= |x|\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{n(n+1)}} = |x|(1)$$

$$\to |x| < 1, -1 < x < 1$$

Intervalo de convergencia absoluta: $(-1, 1)$

Para $x = 1$

$$\to \sum_{n=1}^{\infty} e^{1/n} \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} e^{1/n} = e^0 = 1$$

Como $1 \neq 0 \to \sum_{n=1}^{\infty} e^{1/n}$ diverge.

Para $x = -1$

$$\to \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} e^{1/n} \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} e^{1/n} = 1 \\ \therefore \text{ diverge. Conjunto de convergencia: } (-1,1) \end{cases}$$

Radio de convergencia: $R = \frac{1-(-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1 \therefore R = 1.$

O bien, $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{e^{\frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{n+1}}}\right|$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|e^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n(n+1)}} = 1 \therefore R = 1.$$

EJEMPLO 6

Hallar el intervalo, el conjunto y el radio de convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(x-5)^n}{n3^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(x-5)^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}}{\dfrac{(x-5)^n}{n3^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n3^n(x-5)^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}(x-5)^n}\right|$$

$$= \frac{1}{3}|x-5|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{1}{3}|x-5|(1),$$

$$\to \frac{1}{3}|x-5|<1, |x-5|<3, -3<x-5<3,$$

$$2<x<8.$$

$\therefore$ el intervalo de convergencia absoluta es (2, 8).

Para $x=8$

$$\to \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3^n}{n3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{1}{n}$$

Primera prueba de alternantes: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$

Segunda prueba de alternantes: $\left|\dfrac{1}{n+1}\right| < \left|\dfrac{1}{n}\right|$

en $x=8$ la serie converge condicionalmente.

Para $x=2$

$$\to \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(-3)^n}{n3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(-1)^n(-3)^n}{n3^n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n}\cdot\frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},\ \text{divergente.}$$

$\therefore$ el conjunto de convergencia es (2, 8)

Radio $R=\dfrac{8-2}{2}=\dfrac{6}{2}=3.\quad \therefore R=3$

EJEMPLO 7

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(x-1)^n}{n^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)!(x-1)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!(x-1)^n}{n^n}}\right| = |x-1|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

Pero $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{\lim_{n\to\infty} n\ln\frac{n}{n+1}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{n}{n+1}}{\frac{1}{n}}}$

$$= e^{\lim_{n\to\infty} -\frac{n^2}{n(n+1)}} = e^{\lim_{n\to\infty} -\frac{n}{n+1}} = e^{-1}.$$

$\to |x-1|e^{-1} < 1,$ $\qquad |x-1| < e,$ $\qquad -e < x-1 < e$

$$\text{y } -e+1 < x < e+1.$$

$$R = \frac{e+1-(-e+1)}{2} = \frac{2e}{2} = e,$$

Para $x = e+1 \to \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^n},$ diverge.

Comparando con $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergente, tenemos:

$$\frac{n!e^n}{n^n} \overset{?}{>} \frac{1}{n}, n!e^n \overset{?}{>} n^{n-1}$$

Lo comprobaremos por inducción:

para $k=1$ vemos $1!e^1 > 1^0, e > 1.$

Sea $k!e^k > k^{k-1}$ (1)

$\to (k+1)!e^{k+1} > (k+1)^k$, ¿será cierto? (2)

El término por el cual multiplicamos (1) para obtener (2) en el primer miembro es $(k+1)e$; ¿por qué cantidad debemos multiplicar k^{k-1} para que resulte $(k+1)^k$?

$$k^{k-1}(x) = (k+1)^k, x = \frac{(k+1)^k}{k^{k-1}} = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k k$$

Para que $(k+1)e > \left(1+\frac{1}{k}\right)^k k$, vemos si $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ es creciente, pues de ser así hará una convergencia a e.

Una sucesión es creciente si $\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1} > \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ para toda k.

Vamos a verificarlo. Comparemos:

$$\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1} ? \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$$

$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^k \left(\frac{k+2}{k+1}\right) \qquad ? \qquad \left(\frac{k+1}{k}\right)^k$, pero

$\frac{k+2}{k+1} < \frac{k+1}{k}$; porque $\frac{k(k+2)}{k(k+1)} < \frac{(k+1)^2}{k(k+1)}$

Entonces,

$$\frac{k(k+2)}{k(k+1)}\left(\frac{k+2}{k+1}\right) \qquad ? \qquad \frac{(k+1)^2}{k(k+1)}$$

$$\frac{k(k+2)^2}{k(k+1)^2} \qquad ? \qquad \frac{(k+1)^3}{k(k+1)^2}$$

Comparando los numeradores:

$$k(k+2)^2 > (k+1)^3, k^3+4k^2+4k > k^3+3k^2+3k+1,$$

Entonces, $4k^2+4k > 3k^2+3k+1$, para toda k.

$$\therefore \left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} > \left(\frac{k+1}{k}\right)^k$$

$$\to \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = e.$$

Podemos establecer:

$$(k+1)e > ek > \left(1+\frac{1}{k}\right)^k k$$

y por transitividad

$$(k+1)e > \left(1+\frac{1}{k}\right)^k k \text{ para toda } k$$

y $\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^n}$ es divergente.

$\therefore$ el conjunto de convergencia es $(-e+1, e+1)$.

EJERCICIOS 6.1

Encontrar el intervalo, el conjunto y el radio de convergencia de las siguientes series de potencias.

		Conjunto de convergencia	*Radio*
1.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2} x^n$	$(-1,1)$	1
2.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+1}$	$[-1,1]$	1
3.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n} x^n$	$\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$	$\frac{2}{3}$
4.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^2}$	$[-1,1]$	1
5.	$\sum_{n=1}^{\infty} (x-2)^n$	$(1,3)$	1
6.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$	$[-1,1)$	1
7.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}$	$(-\infty,\infty)$	∞
8.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^2+1}$	$[-3,-1]$	1
9.	$\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$	Sólo converge en $x=0$	0
10.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{9^n} x^n$	Sólo converge en $x=0$	0
11.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n$	$(-\infty,\infty)$	∞
12.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{\sqrt{n}}$	$[2,4)$	1
13.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2 2^n}$	$[0,4]$	2
14.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$(-\infty,\infty)$	∞

15.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}$	$(-1,1)$	1
16.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!x^n}$	Absolutamente convergente para toda $x \neq 0$	
17.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(x-1)^n}$	$x < 0$ o $x > 2$ $(-\infty,0) \cup (2,\infty)$	*
18.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{x^{n+1}}$	Diverge en todos los reales	
19.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (x-4)^n}{n3^n}$	$\left[\frac{17}{5}, \frac{23}{5}\right)$	$\frac{3}{5}$
20.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x-3)^n}{n}$	Sólo converge en $x = 3$	0
21.	$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$	$(-1,1)$	1
22.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}(x-2)^n$	$(-\infty,\infty)$	∞
23.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \ln n}$	$[-1,1)$	1
24.	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2n+1}$	$(-1,1]$	1
25.	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n (x-3)^n}{n}$	$\left(\frac{8}{3}, \frac{10}{3}\right]$	$\frac{1}{3}$
26.	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (x-4)^n$	$(3,5)$	1
27.	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n^2+1)}{n^3}(x-5)^n$	$(4,6]$	1
28.	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{\ln n}$	$[-3,-1)$	1
29.	$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n^2}(x-3)^n$	$[2,4]$	1
30.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}(x-3)^n$	$\left(3-\frac{e}{3}, 3+\frac{e}{3}\right)$	$\frac{e}{3}$

* No está definido el radio de convergencia para intervalos de este tipo.

En los siguientes ejercicios, elegir la opción que contiene el conjunto de convergencia absoluta y el radio de convergencia.

31. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n (x-2)^n$

a. Conjunto de convergencia absoluta $\left[\frac{1}{3},\frac{11}{3}\right)$

b. Radio de convergencia $R=1$

c. Conjunto: $\left(\frac{1}{3},\frac{11}{3}\right)$ y $R=\frac{5}{3}$

d. Conjunto: $\left(\frac{1}{3},\frac{11}{3}\right]$ y $R=1$

32. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}(x+3)^n$

a. Conjunto: $(-3,3)$ y $R=3$

b. Conjunto: $(-\infty,\infty)$ y $R=\infty$

c. Conjunto: $[-3,3]$ y $R=3$

d. Conjunto: sólo $x=-3$

33. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{7^n}(x-1)^n$

a. Intervalo: $[-1,1]$

b. Intervalo: $[-1,1)$

c. Radio: $R=1$

d. Sólo converge en $x=1$

34. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(x-4)^n}$

a. Intervalo: $(3,5), R=1$

b. Conjunto: $(-\infty,3)\cup(5,\infty)$

c. Conjunto: $[3,5]$

d. Sólo converge en $x=4$

35. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}(x-3)^n$

a. Intervalo: $\left(3-\frac{1}{e},3+\frac{1}{e}\right)$

b. Intervalo: $(-3,3), R=3$

c. Intervalo: $\left[-3,3\right], R=\dfrac{1}{e}$

d. Conjunto: $\left[-3,3\right)$

36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^3 3^n}$

a. Conjunto: $(-\infty,-6)\cup(0,\infty)$

b. Conjunto: $(-6,0], R=1$

c. Conjunto: $[-6,0], R=3$

d. Conjunto: $(-\infty,-6]\cup[0,\infty)$

37. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n-5}$

a. Conjunto: $(-1,1], R=1$

b. Conjunto: $[-1,1), R=1$

c. Conjunto: $(-1,1), R=1$

d. Conjunto: $[-1,1], R=1$

Respuestas:

31. *c*. **32.** *b*. **33.** *d*. **34.** *b*. **35.** *a*. **36.** *c*. **37.** *a*.

Desarrollo de una función en series

¿Cómo podemos aplicar estos conceptos a la resolución de ecuaciones diferenciales? y ¿por qué las hemos repasado?

Hasta ahora, el estudio de las ecuaciones diferenciales se ha limitado a las que tenían coeficientes constantes y variables en las de Cauchy-Euler, pero ¿cómo resolver las ecuaciones de la forma:

$$f(x)y''+g(x)y'+h(x)y=r(x)?$$

Donde f, g, h y r son funciones polinomiales, racionales o trascendentes. Después de algunas definiciones necesarias, se expondrá el método de solución de tales ecuaciones mediante series de potencias. Son muchas las funciones que pueden desarrollarse en series de potencias, para lo cual se emplea la fórmula de Taylor:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$$

donde $f^{(n)}(a)$ significa la *n-ésima* derivada de la función evaluada en $x=a$ y a es el valor alrededor del cual se desarrolla la serie. Si $a=0$, entonces la serie se llama de Maclaurin.

EJEMPLO 1

Encontrar la serie de potencias de la función:

$y = \ln \cos x$ para $a = 0$

$\rightarrow y = \ln \cos x$ $\quad y(0) = \ln \cos 0 = 0$

$y' = -\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\tan x$ $\quad y'(0) = -\tan 0 = 0$

$y'' = -\sec^2 x$ $\quad y''(0) = -\sec^2 0 = -1$

$y''' = -2 \sec^2 x \tan x$ $\quad y'''(0) = 0$

$y^{IV} = -2 \sec^4 x - 4 \sec^2 x \tan^2 x$ $\quad y^{IV}(0) = -2$

$y^{V} = -16 \sec^4 x \tan x - 8 \sec^2 x \tan^3 x,\ y^{V}(0) = 0$

$y^{VI} = -16 \sec^6 x - 64 \sec^4 x \tan^2 x - 16 \sec^2 x \tan^4 x - 24 \sec^4 x \tan^2 x$

$y^{VI}(0) = -16$, etcétera.

$$\rightarrow \ln \cos\ x = \frac{0x^0}{0!} + \frac{0x^1}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{0x^3}{3!} - \frac{2x^4}{4!} + \frac{0x^5}{5!} - \frac{16x^6}{6!} + \ldots$$

$$\therefore \ln \cos\ x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \ldots$$

Algunas series pueden expresarse cómodamente por su n-ésimo término.

EJEMPLO 2

Hallar la serie de potencias correspondiente a:

$y = \dfrac{1}{x}$ para $a = 1$

$y = \dfrac{1}{x} = \dfrac{0!}{x}$ $\quad y(a) = 1$

$y' = -\dfrac{1}{x^2} = -\dfrac{1!}{x^2}$ $\quad y'(1) = -1!$

$y'' = \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{2!}{x^3}$ $\quad y''(1) = 2!$

$y''' = -\dfrac{6}{x^4} = -\dfrac{3!}{x^4}$ $\quad y'''(1) = -3!$

$y^{IV} = \dfrac{24}{x^5} = \dfrac{4!}{x^5}$ $\quad y^{IV}(1) = 4!$

$$y^{V} = -\frac{120}{x^6} = -\frac{5!}{x^6} \qquad y^{V}(1) = -5!, \text{ etcétera.}$$

$$\rightarrow y = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4 - (x-1)^5 + \ldots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n, \text{ en } 0 < x < 2.$$

EJEMPLO 3

Hallar la serie de potencias de la función:

$$y = \cos^2 x \qquad \text{para } a = \frac{\pi}{4}$$

$$y = \cos^2 x \qquad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$y' = -2\cos x \,\text{sen}\, x \qquad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1$$

$$y'' = -2\cos^2 x + 2\,\text{sen}^2 x \qquad y''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$y''' = +4\cos x \,\text{sen}\, x + 4\,\text{sen}\, x \cos x \qquad y'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4$$

$$= 8\cos x \,\text{sen}\, x$$

$$y^{IV} = 8\cos^2 x - 8\,\text{sen}^2 x \qquad y^{IV}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 8\frac{1}{2} - 8\frac{1}{2} = 0$$

$$y^{V} = -16\cos x \,\text{sen}\, x - 16\cos x \,\text{sen}\, x = -32\cos x \,\text{sen}\, x$$

$$y^{V}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -32\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -16,$$

etcétera.

$$y = \frac{1}{2} - \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{4\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} - \frac{16\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^5}{5!} + \ldots$$

$$\therefore y = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{n-1}}{(2n-1)!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n-1}$$

EJERCICIOS 6.2

Representar las siguientes funciones, por medio de series de potencias, en el punto $x = a$ indicado.

1. $y = e^x, a = 0$ $\qquad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

2. $y = e^x, a = 1$ $\qquad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e(x-1)^n}{n!}$

3. $y = e^{-x}, a = 0$ $\qquad e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$

4. $y = \frac{1}{1-x}, a = 0$ $\qquad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

5. $y = \operatorname{senh} x, a = 0$ $\qquad \operatorname{senh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

6. $y = \cosh x, a = 0$ $\qquad \cosh = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

7. $y = \operatorname{sen} x, a = 0$ $\qquad \operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

8. $y = \operatorname{sen} x, a = \frac{\pi}{2}$ $\qquad \operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}}{(2n)!}$

9. $y = \cos x, a = 0$ $\qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

10. $y = \cos x, a = \pi$ $\qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-\pi)^{2n}}{(2n)!}$

11. $y = a^x, a = 0$ $\qquad a^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln a)^n}{n!}$

12. Sea $y = \ln x$, donde $x \geq 1$ para $a = 1$ $\qquad \ln x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}$

13. $y = \ln(1+x), a = 0$ $\qquad \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$

14. $y = \tan x, a = 0$ $\qquad \tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \ldots$

15. $y = \tanh^{-1} x, a = 0$ $\quad \tanh^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

16. $y = \tan^{-1} x, a = 0$ $\quad \tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

17. $y = e^{\operatorname{sen} x}, a = 0$ $\quad e^{\operatorname{sen} x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \ldots$

18. $y = e^x \operatorname{sen} x, a = 0$ $\quad e^x \operatorname{sen} x = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{30} + \ldots$

19. $y = xe^x, a = 0$ $\quad xe^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$

20. $y = e^x \cos x, a = 0$ $\quad e^x \cos x = 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{30} + \ldots$

21. $y = x^2 e^x, a = 0$ $\quad x^2 e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!}$

22. $y = \operatorname{sen} \ln x, a = 1$ $\quad \operatorname{sen} \ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!} - \ldots$

23. $y = \sqrt{1-x}, a = 0$ $\quad \sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{108} - \frac{7x^5}{256} - \ldots$

24. $y = \sqrt[3]{x}, a = 1$

$$\sqrt[3]{x} = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2 + \frac{5}{81}(x-1)^3$$
$$-\frac{10}{243}(x-1)^4 + \frac{22}{279}(x-1)^5 - \ldots$$

25. $y = e^{x^2}, a = 0$ $\quad e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$

26. $y = \ln \frac{1+x}{1-x}, a = 0$ $\quad \ln \frac{1+x}{1-x} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

27. $y = \sqrt{x}, a = 9$

$$\sqrt{x} = 3 + \frac{(x-9)}{6} - \frac{(x-9)^2}{(8)3^3} + \frac{(x-9)^3}{(16)3^5}$$
$$-\frac{5(x-9)^4}{(384)3^6} + \frac{7(x-9)^5}{(256)3^9} - \ldots$$

En los siguientes ejercicios, elegir la opción que contiene la serie de la función dada:

28. $y = \frac{e^x - 1}{x}, a = 0$

a. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n!}$

b. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{n+1}}{n!}$

c. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}$

d. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n+1)!}$

29. $y=\sqrt{x}, a=1$

a. $1+\frac{x-1}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{n!2^n}(x-1)^n$

b. $\frac{x-1}{2}-\frac{(x-1)^2}{2!2^2}+\frac{3(x-1)^3}{3!2^3}-\frac{15(x-1)^4}{4!2^4}+\ldots$

c. $\frac{x-1}{2}-\frac{(x-1)^2}{2^2}+\frac{3(x-1)^3}{2^3}-\frac{15(x-1)^4}{2^4}+\ldots$

d. $1+\frac{x-1}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^n}(x-1)^n$

30. $y=e^{-x}(1+x), a=0$

a. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n-1)}{n!}x^n$

b. $1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n-1)}{n!}x^n$

c. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n-1)}{n!}x^n$

d. $1+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n-1)}{n!}x^n$

31. $y=e^{\cos x}, a=0$

a. $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{4x^4}{4!}-\ldots$

b. $e\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{4x^4}{4!}-\ldots\right)$

c. $e\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{4x^4}{4!}-\ldots\right)$

d. $-\frac{x^2}{2!}+\frac{4x^4}{4!}-\ldots$

32. $y = \operatorname{sen}^2 x,\ a = \dfrac{\pi}{2}$

a. $-\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^2 + \dfrac{\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^4}{3} - \ldots$

b. $1-\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^2 + \dfrac{\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^4}{3} - \ldots$

c. $1-\dfrac{\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^2}{2!} + \dfrac{8\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^4}{3} - \ldots$

d. $-\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^2 + \dfrac{8\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^4}{4!} - \ldots$

Respuestas:

28. *c.* **29.** *a.* **30.** *d.* **31.** *c.* **32.** *b.*

Definición 6.5

Función analítica en un punto. La función $f(x)$ es *analítica* en x_0 si se puede desarrollar una serie de potencias de $x - x_0$

$$\rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}$$

Teorema 2. Analiticidad

1. Si $f(x)$ y $g(x)$ son analíticas en x_0

$$\rightarrow f(x)+g(x), f(x)g(x) \text{ y } f(x)/g(x),\ g(x) \neq 0$$

Son analíticas en x_0

2. Si $f(x)$ es analítica en x_0 y $f^{-1}(x)$ es la función inversa, continua, con $f'(x_0) \neq 0$

$\rightarrow f^{-1}(x)$ es analítica en x_0

3. Si $g(x)$ es analítica en x_0 y $f(x)$ es analítica en $g(x_0)$

$\rightarrow f[g(x)]$ es analítica en x_0

EJEMPLO 1

a. Las funciones e^x, cos x y sen x son analíticas en todos los reales.

Observemos:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...$$

Por la prueba de la razón obtenemos el intervalo de convergencia absoluta:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n!\,x^{n+1}}{(n+1)!\,x^n} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}$$

$= |x| 0$, como la condición de convergencia es $|x| 0 < 1$

$$\rightarrow -\infty < x < \infty \text{ con } R = \infty$$

y la función e^x converge en todos los reales

$\therefore$ la función es analítica en $x \in R$

b. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} e^{1/n} x^{n+1}$

Es analítica en toda $x \in (-1,1)$

Operaciones con series de potencias

SUMA

Dos series de potencias pueden sumarse término a término.

Sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = f(x)$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n = g(x)$

con radio de convergencia $R > 0$

$$\rightarrow f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x - x_0)^n$$

Para toda $|x - x_0| < R$

PRODUCTO

Dos series de potencias pueden multiplicarse término a término (cada término de la primera por cada término de la segunda).

Sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = f(x)$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n = g(x)$

$$\to f(x)g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots+a_nb_0\right)\left(x-x_0\right)^n$$

para toda $\left|x-x_0\right|<R$.

DERIVACIÓN

Una serie de potencias puede derivarse término a término.

Sea $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n$

una serie convergente para $\left|x-x_0\right|<R$, donde $R>0$

$$\to y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n\left(x-x_0\right)^{n-1}$$

también converge y tiene el mismo radio de convergencia que $y(x)$

INTEGRACIÓN

Una serie de potencias puede integrarse término a término.

Sea $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n$

una serie convergente para $\left|x-x_0\right|<R$, donde $R>0$

$$\to \int_0^x y(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\left(x-x_0\right)^{n+1}$$

y tiene a R como radio de convergencia.

Las demostraciones pueden encontrarse en los libros de cálculo diferencial e integral.

EJERCICIOS 6.3

Determinar si las funciones siguientes son desarrollables en series de potencias de x en el punto indicado.

1. $y=\dfrac{1}{x}$ en $x=0$

Respuesta: no.

2. $y=\dfrac{1}{x}$ en $x=1$

Respuesta: $\dfrac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(x-1\right)^n, 0<x<2.$

3. $y=\dfrac{1}{x^2}$ en $x=0$

Respuesta: no.

4. $y=\dfrac{1}{x^2}$ en $x=-1$

Respuesta: $\dfrac{1}{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x+1)^n, -2<x<0.$

5. $y=x^4+2x^3-x^2+x-6$ en $x=0$

Respuesta: sí, es el mismo polinomio.

6. $y=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-x+7$ en $x=-1$

Respuesta: $y=\dfrac{49}{6}-(x+1)-\dfrac{(x+1)^2}{2}+\dfrac{(x+1)^3}{3}$

7. $y=\sqrt{x}$ en $x=-1$

Respuesta: no.

8. ¿Será convergente la serie que resulta de restar $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{2n+1}, [-1,1)$ de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}, [-1,1)$?

Respuesta: diverge.

9. ¿Es posible encontrar dos series de términos positivos cuya suma sea convergente y cuya diferencia diverja?

Respuesta: $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty}-\dfrac{1}{n}$

10. Se dan dos series de términos positivos divergentes $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$ y $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ determinar la convergencia de su suma.

Respuesta: diverge.

11. ¿Cuál es la serie de potencias de la función x^2e^{-x}? Una vez obtenida, derivarla término a término para demostrar que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^{n+1}\frac{n+2}{n!}=4$$

Respuesta: $x^2e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{n+2}}{n!}$

12. Encontrar cos 10° con una aproximación de cuatro cifras decimales.

Respuesta: 0.9847

13. Calcular el valor de la integral mediante series de potencias, aproximando a cuatro cifras decimales.

$$\int_0^1 f(x)dx, \text{ donde } f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

Respuesta: 1.3179

14. Lo mismo que en el ejercicio 13, para: $\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^4}$

Respuesta: 0.49397.

15. Elegir la opción que contiene el valor de $\int_0^{1/4} \frac{dx}{1+x^3}$, con una aproximación de cuatro cifras decimales, usando series de potencias.

Sugerencia: usar $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

a. $0.24903 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$

b. $0.24903 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$

c. $0.25098 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$

d. $0.25098 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$

16. Elegir la opción que da el valor de $\frac{1}{\sqrt{e}}$ usando series con una aproximación de cuatro cifras decimales.

a. $e^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{384} + \frac{1}{3840} + \ldots$

b. $e^{-1/2} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \ldots$

c. $e^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \ldots$

d. $e^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{48} + \frac{1}{384} - \frac{1}{3840} + \ldots$

17. Sabiendo que $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, -1 < x < 1$ hallar la opción que contiene la serie que corresponde a la función $\frac{1}{(1-x)^3}$ y encontrar su intervalo de convergencia.

Sugerencia: usar derivación.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, -1 < x < 1$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n, 0 < x < 2$

c. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n, -2 < x < 0$

d. $\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}, -1 < x < 1$

Respuestas:

15. *b.* **16.** *d.* **17.** *d.*

Puntos notables

Definición 6.6
Punto ordinario de una ecuación diferencial de la forma: $y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$, es aquel punto x_0 en el cual ambas funciones $f(x)$ y $g(x)$ son analíticas; es decir, pueden representarse en series de potencias de $(x - x_0)$ con radio de convergencia $R > 0$.

EJEMPLO 1

Encontrar los puntos ordinarios de:

$$x\left(x^2-1\right)y'' + xy' + (x+2)y = 0$$

Primero estableceremos cuáles son exactamente las funciones $f(x)$ y $g(x)$, dividiendo la ecuación entre $x\left(x^2-1\right)$:

$$y'' + \frac{1}{x^2-1}y' + \frac{x+2}{x\left(x^2-1\right)}y = 0$$

donde $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ y $g(x) = \frac{x+2}{x\left(x^2-1\right)}$,

$f(x)$ no es analítica en $x = \pm 1$

$g(x)$ no es analítica en $x = 0$, $x = \pm 1$

$\therefore$ los puntos ordinarios de la ecuación diferencial dada son todas las $x \in \Re$, excepto $x = 0$ y $x = \pm 1$.

EJEMPLO 2

¿Será $x = 0$ un punto ordinario de la ecuación $xy'' + x^2y' + (\operatorname{sen} x)y = 0$?

$f(x) = \frac{x^2}{x} = x$ analítica en todos los $\Re$,

$$g(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x}=\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\right)$$

$$=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots$$

también es analítica en todos los $\Re$,

$\therefore$ los puntos ordinarios de esta ecuación son los reales.

Definición 6.7

Punto singular de la ecuación diferencial:

$$y''+f(x)y'+g(x)y=0$$

es aquel punto x_0, en el cual al menos una de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ no tiene representación en serie de potencias de $x-x_0$.

Se observa, por lo tanto, que un punto singular es un punto no ordinario.

EJEMPLO 1

El punto $x_0=0$ es un punto singular de la ecuación diferencial:

$$y''+x(\ln x)y'=0,$$

porque la función ln x no tiene una serie de potencias que la represente en cero.

EJEMPLO 2

Hallar los puntos singulares de:

$$x^2(x-1)y''+x^3(x^2-1)y'+xy=0$$

$f(x)=\dfrac{x^3(x^2-1)}{x^2(x-1)}=x(x-1)$ es analítica para toda x,

$g(x)=\dfrac{x}{x^2(x-1)}=\dfrac{1}{x(x-1)}$ no es analítica en 0 y 1,

$\therefore$ los puntos singulares son $x=0$ y $x=1$.

Vemos que los coeficientes polinomiales darán puntos ordinarios en donde las funciones estén definidas y puntos singulares en donde no lo estén.

EJEMPLO 3

Dada $xy'' + (\cos x)y = 0$, ¿tendrá algún punto singular?

$g(x) = \dfrac{\cos x}{x}$ no es analítica en $x = 0$.

Por lo tanto, $x = 0$ es un *punto singular* y todos los puntos $x \neq 0$ son ordinarios.

EJEMPLO 4

La ecuación de Cauchy-Euler: $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ donde a, b, c son constantes, tiene un punto singular en $x = 0$ ya que $f(x) = \dfrac{b}{ax}$ y $g(x) = \dfrac{c}{ax^2}$ no están definidas en $x = 0$. Todos los demás puntos (reales o complejos) son puntos ordinarios.

EJEMPLO 5

La ecuación de Bessel: $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - v^2\right)y = 0$ tiene un punto singular en $x = 0$.

EJEMPLO 6

La ecuación de Legendre: $\left(1 - x^2\right)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$ tiene dos puntos singulares: $x = \pm 1$.

Definición 6.8

Punto singular regular. Dada la ecuación:

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0,$$

el punto $x = x_0$ es *singular regular* si las funciones $\left(x - x_0\right)f(x)$ y $\left(x - x_0\right)^2 g(x)$ son analíticas en $x = x_0$.

NOTA: Basta que lo sean en una vecindad de x_0. Se trabajan como un límite.

Si estas nuevas funciones no tienen representación en series de potencias, entonces, $x = x_0$ se llama *punto singular irregular.*

EJEMPLO 1

Los puntos singulares de: $x^3(x^2-9)\,y''+(x+3)\,y'+(x-3)^3\,y=0$, son $x=3$, $x=0$ y $x=3$; de ellos, sólo $x=0$ es *singular irregular* los otros dos son *singulares regulares.*

Si $f(x)=\dfrac{1}{x^3(x-3)},\, g(x)=\dfrac{(x-3)^2}{x^3(x-3)}$

Para $x=-3$

$$(x+3)f(x)=\frac{x+3}{x^3(x-3)},\qquad (x+3)^2g(x)=\frac{(x-3)^2(x+3)}{x^3}$$

ya son analíticas en $x=-3$

Similarmente para $x=3$

Sin embargo, en $x=0$ no son analíticas:

$$x\,f(x)=\frac{1}{x^2(x-3)},\qquad x^2g(x)=\frac{(x-3)^2}{x(x+3)}.$$

EJEMPLO 2

$$(x-1)^2\,y''+y'+y=0$$

Sean $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2},\, g(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$

El punto $x=1$ es *singular irregular,* porque:

$$(x-1)f(x)=\frac{1}{x-1}\ \text{ y }\ (x-1)^2\,g(x)=1;$$

aunque $g(x)$ sí es analítica en $x=1$, como $f(x)$ no lo es, la ecuación no es desarrollable en potencias de $x-1$.

EJEMPLO 3

$$x^4\left(2x^2+9x-5\right)y''+xy=0$$

$$y''+\frac{1}{x^3\left(2x^2+9x-5\right)}y=0$$

$$f(x)=0$$

$$g(x)=\frac{1}{x^3\left(2x^2+9x-5\right)}=\frac{1}{x^3\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+5)}$$

$x=\dfrac{1}{2}$ y $x=-5$ son *puntos singulares regulares*

$x=0$ es un punto *singular irregular.*

EJERCICIOS 6.4

Encontrar los puntos ordinarios, *singulares regulares* o *singulares irregulares* de las siguientes ecuaciones:

		Respuestas:
1.	$xy'' + (x-1)y' + x^2 y = 0$	$x = 0$ singular regular $x \neq 0$ ordinarios
2.	$x^2(x-1)y'' + xy' = 0$	$x = 0$, $x = 1$ singular regular $x \neq 0$, $x \neq 1$ ordinarios
3.	$(x+1)^2 y'' + xy' + x^2 y = 0$	$x = -1$ singular irregular $x \neq -1$ ordinarios
4.	$x^2 y'' + e^x y' + y = 0$	$x = 0$ singular irregular $x \neq 0$ ordinarios
5.	$xy'' + xy' + (\operatorname{sen} x) y = 0$	$-\infty < x < \infty$ ordinarios
6.	$x^2 y'' + x^3 y' + (\operatorname{sen} x) y = 0$	$x = 0$ singular regular $x \neq 0$ ordinarios
7.	$(x^2 - 3x + 2)y'' - x(x-1)^2 y' + x^2 y = 0$	$x = 1$, $x = 2$ singular regular $x \neq 1$, $x \neq 2$ ordinarios
8.	$(x-3)^3 y'' + y = 0$	$x = 3$ singular irregular $x \neq 3$ ordinarios
9.	$x^3 y'' + (x^2 e^x) y' = 0$	$x = 0$ singular regular $x \neq 0$ ordinarios
10.	$xy'' + (x^2 e^x) y = 0$	$-\infty < x < \infty$ ordinarios
11.	$xy'' + (\tan x) y' + x^2 y = 0$	$\lvert x \rvert < \dfrac{\pi}{2}$ ordinarios
12.	$x^2 y'' + (e^{\operatorname{sen} x}) y' = 0$	$x = 0$ singular irregular $x \neq 0$ ordinarios
13.	$x^2 y'' + (\tanh^{-1} x) y' + x^2 y = 0$	$x = 0$ singular regular $-1 < x < 0$ y $0 < x < 1$ ordinarios

14. $xy'' + \left(\tanh^{-1} x\right) y' + x^2 y = 0$ $\qquad |x| < 1$ ordinarios

En los siguientes ejercicios elegir la opción que contenga la descripción completa de puntos notables de cada ecuación diferencial.

15. $xy'' + e^{x^2} y' + xy = 0$

a. $x = 0$ ordinario, así como el resto de los reales.

b. $x = 0$ irregular, $x \neq 0$ ordinarios.

c. $x = 0$ ordinario y $x > 0$ ordinarios.

d. $x = 0$ singular regular $x \neq 0$ ordinarios.

16. $x\left(x^2 - 1\right) y'' + (x+1) y' - y = 0$

a. Por ser coeficientes algebraicos, todos los reales son puntos ordinarios.

b. $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ singular regular.

$x \neq -1$, $x \neq 0$, $x \neq 1$ ordinarios.

c. $x = 0$ singular regular; $x = -1$, $x = 1$ singular irregular,

$x \neq -1$, $x \neq 0$, $x \neq 1$ ordinarios.

d. $x = 1$, $x = 1$ singular regular, $x \neq -1$, $x \neq 1$ ordinarios.

17. $x(x-1)^2 y'' + y' + xy = 0$

a. $x = 0$ singular regular, $x = 1$ singular irregular

$x \neq 0$, $x \neq 1$ ordinarios.

b. $x = 0$ singular irregular, $x = 1$ singular regular

$x \neq 0$, $x \neq 1$ ordinarios.

c. Todos los reales son puntos ordinarios.

d. $x = 1$ singular regular, $x \neq 1$ ordinarios.

18. $xy'' + \left(e^x \cos x\right) y' + xy = 0$

a. $x = 0$ singular irregular, $x = 1$ singular regular

$x \neq 0$, $x \neq 1$ ordinarios.

b. Todos los reales son ordinarios.

c. $x = 0$ singular regular, $x \neq 0$ ordinarios.

d. $x = 0$ singular irregular, $x \neq 0$ ordinarios.

19. $xy'' - \left(e^x \operatorname{sen} x\right) y' = 0$

a. $x = 0$ singular regular, $x \neq 0$ ordinarios.

b. $x = 0$ singular irregular, $x \neq 0$ ordinarios.

c. $x = 0$ singular irregular, $x = \pm 1$ regulares.

$x \neq 0, x \neq \pm 1$ ordinarios.

d. $-\infty < x < \infty$ son ordinarios.

20. $xy'' + x^2 y' - \left(\tan^{-1} x\right) y = 0$

a. $|x| < 1$ son ordinarios.

b. $x = 0$ singular regular, $x \neq 0$ ordinarios.

c. $x = 0$ singular irregular, $x \neq 0$ ordinarios.

d. $-\infty < x < \infty$ son ordinarios.

Respuestas:

15. *d*. El desarrollo de $e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \ldots$; su dominio es el conjunto de los reales. Entonces, $\frac{e^{x^2}}{x} = \frac{1}{x} + x + \frac{x^3}{2} + \ldots$ no está definida en $x = 0$; por tanto, x es un punto singular (se descartan *a* y *c*). Como $xf(x) = \frac{xe^{x^2}}{x} \to x = 0$ es singular regular.

16. *b*. La opción *a* olvida despejar *y* para ver si quedan definidas las funciones $f(x)$ y $g(x)$. La opción *c* no aplica bien el hecho de que $(x - x_0)$ $f(x)$ y $(x - x_0)$ $g(x)$ queden analíticas en $x = x_0$. La opción *d* está incompleta y supone $x = 0$ como punto ordinario.

17. *a*. La opción *b* cambia la condición de *irregularidad.* Para la opción *c* ver el ejercicio, 16 opción *a*. La opción *d* está incompleta y además contiene el error de la opción *b*.

18. *c*. Como $\frac{e^x \cos x}{x} = \frac{1}{x} + 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{6} + \ldots$ no está definida en $x = 0$ y sí para los reales diferentes de cero, y al aplicar $x f(x)$ se convierte en $e^x \cos x$ para $-\infty < x < \infty$; de ahí que $x = 0$ es singular regular y los demás puntos son ordinarios.

19. *d*. En este caso $\frac{e^x \operatorname{sen} x}{x} = 1 + x + \frac{2x^2}{3} - \frac{x^4}{30} - \frac{x^5}{90} + \ldots$ está definida en todos los reales.

20. *a*. Teniendo en cuenta que el dominio de la función $\tanh^{-1} x$ es $-1 < x < 1$, que su desarrollo en series es $\tanh^{-1} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots$ entonces, $\frac{\tanh^{-1} x}{x} = 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \frac{x^6}{7} + \ldots$ queda definida también para el dominio referido, puesto que $x = 0$ es un punto ordinario.

Método para resolver ecuaciones diferenciales, alrededor de puntos ordinarios, usando series de potencias

Si una ecuación diferencial es analítica en un punto x_0, entonces su solución también lo es en x_0, y como dicha solución será una función desarrollable en series de potencias, podemos suponer que, en forma general, tendrá la forma siguiente:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(x - x_0\right)^n$$

donde c_n cambia para cada función específica.

Teorema 3

Sea $y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$ una ecuación diferencial con un punto ordinario en $x = x_0$ y sean a, b constantes arbitrarias. Existirá una función única $y(x)$ analítica en x_0 que es una solución de la ecuación dada en los alrededores de x_0 y satisface las condiciones iniciales $y(x_0) = a$ y $y'(x_0) = b$. Si el dominio de f y g es $\left|x - x_0\right| < R$ con $R > 0$, entonces, $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(x - x_0\right)^n$ también es válida en el mismo intervalo. El método de solución se explicará mediante un ejemplo simplificado para $x_0 = 0$ y para una ecuación de primer orden.

EJEMPLO 1

Encontrar la solución de la siguiente ecuación diferencial, usando series de potencias.

$$y' - y = 0$$

Sea $y = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ la solución general

Derivándola: $y' = \sum_{i=1}^{\infty} i c_i x^{i-1}$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos:

$$\sum_{i=1}^{\infty} i c_i x^{i-1} - \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = 0$$

Para poder sumar las series, los exponentes de x deben ser iguales; para ello hacemos el cambio de variable correspondiente en cada serie.

En la primera serie tomamos: $i-1=k \to i=k+1$

es decir, $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{k+1}x^k$

Esto es posible porque desarrollando:

$$\sum_{i=1}^{\infty} ic_i x^{i-1} = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \dots$$

y desarrollando también:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{k+1}x^k = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \dots$$

vemos que se trata de la misma serie.

Para la segunda serie tomamos $i=k$ y la ecuación queda:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{k+1}x^k - \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0, \text{ es decir:}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \left[(k+1)c_{k+1} - c_k\right] = 0$$

Como $x^k \neq 0$ por ser la solución propuesta,

$$\to (k+1)c_{k+1} - c_k = 0 \text{ y } c_{k+1} = \frac{c_k}{k+1},\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots$$

es la fórmula de recurrencia, de la que se obtiene cada una de las constantes para cada uno de los términos de la serie solución. Así:

Para $k=0 \to c_1 = \dfrac{c_0}{0+1} = c_0$

$k=1 \to c_2 = \dfrac{c_1}{2} = \dfrac{c_0}{2}$

$k=2 \to c_3 = \dfrac{c_2}{3} = \dfrac{c_0}{6}$

$k=3 \to c_4 = \dfrac{c_3}{4} = \dfrac{c_0}{24}$,

etcétera.

$$\to y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \dots$$

$$= c_0 + c_0x + \frac{c_0}{2}x^2 + \frac{c_0}{6}x^3 + \frac{c_0}{24}x^4 + \dots$$

$$= c_0\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right)$$

$$= c_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$\therefore\ y = ce^x.$

Si resolvemos por variables separables:

$$\frac{dy}{dx} = y, \frac{dy}{y} = dx, \ln y = x + c,$$

$$y = e^{x+c} \therefore y = ce^x,$$

obtenemos el mismo resultado, con lo que se verifica el obtenido anteriormente.

EJEMPLO 2

En ocasiones, el cambio de variable en los exponentes de las sumas no conserva iguales los índices de las mismas; en este caso se extraen los términos que sobran en las sumas de menor índice para poder sumar términos semejantes.

Así: dada $y'' - xy = 0$

sea la solución: $y = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \ldots$

$\rightarrow y' = \sum_{i=1}^{\infty} i c_i x^{i-1} = c_1 + 2c_2 x + \ldots$ $\qquad y'' = \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)c_i x^{i-2}.$

Sustituyendo en la ecuación dada:

$$\sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)c_i x^{i-2} - x\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = 0$$

$$\underbrace{\sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)c_i x^{i-2}}_{k=i-2} - \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^{i+1}}_{k=i+1} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k - \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1}x^k = 0$$

Extrayendo el primer término de la primera suma, es decir, cuando $k = 0$:

$$2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k - \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1}x^k = 0$$

ya se pueden sumar las series, quedando:

$$2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty} x^k \left[(k+2)(k+1)c_{k+2} - c_{k-1} \right] = 0x^0 + 0x + 0x^2 + \ldots$$

$$\to 2c_2 = 0x^0 \quad \to c_2 = 0$$

y como $x^k \neq 0 \to (k+2)(k+1)c_{k+2} - c_{k-1} = 0$

$$\text{y } c_{k+2} = \frac{c_{k-1}}{(k+2)(k+1)}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

es la fórmula de recurrencia, entonces,

$k=1, c_3 = \dfrac{c_0}{6}$

$k=2, c_4 = \dfrac{c_1}{12}$

$k=3, c_5 = \dfrac{c_2}{20} = 0$

$k=4, c_6 = \dfrac{c_3}{30} = \dfrac{c_0}{180}$

$k=5, c_7 = \dfrac{c_4}{42} = \dfrac{c_1}{504}$

$k=6, c_8 = \dfrac{c_5}{56} = 0$

$k=7, c_9 = \dfrac{c_6}{72} = \dfrac{c_0}{12960}$

$k=8, c_{10} = \dfrac{c_7}{90} = \dfrac{c_1}{45360}$, etc.

Como $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots$

$$\to y = c_0 + c_1 x + 0x^2 + \frac{c_0}{6}x^3 + \frac{c_1}{12}x^4 + 0x^5 + \frac{c_0}{180}x^6 + \frac{c_1}{504}x^7$$

$$+ 0x^8 + \frac{c_0}{12960}x^9 + \frac{c_1}{45360}x^{10} + \ldots$$

$$\therefore y = c_0 \left(1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{180}x^6 + \frac{1}{12960}x^9 + \ldots \right)$$

$$+ c_1 \left(x + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{504}x^7 + \frac{1}{45360}x^{10} + \ldots \right)$$

EJEMPLO 3

Si la ecuación diferencial no es homogénea, la fórmula de recurrencia queda restringida a los valores para los que los coeficientes se hacen cero.

Así, si la ecuación es:

$$y'' - y = 3x^2 - x + 4$$

Suponemos $y=\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ como solución

$$\to \underbrace{\sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)c_i x^{i-2}}_{i-2=k} - \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i}_{i=k} = 3x^2 - x + 4 + 0x^3 + 0x^4 + \ldots$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k - \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 3x^2 - x + 4 + \sum_{k=3}^{\infty} 0x^k$$

para $k=0 \to 2c_2 - c_0 = 4 \to c_2 = \dfrac{4+c_0}{2}$,

porque los coeficientes del lado izquierdo de la igualdad deben ser iguales a los correspondientes coeficientes del lado derecho.

Para $k=1 \to 6c_3 - c_1 = -1 \to c_3 = \dfrac{c_1-1}{6} = \dfrac{c_1-1}{3!}$

Para $k=2 \to 12c_4 - c_2 = 3 \to c_4 = \dfrac{10+c_0}{24} = \dfrac{10+c_0}{4!}$

$$\text{y } c_{k+2} = \frac{c_k}{(k+2)(k+1)} \text{ para } k = 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$$

$k=3, c_5 = \dfrac{c_3}{20} = \dfrac{c_1-1}{120} = \dfrac{c_1-1}{5!}$

$k=4, c_6 = \dfrac{c_4}{30} = \dfrac{10+c_0}{720} = \dfrac{10+c_0}{6!}$

$k=5, c_7 = \dfrac{c_5}{42} = \dfrac{c_1-1}{5040} = \dfrac{c_1-1}{7!}$

$k=6, c_8 = \dfrac{c_6}{56} = \dfrac{10+c_0}{6!7\cdot 8} = \dfrac{10+c_0}{8!}$, etcétera.

Sustituyendo los coeficientes en la serie solución:

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \ldots$$

$$y = c_0 + c_1x + \frac{4+c_0}{2!}x^2 + \frac{c_1-1}{3!}x^3 + \frac{10+c_0}{4!}x^4 + \frac{c_1-1}{5!}x^5 + \frac{10+c_0}{6!}x^6 + \frac{c_1-1}{7!}x^7 + \frac{10+c_0}{8!}x^8 + \ldots$$

Agrupando:

$$y = c_0\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots\right) + c_1\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots\right)$$

$$+ 2x^2 - \frac{x^3}{3!} + 10\frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + 10\frac{x^6}{6!} - \frac{x^7}{7!} + 10\frac{x^8}{8!} + \ldots$$

$$y = c_0 \cosh x + c_1 \operatorname{senh} x + 10\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots\right)$$

$$-\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots\right) + x - 10\left(1 + \frac{x^2}{2!}\right) + 2x^2$$

Se sumaron y restaron los términos $10\left(1+\frac{x^2}{2!}\right)$ y x para completar dos series más,

$\rightarrow y = c_0 \cosh x + c_1 \operatorname{senh} x + 10\cosh x - \operatorname{senh} x + x - 10 - 5x^2 + 2x^2$

$\therefore y = (c_0 + 10)\cosh x + (c_1 - 1)\operatorname{senh} x - 3x^2 + x - 10.$

EJERCICIOS 6.5

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales usando series de potencias.

1. $xy' = y + 1$

Respuesta: $y = -1 + c_1 x$

2. $(x-1)y' + (2x+1)y = 0$

Respuesta: $y = c_0\left(1 + x + 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + \frac{11}{3}x^4 + \frac{71}{15}x^5 + \ldots\right)$

3. $(x^2 + x)y' + (2x+1)y = 0$

Respuesta: $y = c_1(x + x^2)$

4. $xy' - y = 0$

Respuesta: $y = c_1 x$

5. $x(x^3 - 1)y' - (4x^3 - 1)y = 0$

Respuesta: $y = c_1(x - x^4)$

6. $x(x^2+1)y' = y(3x^2+1)$

Respuesta: $y = c_1(x + x^3)$

7. $(x-1)y' - y = 0$

Respuesta: $y = c_0(1 - x)$

8. $y' + y = 0$

Respuesta: $y = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} = c_0 e^{-x}$

9. $(1+x)y' = 1$

Respuesta: $y = c_0 + \ln(1+x)$ o $y = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$

10. $y'' - xy' - y = 0$

Respuesta: $y = c_0\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{48} + \ldots\right) + c_1\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{15} + \ldots\right)$

11. $(1 - x)y'' + y = 0$

Respuesta: $y = c_0\left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} + \ldots\right) + c_1\left(x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \ldots\right)$

12. $y'' + 2x^2y = 0$

Respuesta: $y = c_0\left(1 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^8}{168} - \ldots\right) + c_1\left(x - \frac{x^5}{10} + \frac{x^9}{360} - \ldots\right)$

13. $y''(1 + x^2)y = 0$

Respuesta: $y = c_0\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{48} + \ldots\right) + c_1\left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{7x^5}{120} + \frac{3x^7}{560} + \ldots\right)$

14. $y'' + x^2y' - xy = 0$

Respuesta: $y = c_0\left(1 + \frac{x^3}{6} - \frac{x^6}{90} + \frac{x^9}{1296} - \ldots\right) + c_1x$

15. $y'' + xy' + x^2y = 2x^2$

Respuesta: $y = c_0\left(1 - \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{90} + \frac{x^8}{3360} + \ldots\right)$

$+ c_1\left(x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} + \frac{x^7}{144} + \ldots\right)$

$+\left(\frac{x^4}{6} - \frac{x^6}{45} - \frac{x^8}{1680} + \ldots\right)$

16. $y'' - (x^2 - 1)y' + y = 0$

Respuesta: $y = c_0\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{7x^5}{120} + \frac{19x^6}{720} - \frac{x^7}{420} + \ldots\right)$

$+ c_1\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{3x^5}{40} + \frac{x^6}{120} + \frac{x^7}{80} + \ldots\right)$

17. $y'' - 2xy = x^2$

Respuesta: $y = c_0\left(1 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{45} + \frac{x^9}{1620} + \ldots\right)$

$+ c_1\left(x + \frac{x^4}{6} + \frac{x^7}{126} + \ldots\right) + \left(\frac{x^4}{12} + \frac{x^7}{252} + \ldots\right)$

18. $y'' - ye^x = 0$

Sugerencia: tomar ye^x como $\left(c_0 + c_1 + c_2x^2 + ...\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...\right)$ y usar el producto de los primeros términos.

Respuesta: $y = c_0\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{24} + \frac{13x^6}{720} + ...\right)$
$+ c_1\left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{30} + \frac{x^6}{72} + ...\right)$

19. $y''' + x^2y' = 0$

Respuesta: $y = c_0 + c_1\left(x - \frac{x^5}{60} + \frac{x^9}{6048} - \frac{x^{13}}{1153152} + ...\right)$
$+ c_2\left(x^2 - \frac{x^6}{60} + \frac{x^{10}}{7200} - \frac{x^{14}}{1572480}\right)$

20. $y'' + x^2y = x^2 + x + 1$

Respuesta: $y = c_0\left(1 - \frac{x^4}{12} + \frac{x^8}{672} - ...\right) + c_1\left(x - \frac{x^5}{20} + \frac{x^9}{1440} - ...\right)$
$+ \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{60} - \frac{x^7}{252} - \frac{x^8}{672} + \frac{x^{10}}{5400}$
$+ \frac{x^{11}}{27720} + ...$

21. $y'' - xy' = x^2 - 2x$

Respuesta: $y = c_0 + c_1\left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40} + \frac{x^7}{336} + ...\right)$
$+ \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{20} + \frac{x^6}{90} - \frac{x^7}{168} + \frac{x^8}{840} - ...\right)$

22. $xy'' + x^2y' = x^3 + 4x$

Respuesta: $y = c_0 + c_1\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40} - \frac{x^7}{336} + \frac{x^9}{3456} - ...\right)$
$+ \left(2x^2 - \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{30} - \frac{x^8}{280} + ...\right)$

23. $y'' - xy' = e^{-x}$

Respuesta: $y = c_0 + c_1\left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40} + \frac{x^7}{336} + ...\right)$
$+ \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{30} + \frac{13x^6}{720} - \frac{x^7}{240} + ...\right)$

24. $y'' + xy' + (2x-1)y = 0$

Respuesta: $y = c_0\left(1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{24}-\frac{x^5}{60}+\frac{19x^6}{720}+\frac{9x^7}{2520}+...\right)$

$+c_1\left(x-\frac{x^4}{6}+\frac{x^6}{60}+\frac{x^7}{126}+...\right)$

25. $y''' - xy = x$

Respuesta: $y = c_0\left(1+\frac{x^4}{4!}+\frac{5x^8}{8!}+...\right)+c_1\left(x+\frac{2x^5}{5!}+\frac{12x^9}{9!}+...\right)$

$+c_2\left(x^2+\frac{6x^6}{6!}+\frac{42x^{10}}{10!}+...\right)+\left(\frac{x^4}{4!}+\frac{5x^8}{8!}+\frac{45x^{12}}{12!}+...\right)$

26. $y'' + 4xy = 0$

Respuesta: $y = c_0\left(1-\frac{4x^3}{2.3}+\frac{4^2x^6}{2.3.5.6}-...\right)+c_1\left(x-\frac{4x^4}{3.4}+\frac{4^2x^7}{3.4.6.7}-...\right)$

o $\quad y = c_0\left(1-\frac{2}{3}x^3+\frac{4}{45}x^6-...\right)+c_1\left(x-\frac{1}{3}x^4+\frac{2}{63}x^7-...\right)$

27. Encontrar la opción que contiene la solución de la siguiente ecuación. (Nota: En este caso hay más de una respuesta correcta.)

$$y'' - y = 0$$

a. $y = c_0\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{2x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+...\right)+c_1\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+...\right)$

b. $y = c_2e^x + c_3e^{-x}$

c. $y = c_0 + c_1\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...\right)+c_2\left(x^2+\frac{x^4}{12}+\frac{x^6}{360}+...\right)$

d. $y = c_0\cosh x + c_1\operatorname{senh} x$

28. Una sola opción contiene la solución de: $y'' - 2x^2y = 0$. ¿Cuál es?

a. $y = c_0\left(1+x^2+\frac{x^4}{6}+\frac{x^6}{90}+\frac{x^8}{2520}...\right)$

$+c_1\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{30}+\frac{x^7}{630}+\frac{x^9}{22680}...\right)$

b. $y = c_0\left(1-x^2+\frac{x^4}{6}-\frac{x^6}{90}+...\right)+c_1\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{30}-\frac{x^7}{630}+...\right)$

c. $y = c_0\left(1+\frac{x^4}{6}+\frac{x^8}{168}+...\right)+c_1\left(x+\frac{x^5}{10}+\frac{x^9}{360}+...\right)$

d. $y = c_0\left(1-\frac{x^4}{6}+\frac{x^8}{168}-...\right)+c_1\left(x-\frac{x^5}{10}+\frac{x^9}{36}-...\right)$

29. Hallar la opción que contiene la fórmula de recurrencia de: $y' - 2xy = 0$

a. $c_{k+1} = \dfrac{-2c_{k-1}}{k+1}, \ \ k = 1, 2, 3, 4, \dots$

b. $c_{k+1} = \dfrac{2c_{k-1}}{k+1}, \ \ k = 0, 1, 2, 3, \dots$

c. $c_{k+1} = \dfrac{-2c_{k-1}}{k+1}, \ \ k = 0, 1, 2, 3, \dots$

d. $c_{k+1} = \dfrac{2c_{k-1}}{k+1}, \ \ k = 1, 2, 3, 4, \dots$

30. Hallar la opción que contiene la fórmula de recurrencia de:

$$(x-1)y'' + y' = 0$$

a. $c_{k+2} = \dfrac{(k+1)^2 c_{k+1}}{(k+2)}, \ \ k = 0, 1, 2, \dots$

b. $c_{k+2} = \dfrac{(1+k+k^2)c_{k+1}}{(k+2)(k+1)}, \ \ k = 0, 1, 2, \dots$

c. $c_{k+2} = \dfrac{(k+1)c_{k+1}}{k+2}, \ \ k = 1, 2, 3, \dots$

d. $c_{k+2} = \dfrac{(1+k+k^2)c_{k+1}}{(k+2)}, \ \ k = 1, 2, 3, \dots$

31. Elegir la opción que contiene la solución de: $y'' - xy = 2$

a. $y = c_0\left(1 + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^6}{180} + \dfrac{x^9}{12960} + \dots\right)$
$\quad + c_1\left(x + \dfrac{x^4}{12} + \dfrac{x^7}{504} + \dots\right) + \left(x^2 + \dfrac{x^5}{20} + \dfrac{x^8}{1120} + \dots\right)$

b. $y = c_0\left(1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + \dfrac{x^8}{8!} + \dots\right) + c_1\left(x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^7}{7!} + \dfrac{x^9}{9!} + \dots\right)$
$\quad + \left(x^2 + \dfrac{x^4}{12} + \dfrac{x^6}{360} + \dfrac{x^8}{20160} + \dots\right)$

c. $y = c_0\left(1 - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^6}{180} - \dfrac{x^9}{12960} + \dots\right) + c_1\left(x - \dfrac{x^4}{12} + \dfrac{x^7}{504} + \dots\right)$
$\quad + \left(x^2 - \dfrac{x^5}{20} + \dots\right)$

d. $y = c_0\left(1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \dots\right) + c_1\left(x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^7}{7!} \dots\right)$
$\quad + \left(x^2 - \dfrac{x^4}{12} + \dfrac{x^6}{360} - \dots\right)$

Respuestas:

27. *a*. *b*. *d*. Puesto que $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$ y $\operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$

y como $\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ y $\operatorname{senh} x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$

$$\rightarrow y = \frac{c_0}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) + \frac{c_1}{2} = \left(e^x - e^{-x}\right)$$

$$y = e^x\left(\frac{c_0}{2} + \frac{c_1}{2}\right) + e^{-x}\left(\frac{c_0}{2} - \frac{c_1}{2}\right)$$

$$y = c_2 e^x + c_3 e^{-x}$$

La opción *c* no está correcta porque supone que la fórmula de recurrencia se aplica para $k = 1, 2, 3, \ldots$, sin tomar en cuenta el cero, y aparecen tres constantes arbitrarias en una ecuación diferencial de segundo orden.

28. *c*. La opción *a* contiene el error de no haber multiplicado x^2 por y. Las opciones *b* y *d* suponen que la y estuvo multiplicada por $+2$ y por $+2x^2$, respectivamente.

29. *d*. La opción *a* supone que la ecuación es $y' + 2xy = 0$. La opción *b* no contempla una operación con series con el mismo índice inicial. La opción *c* contiene los errores de las opciones *a* y *b*.

30. *c*. La opción *a* contiene un error de simplificación. La opción *b* tiene un error en el cambio de índices. La opción *d* contiene los errores de *a* y *b*.

31. *a*. La opción *b* considera, por error, que la fórmula de recurrencia es

$c_{k+2} = \frac{c_k}{(k+2)(k+1)}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ siendo en realidad

$c_{k+2} = \frac{c_{k-1}}{(k+2)(k+1)}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ La opción *c* supone que la ecuación es $y'' + xy = 2$. La opción *d* contiene los errores de *b* y *c*.

Solución de ecuaciones diferenciales alrededor de puntos singulares

A veces no se pueden encontrar soluciones en series de una ecuación diferencial como las expuestas anteriormente. Entonces, puede suponerse una solución del tipo:

$y = x^r \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$, donde r es una constante.

Esta serie es una generalización de $y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$, puesto que cuando $r = 0$ se convierte en ella.

Teorema 4

Sea $y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$ una ecuación diferencial con un punto singular regular en $x = x_0$, entonces, siempre existe *al menos* una solución de la forma:

$$y = (x - x_0)^r \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x - x_0)^m = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x - x_0)^{m+r} \tag{1}$$

que converge en $0 < |x - x_0| < R$

Esta serie recibe el nombre de *serie de Frobenius.* Especificando:

Si $x = x_0$ es un punto ordinario $\rightarrow r = 0$ y (1) es la solución general.

Si $x = x_0$ es un punto singular regular $\rightarrow$ (1) dará una solución o la solución general.

Si $x = x_0$ es un punto singular irregular $\rightarrow$ pueden o no existir soluciones de la forma (1).

Método de Frobenius. Ecuación indicial

Para resolver una ecuación diferencial por el método de Frobenius, suponemos una serie para $x = x_0$ de la forma:

$$y = x^r \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r}$$

Derivando:

$$y' = \sum_{m=0}^{\infty} (m + r) c_m x^{m+r-1}$$

$$y'' = \sum_{m=0}^{\infty} (m + r)(m + r - 1) c_m x^{m+r-2}$$

Sustituyendo en la ecuación, e igualando coeficientes, obtenemos una ecuación llamada *ecuación indicial* que provee dos valores para r. Se va a deducir dicha ecuación a partir de la forma general de una ecuación diferencial con puntos singulares:

$$y'' + \frac{a(x)}{x} y' + \frac{b(x)}{x^2} y = 0$$

donde $a(x)$ y $b(x)$ son funciones analíticas en $x = 0$.

Multiplicando la ecuación por x^2:

$$x^2 y'' + a(x) x y' + b(x) y = 0$$

Sean:

$$a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \sum_{m=0} a_m x^m$$

$$b(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots = \sum_{m=0} b_m x^m$$

Sustituyendo y y sus derivadas tenemos:

$$x^2 \sum_{m=0} (m+r)(m+r-1) c_m x^{m+r-2} + \sum_{m=0} a_m x^m (x) \sum_{m=0} (m+r) c_m x^{m+r-1}$$

$$+ \sum_{m=0} b_m x^m \sum_{m=0} c_m x^{m+r} = 0$$

$$\sum_{m=0} (m+r)(m+r-1) c_m x^{m+r} + \sum_{m=0} a_m x^m \sum_{m=0} (m+r) c_m x^{m+r}$$

$$+ \sum_{m=0} b_m x^m \sum_{m=0} c_m x^{m+r} = 0$$

Para $m = 0$, e igualando coeficientes:

$$r(r-1) c_0 x^r + a_0 r c_0 x^r + b_0 x^r c_0 = 0$$

$$c_0 x^r \left[r(r-1) + a_0 r + b_0 \right] = 0$$

El método considera siempre $c_0 \neq 0$; entonces,

$$r^2 + (a_0 - 1) r + b_0 = 0$$

es la *ecuación indicial* con raíces r_1 y r_2.

EJEMPLO 1

Aplicando el método de Frobenius hallar la ecuación de índices de la ecuación: $2xy'' - y' + 2y = 0$, que tiene un punto singular regular en $x_0 = 0$

Despejando y'':

$$y'' - \frac{1}{2x} y' + \frac{1}{x} y = 0$$

Entonces, $xf(x) = -\frac{1}{2}$ y $x^2 g(x) = x$.

El desarrollo en series de $xf(x)$ tiene un único elemento que es precisamente $a_0 = -\frac{1}{2}$, y el desarrollo de $x^2 g(x) = x$ también tiene un elemento cuyo coeficiente es b_1, esto quiere decir que $b_0 = 0$.

Así:

$$r^2+\left(-\frac{1}{2}-1\right)r+0=0$$

$$r\left(r-\frac{3}{2}\right)=0\rightarrow\begin{cases}r_1=\dfrac{3}{2}\\ r_2=0\end{cases}$$

También podemos encontrar la ecuación de índices de esta forma:

Sea: $y=\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^{m+r}$

$$y'=\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)c_m x^{m+r-1}$$

$$y''=\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r-2}$$

Sustituyendo en la ecuación dada:

$$2\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r-1}-\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)c_m x^{m+r-1}$$

$$+2\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^{m+r}=0$$

Se toman las sumas en donde la x tiene menor exponente y $m=0$:

$$2\left[r(r-1)\right]c_0-rc_0=0$$

y $c_0\left[r(2r-3)\right]=0$ es la *ecuación de índices.*

Aquí Frobenius pone siempre una condición: $c_0\neq 0$, entonces,

$$r(2r-3)=0\rightarrow\begin{cases}r_1=\dfrac{3}{2}\\ r_2=0\end{cases}$$

En todos los casos se le asigna a r_1 la *raíz mayor*, y por el teorema anterior queda asegurada *al menos* una solución de la forma:

$$y_1=x^{3/2}\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^m$$

Nada más queda determinar el valor de los coeficientes c_m por el método del inciso anterior.

En los casos en que r_1 y r_2, raíces de la ecuación indicial, son reales (donde *siempre* consideramos $r_1 > r_2$) a veces puede obtenerse una segunda serie solución que junto con la primera serie formará la solución general de la ecuación diferencial. Estudiaremos tres casos:

CASO 1. $r_1 - r_2 \neq$ número entero.

$$\rightarrow y_1 = x^{r_1}\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m, c_0 \neq 0$$

$$y_2 = x^{r_2}\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m, b_0 \neq 0.$$

CASO 2. $r_1 = r_2 = r$

$$\rightarrow y_1 = x^{r}\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m, c_0 \neq 0$$

$$y_2 = y_1 \ln x + x^{r}\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m.$$

CASO 3. $r_1 - r_2 =$ entero positivo

$$\rightarrow y_1 = x^{r_1}\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m, c_0 \neq 0$$

$y_2 = ky_1 \ln x + x^{r_2}\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m, b_0 \neq 0,$ donde k puede ser cero.

Por supuesto, y_1 y y_2 son linealmente independientes y la solución general es, en todos los casos: $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$.

Raíces que no difieren en un número entero

EJEMPLO 2

Encontrar la solución general de la ecuación del ejemplo precedente:

$$2xy'' - y' + 2y = 0$$

La ecuación indicial dio: $r_1 = \dfrac{3}{2}, r_2 = 0,$

$$\rightarrow r_1 - r_2 = \frac{3}{2} \neq \text{entero}$$

$$\therefore y_1 = x^{3/2}\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \text{ y } y_2 = x^0 \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m$$

Partiendo de la sustitución que se hizo de y y sus derivadas en la ecuación:

$$2\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r-1} - \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)c_m x^{m+r-1}$$

$+2\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^{m+r} = 0$ y multiplicando por x:

$$\underbrace{2\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r}}_{m=k} - \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)c_m x^{m+r}}_{m=k}$$

$$\underbrace{+2\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^{m+r+1}}_{m+1=k} = 0$$

$$2\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)c_k x^{k+r} - \sum_{k=0}^{\infty}(k+r)c_k x^{k+r} + 2\sum_{k=1}^{\infty}c_{k-1}x^{k+r} = 0$$

Tomando un término de las dos primeras sumas para igualar los índices:

$$\underbrace{2\left[r(r-1)c_0\right] - rc_0}_{\text{ecuación indicial}} = 0$$

$c_0\left(2r^2 - 3r\right) = 0$ como: $c_0 \neq 0$

entonces, $r(2r-3) = 0 \rightarrow r_1 = \dfrac{3}{2}, r_2 = 0$

$$2\sum_{k=1}^{\infty}(k+r)(k+r-1)c_k x^{k+r} - \sum_{k=1}^{\infty}(k+r)c_k x^{k+r} + 2\sum_{k=1}^{\infty}c_{k-1}x^{k+r} = 0$$

La ecuación de recurrencia, para $k = 1, 2, 3, \ldots$ es:

$$c_k = \frac{-2c_{k-1}}{(k+r)(2k+2r-3)},$$

para $r_1 = \dfrac{3}{2}$

$$c_k = \frac{-2c_{k-1}}{\left(k+\frac{3}{2}\right)2k} = \frac{-2c_{k-1}}{k(2k+3)},\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

Para $k = 1$ $\qquad c_1 = \dfrac{-2c_0}{5}$

$k = 2$ $\qquad c_2 = \dfrac{-2c_1}{14} = \dfrac{2}{35}c_0$

$k = 3$ $\qquad c_3 = \dfrac{-2c_2}{27} = \dfrac{-4}{945}c_0$

$k = 4$ $\qquad c_4 = \dfrac{-2c_3}{44} = \dfrac{2}{10395}c_0$, etcétera.

Si $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots$

$$\to y_1 = c_0 - \frac{2}{5} c_0 x + \frac{2}{35} c_0 x^2 - \frac{4}{945} c_0 x^3 + \frac{2}{10395} c_0 x^4 - \ldots$$

$$y_1 = c_0 \left(1 - \frac{2}{5} x + \frac{2}{35} x^2 - \frac{4}{945} x^3 + \ldots \right)$$

Volviendo a la ecuación de recurrencia para $r = 0$, tenemos:

$$b_k = \frac{-2b_{k-1}}{k(2k-3)}, \ k = 1, 2, 3, \ldots$$

Para $k = 1$ $\quad b_1 = \frac{-2c_0}{-1} = 2b_0$

$k = 2$ $\quad b_2 = \frac{-2c_1}{2} = -c_1 = -2b_0$

$k = 3$ $\quad b_3 = \frac{-2c_2}{9} = \frac{4}{9} b_0$

$k = 4$ $\quad b_4 = \frac{-2c_3}{20} = \frac{-2}{45} b_0$

$k = 5$ $\quad b_5 = \frac{-2c_4}{35} = \frac{4}{1575} b_0$, etcétera.

$$y_2 = b_0 \left(1 + 2x - 2x^2 + \frac{4}{9} x^3 - \frac{2}{45} x^4 + \ldots \right)$$

$$\therefore y = c_0 \left(1 - \frac{2}{5} x + \frac{4}{35} x^2 - \frac{4}{945} x^3 + \ldots \right) + b_0 \left(1 + 2x - 2x^2 + \ldots \right)$$

es la solución general.

Raíces iguales de la ecuación indicial

EJEMPLO 3

Resolver:

$$x^3 y'' - x^2 (1 + x) y' + xy = 0$$

Sea la solución: $y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r}$

y $y' = \sum_{m=0}^{\infty} (m + r) c_m x^{m+r-1}$, $\qquad y'' = \sum_{m=0}^{\infty} (m + r)(m + r - 1) c_m x^{m+r-2}$

Sustituyendo en la ecuación dada:

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m + r)(m + r - 1) c_m x^{m+r+1} - \sum_{m=0}^{\infty} (m + r) c_m x^{m+r+1}$$

$$- \sum_{m=0}^{\infty} (m + r) c_m x^{m+r+2} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r+1} = 0$$

Tomando las sumas de menor exponente en las x, tenemos para $m = 0$:

$$r(r-1)c_0 - rc_0 + c_0 = 0,$$

$$c_0\left(r^2 - 2r + 1\right) = 0, \text{ como } c_0 \neq 0 \to (r-1)^2 = 0$$

$$r_1 = r_2 = r = 1,$$

De la ecuación de índices $(r-1)^2 = 0$ obtenemos dos raíces iguales, entonces, la forma de la solución es:

$$y_1 = x^r \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \text{ y } y_2 = y_1 \ln x + x^r \sum_{m=1}^{\infty} b_m x^m, \text{ donde } r = 1.$$

Para encontrar y_1 igualamos exponentes e índices de las sumas anteriores:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k+r-1)(k+r-2)c_{k-1}x^{k+r} - \sum_{k=1}^{\infty}(k+r-1)c_{k-1}x^{k+r}$$

$$-\sum_{k=2}^{\infty}(k+r-2)c_{k-2}x^{k+r} + \sum_{k=1}^{\infty}c_{k-1}x^{k+r} = 0$$

Para $k = 1$ se obtiene la ecuación de índices y para $r = 1$:

$$k(k-1)c_{k-1} - kc_{k-1} - (k-1)c_{k-2} + c_{k-1} = 0$$

$$c_{k-1}\left[k(k-1) - k + 1\right] = (k-1)c_{k-2}$$

$$c_{k-1}\left[k^2 - 2k + 1\right] = (k-1)c_{k-2}$$

$$c_{k-1} = \frac{c_{k-2}}{k-1}, \; k = 2, 3, \ldots$$

es la fórmula de recurrencia para encontrar los coeficientes de y_1. Donde $c_0 = c_0$

Para $k = 2$, $\quad c_1 = \dfrac{c_0}{1}$

$k = 3$, $\quad c_2 = \dfrac{c_1}{2} = \dfrac{c_2}{2}$

$k = 4$, $\quad c_3 = \dfrac{c_2}{3} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{c_0}{2}\right) = \dfrac{c_0}{6}$

$k = 5$, $\quad c_4 = \dfrac{c_3}{4} = \dfrac{c_0}{24}$

$k = 6$, $\quad c_5 = \dfrac{c_4}{5} = \dfrac{c_0}{120}$, etcétera.

$$\therefore y = c_0\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right) = c_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = c_0 e^x$$

$$\to y_1 = c_0 x e^x \text{ o } y_1 = c_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{m+1}}{m!}.$$

Para encontrar y_2, usaremos tres métodos:

1. Variación de parámetros.
2. $y_2 = y_1(x)\int \frac{e^{-\int f(x)dx}}{y_1^2(x)}dx$ generalización del método de variación de parámetros.
3. Por derivación de la solución propuesta y_2.

1. Obtención de y_2 mediante variación de parámetros.

Sea $y_2 = uy_1$

$\to y_2' = uy_1' + u'y_1$

$y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$,

sustituyendo en la ecuación $x^3y'' - x^2(1+x)y' + xy = 0$,

$x^3y_2'' - x^2y_2' + xy_2$

$= x^3u''y_1 + 2x^3u'y_1' + x^3uy_1'' - x^2\,uy_1' - x^2u'y_1 - x^3uy_1' - x^3u'y_1 + xuy_1 = 0$

$\to \underbrace{u\left(x^3y_1'' - x^2y_1' - x^3y_1' + xy_1\right)}_{\text{cero}} + x^3u''y_1 + 2x^3u'y_1' - x^2u'y_1 - x^3u'y_1 = 0$

$\to xu''y_1 + 2xu'y_1' - u'y_1 - xu'y_1 = 0$

$xu''y_1 + 2xu'y_1' - u'y_1(1+x) = 0$

Como $y_1 = xe^x$ (tomando $c_0 = 1$)

y $y_1' = xe^x + e^x$

sustituimos:

$xu''xe^x + 2xu'\left(xe^x + e^x\right) - (1+x)u'xe^x = 0$

$u''x^2e^x + x^2u'e^x + xu'e^x = 0$

Dividiendo entre xe^x:

$$u''x + xu' + u' = 0$$

$$u''x = -(x+1)u'$$

$$\frac{u''}{u'} = -\frac{x+1}{x}. \text{ Sea } u' = z \to u'' = z',$$

$$\frac{dz}{z} = -\frac{x+1}{x}dx$$

$$\ln z = -x - \ln x$$

$$z = e^{-x-\ln x}$$

$$z = e^{-x} \cdot e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$z = \frac{e^{-x}}{x}$$

$$\rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{e^{-x}}{x}$$

$$u = \int \frac{e^{-x}}{x} dx$$

$$u = \int \frac{1}{x}\left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \ldots\right)dx$$

$$u = \ln x - x + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} - \frac{x^5}{5 \cdot 5!} + \ldots$$

$$y_2 = uy_1 = \left(\ln x - x + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \ldots\right)\left(xe^x\right)$$

$$\therefore y_2 = y_1 \ln x + xe^x \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^m}{(m)m!}.$$

2. Obtención de y_2 mediante la fórmula

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int f(x)dx}}{y_1^2} dx$$

Donde $y_1 = xe^x$ y $f(x) = \dfrac{-x^2(1+x)}{x^3}$

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int\left(-\frac{1}{x}-1\right)dx}}{y_1^2} dx$$

$$= y_1 \int \frac{e^{\ln x + x}}{y_1^2} dx$$

$$= y_1 \int \frac{xe^x}{x^2 e^{2x}} dx$$

$$= y_1 \int \frac{1}{xe^x} dx$$

$$= y_1 \int \frac{1}{x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \frac{x^5}{4!} + \ldots} dx$$

Efectuando una división larga:

$$= y_1 \int \left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} - \frac{x^4}{120} + \ldots \right) dx$$

$$= y_1 \ln x + y_1 \left(-x + \frac{x^2}{2 \cdot 2} - \frac{x^3}{3 \cdot 6} + \frac{x^4}{4 \cdot 24} - \frac{x^5}{5 \cdot 120} + \ldots \right)$$

$$\therefore\ y_2 = y_1 \ln x + xe^x \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^m}{(m)m!}.$$

3. Obtención de y_2 por derivación.

Sea $y_2 = y_1 \ln x + x \sum_{m=1}^{\infty} b_m x^m$, la solución propuesta para las raíces iguales de la ecuación derivación. Así derivando y sustituyéndola en la ecuación:

$$y_2 = y_1 \ln x + \sum_{m=1}^{\infty} b_m x^{m+1}$$

Empezando desde cero no se pierde la generalidad, como veremos a continuación. Derivando con respecto en x:

$$y_2' = \frac{y_1}{x} + y_1' \ln x + \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) b_m x^m$$

$$y_2'' = -\frac{y_1}{x^2} + \frac{2y_1'}{x} + y_1'' \ln x + \sum_{m=0}^{\infty} m(m+1) b_m x^{m-1}$$

Sustituyendo:

$$x^3 y_2'' - x^2 y_2' - x^3 y_2' + xy_2 = 0,$$

$$-xy_1 + 2x^2 y_1' + x^3 y_1'' \ln x + \sum_{m=0}^{\infty} m(m+1) b_m x^{m+2}$$

$$-xy_1 - x^2 y_1' \ln x - \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) b_m x^{m+2}$$

$$-x^2 y_1 - x^3 y_1' \ln x - \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) b_m x^{m+3}$$

$$+xy_1 \ln x + \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^{m+2} = 0,$$

$$2x^2y_1' - 2xy_1 - x^2y_1 + \ln x\underbrace{\left(x^3y_1'' - x^2(1+x)y_1' + xy_1\right)}_{\text{cero}}$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty} m^2 b_m x^{m+2} - \sum_{m=0}^{\infty}(m+1)b_m x^{m+3} = 0.$$

Sustituyendo y_1 y y_1':

$$2x^2\left(xe^x + e^x\right) - x(2+x)xe^x + \sum_{m=0}^{\infty} m^2 b_m x^{m+2}$$

$$-\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)b_m x^{m+3} = 0.$$

Dividiendo entre x^2:

$$2\left(xe^x + e^x\right) - (2+x)e^x + \sum_{m=0}^{\infty} m^2 b_m x^m - \sum_{m=0}^{\infty}(m+1)b_m x^{m+1} = 0$$

$$xe^x + \sum_{m=0}^{\infty} m^2 b_m x^m - \sum_{m=0}^{\infty}(m+1)b_m x^{m+1} = 0$$

$$\underbrace{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{m+1}}{m!}}_{m+1=k} + \sum_{m=0}^{\infty} m^2 b_m x^m - \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)b_m x^{m+1}}_{m+1=k} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{(k-1)!} + \sum_{k=0}^{\infty} k^2 b_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} k b_{k-1} x^k = 0$$

Igualando índices:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{(k-1)!} + 0b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k^2 b_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} k b_{k-1} x^k = 0$$

$$\rightarrow b_0 = b_0$$

y $$b_k = \frac{b_{k-1}}{k} - \frac{1}{k^2(k-1)!},\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

es la fórmula de recurrencia,

para $k = 1$, $\quad b_1 = b_0 - 1$

$k = 2$, $\quad b_2 = \dfrac{b_1}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{2b_0 - 3}{4}$

$k = 3$, $\quad b_3 = \dfrac{b_2}{3} - \dfrac{1}{18} = \dfrac{6b_0 - 11}{36}$

$k = 4$, $\quad b_4 = \dfrac{b_3}{4} - \dfrac{1}{96} = \dfrac{12b_0 - 25}{288}$, etcétera.

$$\rightarrow y_2 = y_1 \ln x + x\left[b_0 + (b_0 - 1)x + \frac{2b_0 - 3}{4}x^2 + \frac{6b_0 - 11}{36}x^3 + \frac{12b_0 - 25}{288}x^4 + \ldots\right]$$

Si tomamos $b_0 = 0$:

$$y_2 = y_1 \ln x + x\left[-x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{11}{36}x^3 - \frac{25}{288}x^4 + \ldots\right]$$

Como se comprueba por la solución obtenida por los métodos anteriores; teníamos

$$y_2 = y_1 \ln x + xe^x \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^m}{(m)m!}$$

$$= y_1 \ln x + \left(x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \ldots\right)\left(-x + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} - \ldots\right)$$

$$= y_1 \ln x + -x^2 + \frac{x^3}{2 \cdot 2!} - \frac{x^4}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{4 \cdot 4!} - \ldots$$

$$-x^3 + \frac{x^4}{2 \cdot 2!} - \frac{x^5}{3 \cdot 3!} + \ldots$$

$$-\frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{2 \cdot 2 \cdot 2} - \ldots$$

$$-\frac{x^5}{3!} + \ldots$$

$$= y_1 \ln x + \left(-x^2 - \frac{3}{4}x^3 - \frac{11}{36}x^4 - \frac{25}{288}x^5 - \ldots\right),$$

que coincide con las anteriores.

La solución general de la ecuación es, definitivamente:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 xe^x + c_2\left(xe^x \ln x + xe^x \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^m}{(m)m!}\right)$$

Raíces que difieren en un número entero

EJEMPLO 1

Resolver la ecuación: $xy'' + 2y' + xy = 0$

Sea $y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r}$ la solución,

$$\rightarrow y' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)c_m x^{m+r-1} \quad \text{y} \quad y'' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r-2}$$

Sustituyendo:

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r-1}+2\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)c_m x^{m+r-1}+\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^{m+r+1}=0$$

Tomando las sumas con menor exponente en las x, y $m=0$

$$r(r-1)c_0+2rc_0=0$$

$$c_0 r(r+1)=0, \text{ como } c_0\neq 0\rightarrow r(r+1)=0\begin{cases} r_1=0\\ r_2=-1\end{cases}$$

$$\rightarrow y_1=x^0\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^m \quad \text{y} \quad y_2=ky_1\ln x+x^{-1}\sum_{m=0}^{\infty}b_m x^m,$$

será la forma que tomarán para este caso y_1 y y_2. Multiplicando por x, las sumas:

$$\underbrace{\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r}}_{m=k}+2\underbrace{\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)c_m x^{m+r}}_{m=k}+\underbrace{\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^{m+r+2}}_{m+2=k}=0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)c_k x^{k+r}+2\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)c_k x^{k+r}+\sum_{k=2}^{\infty}c_{k-2}x^{k+r}=0$$

Para $k=0$ obtenemos la ecuación de índices.

Para $k=1$, $(1+r)rc_1+2(1+r)c_1=0\rightarrow c_1=0$

Para $k=2, 3, \ldots,$ $c_k=\dfrac{-c_{k-2}}{(k+r)(k+r+1)}$

Para $r_1=0$:

$$k(k-1)c_k+2(k)c_k+c_{k-2}=0$$

Y
$$c_k=\frac{-c_{k-2}}{k(k+1)},\ k=2, 3, \ldots$$

es la fórmula de recurrencia.

Para $k=2,$ $\qquad c_2=\dfrac{-c_0}{6}$

$k=3,$ $\qquad c_3=\dfrac{-c_1}{12}=0$

$k=4,$ $\qquad c_4=\dfrac{-c_2}{20}=\dfrac{c_0}{120}$

$k=5,$ $\qquad c_5=0$

$k=6,$ $\qquad c_6=\dfrac{-c_4}{42}=\dfrac{-c_0}{5040}$, etcétera.

$$\therefore y_1=c_0\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots\right)$$

Como $\operatorname{sen} x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \ldots$

$$\rightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$\therefore y_1 = c_0 \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

Para obtener y_2 se usa cualquiera de los métodos del ejemplo 3. También se puede probar la misma fórmula de recurrencia para $r_2 = -1$ la cual, a veces, da la solución correcta.

Para $r_2 = -1$ $\qquad b_k = \dfrac{-b_{k-2}}{(k-1)k}$, $k = 2, 3, 4\ldots$

$b_0 = b_0$

$b_1 = 0$

Para $k = 2$, $\qquad b_2 = \dfrac{-b_0}{2}$

$k = 36$, $\qquad b_3 = \dfrac{-b_1}{6} = 0$

$k = 4$, $\qquad b_4 = \dfrac{-b_2}{12} = \dfrac{b_0}{24}$

$k = 5$, $\qquad b_5 = \dfrac{-b_3}{20} = 0$

$k = 6$, $\qquad b_6 = \dfrac{-b_4}{30} = \dfrac{-b_0}{720}$, etcétera.

$$y = b_0\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right) = b_0 \cos x$$

$\therefore y_2 = 0 y_1 \ln x + x^{-1} b_0 \cos x.$

A veces no aparece la función logaritmo natural.

Como $y_2 = b_0 \dfrac{\cos x}{x}$, la solución general es:

$$y = c_0 \frac{\operatorname{sen} x}{x} + b_0 \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

Por el método de la fórmula:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int \frac{2}{x} dx}}{y_1^2} dx = y_1 \int \frac{x^{-2}}{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}} dx$$

$$= y_1 \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = y_1 \int \csc^2 x dx = -y_1 \cot x$$

$$= -\frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{-\cos x}{x}$$

$$\rightarrow y_2 = b_o \frac{\cos x}{x}$$

y

$$y = c_0 \frac{\operatorname{sen} x}{x} + b_0 \frac{\cos x}{x}.$$

Una opción con `Mathematica` es, por ejemplo, con la solución por series de la ecuación diferencial $y'' + \frac{\operatorname{sen} x}{x} y' + y = \cos x$:

```
DSolve[y″[x]+Sin[x]/xy′[x]+y[x]==cosx,y[x],x]
```

$$\texttt{DSolve[y][x]+}\frac{\texttt{Sin[x]y'[x]}}{\texttt{x}}\texttt{+y''[x]==cosx,y[x],x]}$$

```
lhs=y″[x]+Sin[x]/xy′[x]+y[x];rhs=cos[x];
ser=Series[lhs,{x,0,7}]
```

$$\texttt{(y[0]+y'[0]+y''[0])+(y'[0]+y''[0]+y}^{(3)}\texttt{[0])x+}$$

$$\frac{1}{\texttt{6(-y'[0]+3y''[0]+3y}^{(3)}\texttt{[0]+3y}^{(4)}\texttt{[0])x}^2} +$$

$$\frac{1}{\texttt{6(-y''[0]+y}^{(3)}\texttt{[0]+y}^{(4)}\texttt{[0]+y}^{(5)}\texttt{[0])x}^3} +$$

$$\frac{1}{\texttt{120(y'[0]-10y}^{(3)}\texttt{[0]+5y}^{(4)}\texttt{[0]+5y}^{(5)}\texttt{[0]+5y}^{(6)}\texttt{[0])x}^4}$$

$$\texttt{serone=}\frac{\texttt{ser}}{\texttt{.\{y[0]} \rightarrow \texttt{1,y'[0]} \rightarrow \texttt{-1\}}}$$

```
y↑,′[0]+(-1+y↑″[0]+y↑((3))[0])x+1/6(1+3y↑,′[0]+
3y↑((3))[0]+3y↑((4))[0])x↑2+1/6(-y↑,′[0]+
y↑((3))[0]+y↑((4))[0]+y↑((5))[0]x↑3+
1/120(-1-10y↑((3))[0]+5y↑((4))[0]+5y↑((
sertwo=Series[Cos[x],{x,0,7}]
```

$$\texttt{1-}\frac{\texttt{x}^2}{\texttt{2}}+\frac{\texttt{x}^4}{\texttt{24}}-\frac{\texttt{x}^6}{\texttt{720}}\texttt{+O[x]}^8$$

```
equations=LogicalExpand[serone==sertwo]
```

$$\left\{\left\{\texttt{y''[0]}\rightarrow\texttt{1,y}^{(3)}\texttt{[0]}\rightarrow\texttt{0,y}^{(4)}\texttt{[0]}\rightarrow-\frac{7}{3}\texttt{,y}^{(5)}\texttt{[0]}\rightarrow\frac{10}{3}\texttt{,y}^{(6)}\texttt{[0]}\rightarrow\frac{1}{5}\texttt{,y}^{(7)}\texttt{[0]}\rightarrow-\frac{554}{45}\texttt{,y}^{(8)}\texttt{[0]}\rightarrow\frac{1741}{63}\texttt{,y}^{(9)}\texttt{[0]}\rightarrow\frac{358}{105}\right\}\right\}\texttt{roots=Solve[equations]}$$

$$\left\{\left\{y''[0]\to 1, y^{(3)}[0]\to 0, y^{(4)}[0]\to -\frac{7}{3}, y^{(5)}[0]\to \frac{10}{3}, y^{(6)}[0]\to \frac{1}{5}, y^{(7)}[0] \to -\frac{554}{45}, y^{(8)}[0]\to \frac{1741}{63}, y^{(9)}[0]\to \frac{358}{105}\right\}\right\}$$

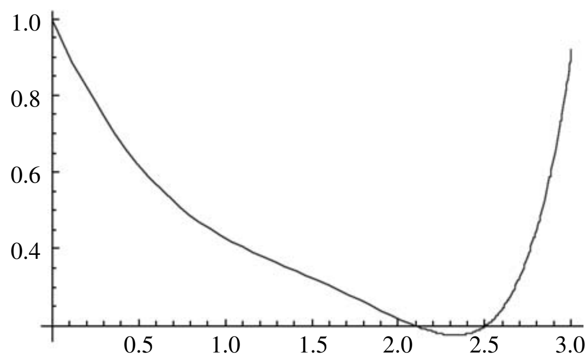
```
sery=Series[y[x],{x,0,9}]
```

$$y[0]+y'[0]x+\frac{1}{2}y''[0]x^2+\frac{1}{6}y^{(3)}[0]x^3+\frac{1}{24}y^{(4)}[0]x^4+\frac{1}{120}y^{(5)}[0]x^5+\frac{1}{720}y^{(6)}[0]x^6+\frac{y^{(7)}[0]x^7}{5040}+\frac{y^{(8)}[0]x^8}{40320}+\frac{y^{(9)}[0]x^9}{362880}+O[x]^{10}$$

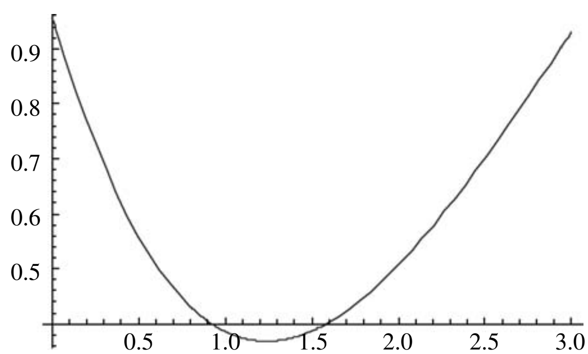
$$\text{solapprox=}\frac{\text{Normal[sery]}}{.\frac{\text{?\{y[0] → 1,y'[0] → -1\}}}{\text{.?roots}[[1]]}}$$

$$1-x+\frac{x^2}{2}+\frac{7x^4}{72}+\frac{x^5}{36}+\frac{x^6}{3600}+\frac{277x^7}{113400}+\frac{1741x^8}{2540160}+\frac{179x^9}{19051200}$$

```
pone=Plot[solapprox,{x,0,3}]
```



```
numsol=?NDSolve[{y''[x]+Sin[x]/xy'[x]+y[x]==?y[.01]==
.95,y'[.01]==-1.05},y[x],?[x,.01,3}]
{{y[x]®InterpolatingFunction[{{0.01,3.}},<>][x]}}
ptwo=Plot[numsol[[1,1,2]],{x,.01,3}]
```



EJERCICIOS 6.6

Usar el método de Frobenius para obtener y_1 y y_2 de la solución general en el punto singular $x=0$

$r_1 - r_2 \neq$ número entero.

1. $2xy'' + (x+1)y' + 3y = 0$

Respuesta: $y_1 = x^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{7}{6}x + \frac{21}{40}x^2 - \frac{11}{80}x^3 + \frac{143}{5760}x^4 - \frac{143}{15360}x^5 + \dots\right)$

$$y_2 = \left(1 - 3x + 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{7}x^4 - \frac{1}{45}x^5 + \dots\right)$$

2. $3x^2y'' + 2xy' + x^3y = 0$

Respuesta: $y_1 = x^{1/3}\left(1 - \frac{x^3}{30} + \frac{x^6}{3420} - \frac{x^9}{861840} + \dots\right)$

$$y_2 = \left(1 - \frac{x^3}{24} + \frac{x^6}{2448} - \frac{x^9}{572832} + \dots\right)$$

3. $x^2y'' - \frac{1}{6}xy' + \frac{1}{3}y = 0$

Respuesta: $y_1 = x^{\frac{2}{3}}$, $\qquad y_2 = x^{\frac{1}{2}}$

4. $3x^2y'' - xy' + (x^2 + x)y = 0$

Respuesta: $y_1 = x^{4/3}\left(1 - \frac{x}{7} - \frac{3x^2}{70} + \frac{x^3}{210} + \frac{x^4}{1680} + \dots\right)$

$$y_2 = \left(1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{30} + \frac{x^4}{60} + \dots\right)$$

5. $2x^2y'' + xy' - x^3y = 0$

Respuesta: $y_1 = x^{1/2}\left(1 + \frac{x^3}{21} + \frac{x^6}{1638} + \frac{x^9}{280098} + \dots\right)$

$$y_2 = \left(1 + \frac{x^3}{15} + \frac{x^6}{990} + \frac{x^9}{151470} + \dots\right)$$

6. $4x^2y'' - (x - x^2)y' + y = 0$

Respuesta: $y_1 = x\left(1 - \frac{x}{7} + \frac{x^2}{77} - \frac{x^3}{1155} + \dots\right)$

$$y_2 = x^{1/4}\left(1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{32} - \frac{x^3}{384} + \frac{x^4}{6144} - \dots\right)$$

7. $3xy'' + y' + 2y = 0$

Respuesta: $y_1 = x^{2/3}\left(1 - \frac{2x}{5} + \frac{x^2}{20} - \frac{x^3}{330} + \frac{x^4}{9240} - \dots\right)$

$$y_2 = \left(1 - 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{21} + \frac{x^4}{420} - \dots\right)$$

8. $3x^2y'' - xy' + (1-x)y = 0$

Respuesta: $y_1 = x\left(1 + \frac{x}{5} + \frac{x^2}{80} + \frac{x^3}{2640} + \frac{x^4}{147840} + \ldots\right)$

$y_2 = x^{1/3}\left(1 + x + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{168} + \frac{x^4}{6720} + \ldots\right)$

9. $4x^2y'' + xy' - (1+x)y = 0$

Respuesta: $y_1 = x\left(1 + \frac{x}{9} + \frac{x^2}{234} + \frac{x^3}{11934} + \frac{x^4}{1002456} + \ldots\right)$

$y_2 = x^{-1/4}\left(1 - x - \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{126} - \frac{x^4}{5544} - \ldots\right)$

10. $3x^2y'' - xy' - (x^2 - x)y = 0$

Respuesta: $y_1 = x^{4/3}\left(1 - \frac{x}{7} + \frac{2x^2}{35} - \frac{x^3}{195} + \frac{17x^4}{17472} - \ldots\right)$

$y_2 = \left(1 + x + \frac{x^3}{15} - \frac{x^4}{480} + \frac{x^5}{800} - \ldots\right)$

$\boldsymbol{r_1 - r_2 =}$ **entero positivo**.

11. $xy'' - y' + 4x^3y = 0$

Respuesta: $y_1 = \operatorname{sen} x^2$, $y_2 = \cos x^2$

12. $(1-x)y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{2}{x}y = 0$

Respuesta: $y_1 = \frac{x^4}{(1-x)^2}$ $y_2 = 3 + 2x + x^2$

13. $x^2y'' + 6xy + 4y' = 0$

Respuesta: $y_1 = x^{-1}$, $y_2 = x^{-4}$

14. $2x^2y'' - x^2y' - (x+4)y = 0$

$y_1 = x^2\left(1 + \frac{3}{8}x + \frac{3}{40}x^2 - \frac{1}{96}x^3 + \frac{1}{896}x^4 + \ldots\right)$

$y_2 = x^{-1}$

15. $xy'' + (x-1)y' - y = 0$

Respuesta: $y_1 = 2(e^{-x} - 1 + x)$, $y_2 = e^{-x}$

16. $x^2y'' - x(3+x)y' + 2xy = 0$

Respuesta: $y_1 = x^4 + \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{10}x^6 + \frac{2}{105}x^7 + \frac{x^8}{336} + \ldots$

$y_2 = 1 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}x^2$

17. $x^2y'' - x(4-x)y' + (6-2x)y = 0$

Respuesta: $y_1 = -x^2(e^{-x} - 1)$, $y_2 = -x^2e^{-x}$

18. $xy'' + 3y' + 4x^3 y = 0$

Respuesta: $y_1 = x^{-2}\operatorname{sen} x^2, \qquad y_2 = x^{-2}\cos x^2$

19. $x^2 y'' + 4xy' + (x^2 + 2)y = 0$

Respuesta: $y_1 = x^{-2}\operatorname{sen} x, \qquad y_2 = x^2 \cos x$

20. $x^2 y'' + 6xy' + (6 - x^2)y = 0$

Respuesta: $y_1 = x^{-3}\operatorname{senh} x, \qquad y_2 = x^{-3}\cosh x$

Raíces iguales $r_1 = r_2$.

21. $xy'' + y' - y = 0$

Respuesta: $y_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{(m!)^2}$

$$y_2 = y_1 \ln x + \left(-2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{11}{108}x^3 + ..\right)$$

22. $xy'' + (x-1)y' + \left(\frac{1}{x} - 1\right)y = 0$

Respuesta: $y_1 = x$

$$y_2 = y_1 \ln x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{m+1}}{(m)m!}$$

23. $xy'' + y' + y = 0$

Respuesta: $y_1 = 1 - x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{36} + \frac{x^4}{576} - \frac{x^5}{14400} + \ldots$

$$y_2 = y_1 \ln x + 2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{11}{108}x^3 \ldots$$

24. $xy'' + y' - 4y = 0$

Respuesta: $y_1 = 1 + 4x + 4x^2 + \frac{16}{9}x^3 + \frac{4}{9}x^4 + \frac{16}{225}x^5 + \ldots$

$$y_2 = y_1 \ln x - 8x - 12x^2 - \frac{176}{27}x^3 - \ldots$$

25. $xy'' + y' + x^2 y = 0$

Respuesta: $y_1 = 1 - \frac{x^3}{9} + \frac{x^6}{324} - \frac{x^9}{26244} + \ldots$

$$y_2 = y_1 \ln x + \frac{2}{27}x^3 - \frac{1}{324}x^6 + \ldots$$

26. $xy'' + y' - xy = 0$

Respuesta: $y_1 = 1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \ldots$

$$y_2 = y_1 \ln x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{128}x^4 - \ldots$$

27. $x^2y'' + x(1-x)y' - xy = 0$

Respuesta: $y_1 = e^x$

$$y_2 = y_1 \ln x - x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{11}{36}x^3 - \frac{25}{288}x^4 - \ldots$$

28. $x^2y'' + (x^2 - x)y' + y = 0$

Respuesta: $y_1 = xe^{-x}$

$$y_2 = y_1 \ln x + x^2 - \frac{3}{4}x^3 + \frac{5}{18}x^4 - \ldots$$

29. $\left(x^2 - x\right)y'' + (3x-1)y' + y = 0$

Respuesta: $y_1 = \dfrac{1}{1-x}$, $\qquad y_2 = \dfrac{\ln x}{1-x}$

30. $xy'' + y' - 2y = 0$

Respuesta: $y_1 = 1 + 2x + x^2 + \dfrac{2}{9}x^3 + \dfrac{1}{36}x^4 + \ldots$

$$y_2 = y_1 \ln x - 4x - 3x^2 - \frac{22}{27}x^3 - \ldots$$

31. Usar el método de variación de parámetros para obtener:

$$y_2 = y_1(x)\int \frac{e^{-\int f(x)dx}}{y_1^{\,2}(x)}\,dx$$

En los siguientes ejercicios elegir la opción que contiene la ecuación de índices:

32. $xy'' - y = 0$

a. $c_0(r^2 - r - 1) = 0$

b. $c_0 r(r-1) = 0$

c. $c_0 r(r+1) = 0$

d. $c_0(r^2 + r - 1) = 0$

33. $xy'' + 3y' - 2xy = 0$

a. $c_0\left[r(r+2)\right] = 0$

b. $c_0(r^2 + 4r + 3) = 0$

c. $c_0(r^2 + 4r + 1) = 0$

d. $c_0(r^2 + 2r - 2) = 0$

34. $xy'' + \dfrac{1}{2}xy' - \dfrac{3}{2}y = 0$

a. $c_0 r(r - \dfrac{1}{2}) = 0$

c. $c_0\left[r^2 - \dfrac{1}{2}r - \dfrac{3}{2}\right] = 0$

b. $c_0(r^2 - \dfrac{3}{2}) = 0$

d. $c_0\left[r^2 + \dfrac{3}{2}r - 1\right] = 0$

35. $xy'' + (1-2x)y' + (x-1)y = 0$

a. $c_0\left[r(r-1)-2r\right]=0$

b. $c_0(1+r)^2 = 0$

c. $c_0(r^2-2r-1)=0$

d. $c_0 r^2 = 0$

36. $16x^2y'' + 3y = 0$

a. $c_0\left[16r(r-1)\right]=0$

b. $c_0\left(16r^2+16r+3\right)=0$

c. $c_0\left(16r^2-16r+3\right)=0$

d. No tiene, por ser ecuación de Cauchy-Euler.

Encontrar la opción que contiene la forma general de y_1 y y_2 a partir de la ecuación de índices:

37. $xy'' + 3y' - 2xy = 0$

a. $y_1 = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ $\quad$ $y_2 = x^{-2}\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m$

b. $y_1 = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ $\quad$ $y_2 = ky_1 \ln x + x^{-2}\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m$

c. $y_1 = x\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ $\quad$ $y_2 = y_1 \ln x + x^{-2}\sum_{m=1}^{\infty} b_m x^m$

d. $y_1 = x\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ $\quad$ $y_2 = x^{-2}\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m$

38. $x^2y'' + 3x(1+x)y' + (1-3x)y = 0$

a. $y_1 = x^{-1}\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ $\quad$ $y_2 = y_1 \ln x + x^{-1}\sum_{m=1}^{\infty} b_m x^m$

b. $y_1 = x^{-1}\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ $\quad$ $y_2 = x(y_1 \ln x + x^{-1}\sum_{m=1}^{\infty} b_m x^m)$

c. $y_1 = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ $\quad$ $y_2 = x^{-1}\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m$

d. $y_1 = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ $\quad$ $y_2 = y_1 \ln x + x^{-1}\sum_{m=1}^{\infty} b_m x^m$

39. $xy'' + y = 0$

a. $y_1 = x\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ $\quad$ $y_2 = ky_1 \ln x + \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m$

b. $y_1 = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ $\quad$ $y_2 = y_1 \ln x + x\sum_{m=1}^{\infty} b_m x^m$

c. $y_1 = x\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ $\quad$ $y_2 = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m$

d. $y_1 = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ $\qquad y_2 = y_1 \ln x + \sum_{m=1}^{\infty} b_m x^m$

40. $2x^2 y'' - xy' + (1-x)y = 0$

a. $y_1 = x\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ $\qquad y_2 = y_1 \ln x + x^{1/2}\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m$

b. $y_1 = x^{1/2}\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ $\qquad y_2 = y_1 \ln x + x\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m$

c. $y_1 = x^{1/2}\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ $\qquad y_2 = ky_1 \ln x + x\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m$

d. $y_1 = x\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ $\qquad y_2 = x^{1/2}\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m$

Elegir la opción que contiene la solución y_1 de las siguientes ecuaciones:

41. $x(1-x)y'' + 2y' + 2y = 0$

a. $y_1 = c_o x^{-1}\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - ...\right)$

b. $y_1 = c_o y_1 \ln x + x^{-1}\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m$

c. $y_1 = c_o\left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right)$

d. No tiene solución, por el método de Frobenius, por el método de Frobenius en el punto singular $x = 0$.

42. $xy'' + y = 0$

a. $y_1 = c_o\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^3}{144} + ...\right)$

b. $y_1 = c_0\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{m+1}}{m!(m+1)!}$

c. $y_1 = c_o y_1 \ln x + \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m$

d. $y_1 = 0$

43. $3x^2 y'' - 2xy' - (2 - x^2)y = 0$

a. $y_1 = c_0\left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12} - \frac{x^4}{40} - \frac{x^5}{480} - ...\right)$

b. $y_1 = c_0\left(1 + \frac{x^2}{26} + \frac{x^4}{1976} + ...\right)$

c. $y_1 = c_0\left(x^2 + \frac{x^4}{26} + \frac{x^6}{1976} + ...\right)$

d. $y_1 = c_0\left(-1 - \frac{x^2}{26} - \frac{x^4}{1976} - ...\right)$

44. $\frac{1}{4}x^2y'' + xy' - (2x+1)y = 0$

a. $y_1 = c_0 x\left(1 + \frac{4}{3}x + \frac{16}{21}x^2 + \frac{16}{63}x^3 + \frac{32}{567}x^4 + \ldots\right)$

b. $y_1 = c_0 x^{-4}\left(1 + \frac{4}{3}x + \frac{16}{21}x^2 + \frac{16}{63}x^3 + \ldots\right)$

c. $y_1 = c_0\left(1 + \frac{4}{3}x + \frac{16}{21}x^2 + \frac{16}{63}x^3 + \ldots\right)$

d. $y_1 = c_0\left(-1 + \frac{4}{3}x - \frac{16}{21}x^2 - \frac{16}{63}x^3 + \ldots\right)$

45. Probar que la ecuación diferencial $x^4y'' + y = 0$ tiene una sola solución por el método de Frobenius y es $y \equiv 0$

46. Determinar la forma que deben tener y_1 y y_2, por el método de Frobenius, de la ecuación:

$$x^2y'' - y' + y = 0$$

Respuesta: $y_1 = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r_1}$ $\qquad$ $y_2 = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^{m+r_2}$

donde $r_1 - r_2 = \sqrt{3}i$

Respuestas:

32. *b*. La opción *a* toma las dos sumatorias, siendo que sólo deben tomarse la o las que contienen la variable *x* con el menor exponente.

La opción *c* toma $m = 1$ en los coeficientes y debe ser $m = 0$.

La opción *d* contiene los errores de *a* y *c*

33. *a*. La opción *d* toma las tres sumas y sólo deben tomarse las dos primeras por tener la *x* el menor exponente.

La opción *b* supone $m = 1$ en los coeficientes y debe ser $m = 0$.

La opción *c* contiene los errores de *b* y *d*.

34. *c*. Las opciones *a* y *b* omitieron una suma cada una.

La opción *d* toma $m = 1$, en vez de $m = 0$.

35. *d*. La opción *a* tiene equivocado el término $-2r$ que debe ser $+r$.

La opción *b* toma $m = 1$, en vez de $m = 0$.

La opción *c* toma dos sumas de más.

36. *c*. A la opción *a* le falta una suma.

La opción *b* toma $m = 1$, en vez de $m = 0$.

La opción *d* supone que una ecuación de Cauchy-Euler no puede resolverse por el método de Frobenius.

37. *b*. La opción *a* supone $r_1 - r_2 \neq$ entero y $r_1 - r_2 = 0 - (-2) = 2$

La opción *c* supone $r_1 = 1$ y debe ser $r_1 = 0$ para y_1 y para y_2 supone $r_1 = r_2$

La opción *d* contiene los errores de *c* para y_1 y de *a* para y_2

38. *a*. La opción *b* supone que como $r_1 = r_2 = -1$, entonces, y_2 debe multiplicarse por *x*, lo cual no está definido en el método de Frobenius.

La opción *c* toma raíces de la ecuación indicia $r_1 = 0$ y $r_2 = -1$, en ese caso tampoco y_2 tendría esa forma.

La opción *d* tiene error en la y_1, que debe multiplicarse por x^{-1}

39. *a*. La opción *b* debe tener a y_1 multiplicada por *x* porque $r_1 = 1 > r_2 = 0$; además, supone que $r_1 = r_2$, lo cual es falso.

La opción *c* supone $r_1 - r_2 \neq$ entero.

La opción *d* supone $r_1 = r_2 = 0$

40. *d*. La opción *a* supone $r_1 = r_2$, cuando $r_1 = 1$ y $r_2 = \frac{1}{2}$

La opción *b* contiene el mismo error anterior y además tiene intercambiadas r_1 y r_2, $r_1 = 1$ debe pertenecer a la solución y_1.

La opción *c*, además de tener intercambiadas r_1 y r_2, supone $r_1 - r_2 =$ entero.

41. *c*. La opción *a* toma $r_1 = -1$, en vez de $r_1 = 0$ y supone una serie infinita.

La opción *b* expresa la forma general que toma y_2 en este caso, pero se pregunta por y_1.

La opción *d* está en un error porque el método asegura que al menos hay una solución del tipo Frobenius.

42. *b*. La opción *a* está incompleta, falta multiplicarla por $x^{r_1} = x$

La opción *c* propone la forma general de la y_2 y se pregunta por y_1

La opción *d* trabaja la fórmula de recurrencia para $r_2 = 0$, con lo que se anula c_1 y el resto de las constantes, además supone $c_0 = 0$

43. *c*. La opción *a* resuelve para $r_2 = -\frac{1}{3}$, en vez de $r_1 = 2$

La opción *b* está incompleta, debe multiplicarse por x^2

La opción *d*, además del error en *b*, supone que la fórmula de recurrencia es $c_k = \dfrac{-c_{k-2}}{k(3k+7)}$, y ambos miembros son positivos.

44. *a*. La opción *b* propone como $r_1 = -4$, en vez de $r_1 = 1$.

La opción *c* está incompleta, falta multiplicar por $x^{r_1} = x$

La opción *d* supone que el resultado es una serie alternante.

Ecuación de Bessel

Una ecuación de gran aplicación en ingeniería es la ecuación de Bessel, que tiene la forma:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0$$

Donde $v \geq 0$ es un parámetro real y $x = 0$ es un punto singular regular.

Ecuaciones reducibles a la ecuación de Bessel

Gran cantidad de ecuaciones son de la forma:

$$x^2 y'' + axy' + (b + cx^m)y = 0 \qquad (2)$$

Donde a, b, c, m son constantes ($c > 0$ y $m \neq 0$) se reducen a una ecuación de Bessel mediante las siguientes sustituciones:

$$y = \left(\frac{t}{\gamma}\right)^{-\alpha/\beta} u, \quad x = \left(\frac{t}{\gamma}\right)^{1/\beta}$$

Quedando:

$$t^2 \frac{d^2u}{dt^2} + t\frac{du}{dt} + (t^2 - v^2)u = 0$$

Donde $\alpha = \dfrac{a-1}{2}$, $\qquad \beta = \dfrac{m}{2}$, $\qquad \gamma = \dfrac{2\sqrt{c}}{m}$, $\qquad v^2 = \dfrac{(a-1)^2 - 4b}{m^2}$

NOTA: Cuando $c = 0$ y $m = 0$ la ecuación (2) es la de Cauchy-Euler. También pueden usarse otras sustituciones apropiadas.

EJEMPLO 1

Dada la ecuación diferencial $y'' + y = 0$, probar que la transformación $y = \sqrt{x}z$ la convierte en una ecuación de Bessel.

Entonces, $y = x^{1/2}z$

Derivando con respecto a x:

$$y' = x^{1/2}z' + \frac{1}{2}x^{-1/2}z$$

$$y'' = x^{1/2}z'' + x^{-1/2}z' - \frac{1}{4}x^{-3/2}z$$

Sustituyendo en la ecuación dada:

$$x^{1/2}z'' + x^{-1/2}z' - \frac{1}{4}x^{-3/2}z + x^{1/2}z = 0$$

Multiplicando por $x^{3/2}$:

$$x^2z'' + xz' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)z = 0$$

que ya es de Bessel, con parámetro $v = \frac{1}{2}$

Antes de entrar en la solución de la ecuación de Bessel, hablaremos de una importante función: la función gamma.

Función gamma

Definición 6.9
La función $\Gamma(n)$ para $n > 0$ se define como:

$$\boxed{\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}\,dt}$$

Fórmula de recurrencia: $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$

Valores de la función gamma para $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1$$

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1 = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2 \cdot 1 = 2 = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3 \cdot 2 = 6 = 3!$$

$$\Gamma(5) = 4\Gamma(4) = 4 \cdot 6 = 24 = 4!$$

$$\Gamma(6) = 5\Gamma(5) = 5 \cdot 24 = 120 = 5!$$

....

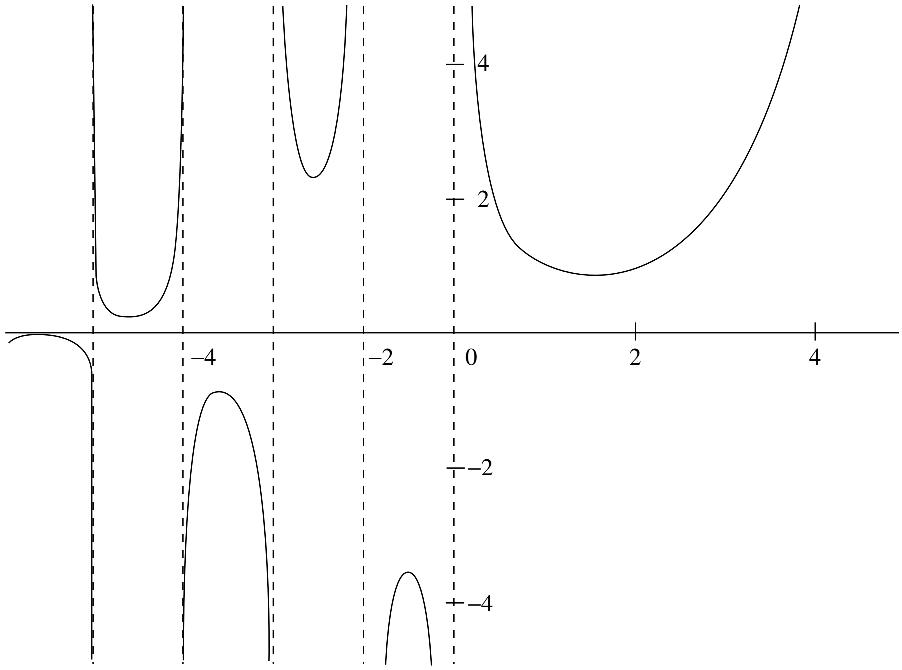
$$\Gamma(n+1) = n! \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\text{donde } 0! = 1$$

Por ello, la función gamma es una generalización de la función factorial.

Tomando $\Gamma(n)=\dfrac{\Gamma(n+1)}{n}, n>0$

vemos que $\Gamma(n)$ tiende a infinito cuando n se acerca a cero. Queda claro, entonces, que $\Gamma(n)$ no está definida para $n=0$, ni tampoco para $n=-1,-2,-3,\ldots$ Sin embargo, podemos definir la función gamma para valores negativos que no sean enteros, si en la definición quitamos la restricción de $n>0$. La gráfica es:



Algunos resultados interesantes son:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma(x+1)=\lim_{k\to\infty}\frac{1\cdot2\cdot3\ldots k}{(x+1)(x+2)\ldots(x+k)}k^{x}$$

$$\Gamma(x+1)=\sqrt{2\pi x}\quad x^{x}e^{-x}\left(1+\frac{1}{12x}+\frac{1}{288x^{2}}-\ldots\right)$$

Serie asintótica de Stirling

Para $x=n$ entero positivo y suficientemente grande (por ejemplo, $n>10$), la fórmula de Stirling da una aproximación útil para $n!$

$$n!\approx\sqrt{2\pi n}\ n^{n}e^{-n}$$

Es decir, el valor de ambos tiende a ser el mismo cuando $n\to\infty$

EJEMPLO 1

Hallar el valor de $\Gamma(3.5)$ sabiendo (por las tablas para $1 < n < 2$) que $\Gamma(1.5) = 0.8862$

Como $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ sea $n = 2.5$

$$\rightarrow \Gamma(3.5) = 2.5\Gamma(2.5)$$

Pero, para obtener $\Gamma(2.5)$ sea $n = 1.5$

$$\begin{aligned} \rightarrow \Gamma(2.5) &= 1.5\Gamma(1.5) \\ &= (1.5)(0.8862) \\ &= 1.3293 \end{aligned}$$

$\therefore \Gamma(3.5) = (2.5)(1.3293) = 3.3233.$

Solución de la ecuación de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0$$

Aplicando el método de Frobenius:

Sea $y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r}$ la solución. Derivando:

$$y' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)c_m x^{m+r-1}$$

$$y'' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r-2}$$

Sustituyendo en la ecuación de Bessel:

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)c_m x^{m+r}$$
$$+ \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r+2} - v^2 \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0$$

Para $m = 0$

$$c_0\left[r(r-1) + r - v^2\right] = 0$$

Como $c_0 \neq 0 \rightarrow (r+v)(r-v) = 0 \begin{cases} r_1 = \nu \\ \\ r_2 = -\nu \end{cases}$

Existirá, por tanto, una solución de la forma:

$$y = x^v \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$$

Para hallar las c_m:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\underbrace{[(m+r)^2-v^2]c_m x^{m+r}}_{m=k}+\sum_{m=0}^{\infty}\underbrace{c_m x^{m+r+2}}_{m+2=k}=0$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}[(k+r)^2-v^2]c_k x^{k+r}+\sum_{m=2}^{\infty}c_{k-2}x^{k+r}=0$$

Para $k=1$ y $r=v\to(1+2v)c_1=0$, como $v\neq 0\to c_1=0$

Para $k=2, 3, 4, \ldots \to c_k=\dfrac{-c_{k-2}}{k(k+2v)}$ es la fórmula de recurrencia.

Para $k=2$, $c_2=\dfrac{-c_0}{4(1+v)}$

$$k=3,\quad c_1=c_3=c_5=c_7=...=0$$

$$k=4,\quad c_4=\frac{-c_2}{4\cdot 2(2+v)}=\frac{-1}{4\cdot 2(2+v)}\left(\frac{-c_0}{4(1+v)}\right)$$

$$=\frac{c_0}{2^4\cdot 1\cdot 2(1+v)(2+v)}$$

$$k=6,\quad c_6=\frac{-c_4}{6(6+2v)}=\frac{-1}{12(3+v)}\left(\frac{c_0}{2^4\cdot 1\cdot 2\cdot(1+v)(2+v)}\right)$$

$$=\frac{-c_0}{2^6\cdot 1\cdot 2\cdot 3(1+v)(2+v)(3+v)},\ \text{etcétera.}$$

$$\to c_{2k}=\frac{(-1)^k c_0}{2^{2k}k!(1+v)(2+v)\ldots(k+v)},\qquad k=1, 2, 3, \ldots$$

Elegir un valor apropiado para c_0, puesto que es una constante arbitraria, tal como:

$$c_0=\frac{1}{2^v\Gamma(1+v)}$$

y recordando que $\Gamma(1+v)=v\Gamma(v)$ podemos volver a escribir la fórmula para los coeficientes pares así:

$$c_{2k}=\frac{(-1)^k}{2^{2k+v}k!(1+v)(2+v)\ldots(k+v)\Gamma(1+v)}$$

$$=\frac{(-1)^k}{2^{2k+v}k!\Gamma(1+v+k)},\quad k=0, 1, 2, \ldots$$

$\therefore$ la solución es: $y=\sum_{m=0}^{\infty}c_{2m}x^{2m+v}=\sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^m}{k!\Gamma(1+v+m)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m+v}$

Si $v\geq 0$, esta serie converge por lo menos en el intervalo $0\leq x<\infty$

Funciones de Bessel de primera clase

La serie solución anterior suele denotare por $J_v(x)$, entonces,

$$J_v(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(1+v+m)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+v}$$

Similarmente, si tomamos $r_2 = -v$, obtenemos:

$$J_{-v}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(1-v+m)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-v}$$

Las funciones $J_v(x)$ y $J_{-v}(x)$ se llaman funciones de Bessel de primera clase de orden v y $-v$, respectivamente.

Dependiendo del valor v, $J_{-v}(x)$ puede tener potencias negativas de x y converge en $0 < |x| < \infty$

SOLUCIONES DE BESSEL

Habrá siempre una y_1 de la forma:

$$y_1 = |x|^{-v} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m, \text{ que es } J_v(x)$$

Para ver la forma y_2 consideramos tres casos:

1. Si $r_1 - r_2 = v - (-v) = 2v \neq$ entero positivo

$$\rightarrow y_2 = |x|^{-v} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \text{ que es } J_{-v}(x)$$

$\therefore y = c_1 J_v(x) + c_2 J_{-v}(x)$ es solución general.

2. Si $v = 0 \rightarrow (-1)^n J_v(x) = J_{-v}(x)$ en este caso y_1 y y_2 son linealmente dependientes, puesto que es la misma solución. Entonces,

$$y_2 = y_1(x)\ln|x| + \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m$$

que se obtiene como en el ejemplo 3 de la página 296.

$\therefore y = c_1 J_v(x) + c_2 y_2$ es solución general.

3. Si $2v =$ entero positivo.

$$\rightarrow y_2 = k y_1(x)\ln|x| + |x|^{-v} \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m \text{ (Vea ejemplo 3 de la página 296.)}$$

$\therefore y = c_1 J_v(x) + c_2 y_2$ es solución general.

EJEMPLO 1

Hallar la solución general de la ecuación:

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{16}\right)y = 0$$

Como $v = \frac{1}{4} \rightarrow$ la solución general en $0 < x < \infty$ es:

$$y = c_1 J_{1/4}(x) + c_2 J_{-1/4}(x)$$

EJEMPLO 2

Hallar la solución general de la ecuación:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 16)y = 0$$

Como $v = 4 \rightarrow$ la solución general en $0 < x < \infty$ tendrá una $y_1 = J_4(x)$ y

$$y_2 = J_4(x)\int \frac{e^{-\int dx/x}}{J_4^2(x)}dx$$

$\therefore\ y = c_1 J_4(x) + c_2 J_4(x)\int \frac{dx}{xJ_4^2(x)}$

EJEMPLO 3

Hallar la solución general de la ecuación:

$$x^2y'' + xy' + \left(4x^2 - \frac{1}{9}\right)y = 0$$

Sea $z = 2x$ (y se convierte en ecuación de Bessel), donde $v = \frac{1}{3}$

$\rightarrow y = c_1 J_{1/3}(2x) + c_2 J_{-1/3}(2x)$ en $0 < x < \infty$

EJERCICIOS 6.7

Usar las transformaciones dadas para reducir las siguientes ecuaciones a otras de Bessel.

1. $x^2y'' + xy' + (9x^2 - 1)y = 0, \qquad z = 3x$

Respuesta: $y = c_1 J_1(3x) + c_2 J_1(3x)\int \frac{dx}{xJ_1^2(3x)}$

2. $x^2y'' + xy' + \left(4x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0, \qquad z = 2x$

Respuesta: $y = c_1 J_{1/2}(2x) + c_2 J_{-1/2}(2x)$

3. $x^2y'' + 3xy' + x^2y = 0,$

$a = 3,\ b = 0,\ c = 1,\ m = 2,$

$\alpha = \dfrac{a-1}{2} = 1,\ \beta = \dfrac{m}{2} = 1,\ \gamma = \dfrac{2\sqrt{c}}{m} = 1,\ v^2 = \dfrac{(a-1)^2 - 4b}{m^2} = 1$

$y = \left(\dfrac{t}{\gamma}\right)^{-\alpha/\beta} u,\ x = \left(\dfrac{t}{\gamma}\right)^{-1/\beta}$

$y = t^{-1}u,\ x = t$

Respuesta: $y = \dfrac{1}{x}\left[c_1J_1(x) + c_2J_2(x)\displaystyle\int \dfrac{e^{-\int 3dx/x}}{J_1^2(x)}dx\right]$

4. $x^2y'' + 5xy' + \left(2 + x^2\right)y = 0$ (vea ejercicio 3).

Respuesta: $y = \dfrac{1}{x^2}\left[c_1J_{\sqrt{2}}(2x) + c_2J_{-\sqrt{2}}(2x)\right]$

5. $x^2y'' + 7xy' + \left(3 + x^2\right)y = 0$

Respuesta: $y = \dfrac{1}{x^3}\left[c_1J_{\sqrt{6}}(x) + c_2J_{-\sqrt{6}}(x)\right]$

6. $x^2y'' + xy' + \left(\dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{25}\right)y = 0, \qquad z = \dfrac{1}{2}x$

Respuesta: $y = c_1J_{1/5}\left(\dfrac{x}{2}\right) + c_2J_{-1/5}\left(\dfrac{x}{2}\right)$

7. $x^2y'' + xy' + 4\left(x^2 - 9\right)y = 0, \qquad z = x^2$

Respuesta: $y = c_1J_3\left(x^2\right) + c_2J_3\left(x^2\right)\displaystyle\int \dfrac{e^{-\int dx/x}}{J_3^2\left(x^2\right)}dx$

8. $4x^2y'' + 4xy' + \left(x - \dfrac{1}{36}\right)y = 0, \qquad z = \sqrt{x}$

Respuesta: $y = c_1J_{1/6}\left(\sqrt{x}\right) + c_2J_{-1/6}\left(\sqrt{x}\right)$

9. $y'' + xy = 0$ (ecuación de Airy) $y = u\sqrt{x}$, $z = \dfrac{2}{3}x^{3/2}$

Respuesta: $y = \sqrt{x}\left[AJ_{1/3}\left(\dfrac{2}{3}x^{3/2}\right) + BJ_{-1/3}\left(\dfrac{2}{3}x^{3/2}\right)\right]$

10. Demostrar que: $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n), n > 0$

11. Probar que: $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Sugerencia: Hacer $u = x^2$ y usar coordenadas polares para obtener primero: $I^2 = \pi$, donde I es la definición de la función gamma para $x = \dfrac{1}{2}$

12. Hallar: $\Gamma(-0.5)$

Respuesta: -3.5448

13. Hallar: $\Gamma(-1.2)$

Respuesta: 4.8504

14. Hallar: $\Gamma(2.7)$
Respuesta: 1.5446

15. Graficar en el mismo sistema de coordenadas J_0 y J_1, las funciones de Bessel de orden cero y uno.

Resolver las siguientes ecuaciones de Bessel:

16. $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$

Respuesta: $y = c_1 J_{1/2}(x) + c_2 J_{-1/2}(x)$

17. $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{81}\right)y = 0$

Respuesta: $y = c_1 J_{1/9}(x) + c_2 J_{-1/9}(x)$

18. $x^2y'' + xy' + \frac{x^2}{9}y = 0; \qquad z = \frac{x}{3}$

Respuesta: $y = AJ_0\left(\frac{x}{3}\right) + BJ_0\left(\frac{x}{3}\right)\int \frac{dx}{xJ_0^2(x/3)}$

19. Probar que en la solución del ejercicio 16 se cumple que:

$J_{1/2}(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}$ y $J_{-1/2}(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$

Sugerencia: $y = \frac{u}{\sqrt{x}}$

20. Probar que $J_{1/2}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1/2}}{m!\,\Gamma\left(m + \frac{3}{2}\right)} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\operatorname{sen} x$

Sugerencia: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

21. $xy'' - y' + 4x^5y = 0$

Respuesta: $y = x\left[c_1 J_{1/3}\left(\frac{2}{3}x^3\right) + c_2 J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}x^3\right)\right]$

22. $y'' + \frac{5}{x}y' + y = 0$

Respuesta: $y = \frac{1}{x^2}\left[AJ_2(x) + BJ_2(x)\int \frac{e^{-\int 5/x\,dx}}{J_2^2(x)}dx\right]$

23. $xy'' + \frac{1}{2}y' + \frac{1}{4}y = 0$

Respuesta: $y = \sqrt[4]{x}\left[c_1 J_{1/2}\left(\sqrt{x}\right) + c_2 J_{-1/2}\left(\sqrt{x}\right)\right]$

24. $x^2y'' - 2xy' + \left(4x^4 - 4\right)y = 0$

Respuesta: $y = x^{3/2}\left[c_1 J_{5/4}\left(x^2\right) + c_2 J_{-5/4}\left(x^2\right)\right]$

25. Probar: $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, n entero.

Resumen

Serie

DEFINICIÓN

Suma de los términos de una sucesión:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

ALTERNANTE

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n + \ldots$$

POTENCIAS

Taylor, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, \quad a \neq 0$

Maclaurin, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad a = 0$

TAYLOR

Una función se representa mediante una serie, usando:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$$

CONVERGENCIA

Si $|x-a| < R$, R es el radio de convergencia.

PRUEBAS DE CONVERGENCIA. (Vea páginas 248 a 251.)

Definiciones

FUNCIÓN ANALÍTICA EN UN PUNTO

Una función es analítica en x_0 si se puede desarrollar en una serie de potencias de $x - x_0$

PUNTO ORDINARIO

De una ecuación diferencial: $y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$ es aquel punto x_0 en el cual ambas funciones $f(x)$ y $g(x)$ son analíticas.

PUNTO SINGULAR

Es aquel punto x_0 en el cual $f(x)$ o $g(x)$ no son analíticas.

PUNTO SINGULAR REGULAR

Si al multiplicar $f(x)$ por $(x - x_0)$ y $g(x)$ por $(x - x_0)^2$ ya son analíticas en $x = x_0$

PUNTO SINGULAR IRREGULAR

Si a pesar de los productos anteriores no son analíticas en $x = x_0$

Teoremas

1. CONVERGENCIA DE UNA SERIE DE POTENCIAS

En una serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ se cumple exactamente una de las tres:

a. La serie converge solamente en $x = 0$
b. La serie es absolutamente convergente en $x \in R$ (reales).
c. Existe un número $R > 0$ tal que la serie es absolutamente convergente para toda x que satisface $|x| < R$ y diverge cuando $|x| > R$.

Para encontrar la convergencia: prueba de la razón.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_n x^n}\right| = L \text{ donde } L < 1 \text{ da la convergencia.}$$

2. ANALITICIDAD

a. Si $f(x)$ y $g(x)$ son analíticas en x_0

$$\to f(x)+g(x), \quad f(x)\cdot g(x) \quad \text{y} \quad f(x)/g(x), \quad g(x_0)\neq 0$$

son analíticas en x_0

b. Si $f(x)$ es analítica en x_0 y $f^{-1}(x)$ es la función

$$\text{inversa, continua, con } f^{-1}(x_0)\neq 0$$

$\to f^{-1}(x)$ es analítica en x_0

c. Si $g(x)$ es analítica en x_0 y $f(x)$ es analítica en x_0

$$\to f\big(g(x)\big) \text{ es analítica en } x_0$$

3. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN

Sea $y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$ una ecuación diferencial con un punto ordinario en $x = x_0$ y sean a, b, constantes arbitrarias. Existirá una función única $y(x)$ analítica en x_0 que es una solución de la ecuación dada en los alrededores de x_0 y satisface las condiciones iniciales $y(x_0) = a$ y $y'(x_0) = b$. Si el dominio de f y g es $|x - x_0| < R$, con $R > 0 \to y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ también es válida en el mismo intervalo.

4. EXISTENCIA DE UNA SOLUCIÓN ALREDEDOR DE UN PUNTO SINGULAR REGULAR

Sea $y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$ una ecuación diferencial con un punto singular en $x = x_0$, entonces siempre existe al menos una solución de la forma:

$$y(x) = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

Que converge en: $0 < |x - x_0| < R$

Método para resolver una ecuación diferencial mediante series de potencias

1. Suponemos una solución:

   $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ (x_0 punto *ordinario*)

2. Se deriva tantas veces como indique el orden de la ecuación diferencial dada.
3. Se sustituye y y sus derivadas en la ecuación diferencial.
4. Se utiliza un cambio de variable para igualar los exponentes.
5. Se extraen de las sumas los términos que contengan más, de forma que todas empiecen con el mismo índice.
6. Se igualan los coeficientes de ambos lados de la igualdad.
7. Se obtiene la fórmula de recurrencia para obtener el valor de cada c_n, para $n = 0, 1, 2, \ldots$ y se establece la serie solución.

Método de Frobenius (alrededor de puntos singulares para ecuaciones de segundo orden).

1. Suponemos la solución $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$

   Los pasos 2 al 5 son iguales al método anterior.

6. Se toma la o las sumas de menor exponente y se hacen $n = 0$, con el fin de obtener la ecuación de índices, con $c_0 \neq 0$
7. De la ecuación de índices se obtienen dos raíces r_1 y r_2. Tomamos siempre $r_1 > r_2$
8. Según sean r_1 y r_2 hay tres casos con sus correspondientes formas de solución:

   $r_1 - r_2 \neq$ entero

$$y_1 = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad c_0 \neq 0$$

$$y_2 = x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad \mathrm{b}_0 \neq 0$$

   $r_1 = r_2 = r$

$$y_1 = x^{r} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad c_0 \neq 0$$

$$y_2 = y_1 \ln x + x^{r} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

   $r_1 - r_2 =$ entero positivo.

$$y_1 = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad c_0 \neq 0$$

$$y_2 = k y_1 \ln x + x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad b_0 \neq 0$$

Y $y = c_0 y_1 + b_0 y_2$ será la solución general en los tres casos.

9. Para encontrar y_1 se usa el método anterior sustituyendo en la fórmula de recurrencia la r general por la r_1 obtenida en la ecuación de índices.

10. Para obtener y_2, se puede probar el mismo procedimiento: sustituir r_2 en la fórmula de recurrencia, o bien usar:

a. Variación de parámetros (todo el proceso)

b. Directamente la fórmula $y_2 = y_1 = \int \frac{e^{-\int v(x)dx}}{y_1^2} dx$

donde $p(x) = \dfrac{\text{coeficiente de } y'}{\text{coeficiente de } y''}$

c. Por derivación.

Ecuación de Bessel

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0$$

v es el parámetro.

SOLUCIÓN:

Si $v \neq$ entero $\quad y = c_1 J_v(x) + c_2 J_{-v}(x)$

Si $v =$ entero $\quad y = c_1 J_v(x) + c_2 J_v(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{J_v^2(x)} dx$

Función gamma

Definición: $\Gamma(n) = \int t^{n-1} e^{-t} dt$

Fórmula de recurrencia: $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$

Propiedades: $\Gamma(1) = 1$

$\Gamma(n+1) = n!$

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Autoevaluación 6

1. Encontrar la serie de potencias correspondiente a la función $y = x^2 e^{-x}$ alrededor de $x = 0$

2. Elegir la opción que contiene el conjunto de convergencia absoluta y el radio de convergencia de la serie: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

a. Conjunto $(-1, 1)$ $\quad R = 1$
b. Conjunto $(-1, 1]$ $\quad R = 1$
c. Conjunto $[-1, 1)$ $\quad R = 1$
d. Conjunto $[-1, 1]$ $\quad R = 1$

3. Encontrar el radio de convergencia de la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n+2}$$

4. Calcular la siguiente integral, mediante series de potencias con una precisión de 10^{-5}:

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$$

5. Definir función analítica en un punto.

6. Enunciar el teorema de existencia y unicidad de las soluciones obtenidas mediante series de potencias.

7. Elegir la opción que contiene la definición de punto singular regular de $y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$

a. Es un punto en donde las funciones $f(x)$ y $g(x)$ no tienen ni pueden tener una representación en series de potencias.

b. Es el punto x_0 que al formar los siguientes productos $f(x)(x-x_0)$ y $g(x)(x-x_0)^2$ hace que sean analíticos en x_0.

c. Es el punto x_0 que al formar los siguientes productos $f(x)(x-x_0)^2$ y $g(x)(x-x_0)$, hace que sean desarrollables en series de potencias.

d. Es el punto donde una ecuación tiene representación en series de potencias, no importando si están definidas o no las funciones en dicho punto.

8. Resolver mediante series de potencias la siguiente ecuación diferencial: $y'' + xy' = y$, alrededor de $x = 0$.

9. Seleccionar la opción que contiene la solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$y'' + xy = x^3 - 1$$

a. $y = c_0\left(1 + x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{180} + \ldots\right) + c_1\left(\frac{x^2}{2} - \frac{3}{40}x^5 + \frac{3}{2240}x^8 - \ldots\right)$

b. $y = c_0\left(1 - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{180} - \ldots\right) + c_1\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{3}{40}x^5 - \frac{3}{2240}x^8 + \ldots\right)$

c. $y = c_0\left(1 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} - \frac{x^9}{12960} + \ldots\right) + c_1\left(-x + \frac{x^4}{12} - \frac{x^7}{504} + \ldots\right) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{40}x^5$
$- \frac{3}{2240}x^8 - \ldots$

d. $y = c_0\left(1 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} - \frac{x^9}{12960} + \ldots\right) + c_1\left(-x + \frac{x^4}{12} - \frac{x^7}{504} + \ldots\right)$
$+ \frac{x^2}{2} - \frac{3}{40}x^5 + \frac{3}{2240}x^7 - \ldots$

10. Encontrar la ecuación de índices, la solución completa y_1 y la forma general de la solución y_2 (método de Frobenius) de:

$$xy'' + (1-x)y' + y = 0$$

11. Elegir la opción que contiene la solución general de $5xy'' + y' + y = 0$ obtenida por el método de Frobenius:

a. $y = c_0 x^{4/5}\left(1 - \frac{x}{9} + \ldots\right) + b_0\left[y_1 \ln x + (1 - x + \ldots)\right]$

b. $y = c_0\left(1 - \frac{x}{9} + \frac{x^2}{252} - \frac{x^3}{14364} + \ldots\right) + b_0 y_1 \ln x$

$$+ b_0\left(1 - x + \frac{x^2}{12} - \ldots\right)$$

c. $y = c_0\left(1-\frac{x}{9}+\frac{x^2}{252}-\frac{x^3}{14364}+...\right)+b_0x^{4/5}\left(1-x+\frac{x^2}{12}-...\right)$

d. $y = c_0x^{4/5}\left(1-\frac{x}{9}+\frac{x^2}{252}-...\right)+b_0\left(1-x+\frac{x^2}{12}-...\right)$

12. Dadas: la ecuación $xy''-y'+2x^2y=0$

Con $r_1 = 2$, $r_2 = 0$ y la solución:

$$y_1 = c_0x^2\left(1-\frac{2}{15}x^3+\frac{1}{180}x^6-\frac{1}{8910}x^9+...\right)$$

Encontrar y_2

13. Elegir la opción que contiene una ecuación de Bessel y su solución obtenida al reducir la siguiente ecuación:

$$x^2y''+3xy'+\left(-\frac{1}{2}+x^2\right)y=0, \text{ usando las siguientes}$$

transformaciones:

$$y=\frac{u}{t},\ x=t \text{ o } y=\frac{u}{x}$$

a. $x^2u''+xu'+\left(x^2-\frac{3}{2}\right)u=0$, con solución:

$$y = c_0J_{\sqrt{3/2}}(x)+c_1J_{-\sqrt{3/2}}(x)$$

b. $t^2u''+tu'+\left(t^2-\frac{3}{2}\right)u=0$, con solución:

$$y=\frac{1}{x}\left[c_0J_{\sqrt{3/2}}(x)+c_1J_{-\sqrt{3/2}}(x)\right]$$

c. $x^2u''+xu'+\left(x^2-\frac{3}{2}\right)u=0$, con solución:

$$y=\frac{1}{x}\left[c_0J_{\sqrt{3/2}}(x)+c_1J_{1-\sqrt{3/2}}(x)\int\frac{dx}{J_{3/2}^2(x)}\right]$$

d. $t^2u''+tu'+\left(t^2-\frac{3}{2}\right)u=0$, con solución:

$$y = c_0J_{3/2}(x)+c_1J_{-3/2}(x)$$

14. Elegir la opción que da la solución de:

$$x^2y''+xy'+\left(\frac{1}{16}x^2-1\right)y=0$$

a. $c_1J_1(x)+c_2J_{-1}(x)$

b. $c_1J_1(x)+c_2J_1(x)\int\frac{dx}{xJ_1^2(x)}$

c. $c_1J_1\left(\frac{x}{4}\right)+c_2J_1\left(\frac{x}{4}\right)\int\frac{dx}{xJ_1^2(x/4)}$

d. $c_1J_1\left(\frac{x}{4}\right)+c_2J_{-1}\left(\frac{x}{4}\right)$

15. Encontrar la solución de la siguiente ecuación de Bessel:

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{4}{9}\right)y=0$$

Respuestas de la autoevaluación 6

1. $x^2e^{-x} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{m+2}}{m!}$

2. *c*. Como converge en $x = -1$, las opciones *a* y *b* están erróneas, y como diverge en $x = 1$, las opciones *b* y *d* están mal.

3. R= $\frac{1}{2}$

4. 0.94608

5. Vea página 268 del texto.

6. Vea página 280 del texto.

7. *b*. La opción *a* define un punto singular irregular. La opción *c* tiene los factores intercambiados. La opción *d* no analiza el caso de la singularidad para ver si es removible.

8. $y = c_0\left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{240} + ...\right) + c_1x$

9. *c*. Las opciones *a* y *b* toman de forma incorrecta la fórmula de recurrencia que debe de ser:

$$c_{k+2} = \frac{-c_{k-1}}{(k+2)(k+1)},\ k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

y $20c_5 + c_2 = 1$ para $k = 3$

La opción *d* tiene un error en el signo.

10. Ecuación de índices $c_0r^2 = 0$

$$\therefore y_1 = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m, y_2 = y_1 \ln x + \sum_{m=1}^{\infty} b_m x^m$$

y $y_1 = c_0(1-x)$.

11. *d*. Las opciones *a* y *b* suponen que $r_1 - r_2 \neq$ número fraccionario.

Como $r_1 - r_2 = \frac{4}{5} - 0 = \frac{4}{5}$, entonces, $y_1 = x^{4/5}\sum c_m x^m$

La opción *c* contiene el error de poner r_1 en la y_2 y r_2 en la y_1

12. $y_2 = b_0\left(1 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{18}x^6 - \frac{1}{567}x^9 + ...\right)$

13. *b*. La opción *a* no tiene expresada correctamente la ecuación de Bessel, pues aunque sí tiene la forma, posee la variable incorrecta en la solución: falta dividir entre *x*.

La opción *c* supone que el parámetro es un entero.

La opción *d* no toma la raíz de v^2 y no donde entren *x* como sugiere la transformación usada.

14. *c*. La opción *a* no toma bien el parámetro y no transforma la ecuación a una de Bessel.

La opción *b* tampoco hizo la transformación.

La opción *d* no toma bien el parámetro.

15. $y = c_1J_{2/3}(x) + c_2J_{-2/3}(x)$

Federico Guillermo Bessel

Esencialmente astrónomo, Federico Guillermo Bessel alcanzó, sin embargo, cierta notoriedad también en matemáticas. Nacido en Rusia, pero de nacionalidad alemana, consiguió el puesto de director de un observatorio a los 26 años, al tiempo que se convirtió en amigo del gran Gauss.

Como astrónomo recopiló datos observacionales y formó un catálogo de estrellas. Fue el primero en calcular la distancia de la Tierra a una estrella (61 del cisne), explicando que el aparente movimiento de ésta se debe, en realidad, a la rotación de nuestro planeta alrededor del Sol. Gracias a un heliómetro de su fabricación, detectó unas perturbaciones en la órbita de Sirio y Proción. Además, afirmó la existencia de compañeros de Sirio y Proción, hipótesis que se verificó poco después de su muerte, acaecida en 1846.

En matemáticas estableció la ecuación diferencial que lleva su nombre, al estudiar el movimiento de cuerpos celestes y, resolviéndola, creó las famosas funciones de Bessel.

Federico Guillermo Bessel (1784-1846)

Si hay quien lo sabe,
yo lo sé más que ése, y si lo ignora,
más que ése lo ignoro.
Lucha entre este saber y este ignorar
es mi vida, su vida y es la vida…

JUAN RAMÓN JIMÉNEZ

Rompecabezas

Un tipógrafo compuso $X = acba$ en vez de $X = a^c b^a$.
Pero, ¡oh sorpresa!, el número X no se alteró. ¿Cuál es ese número?
Solución: $X = 2\,592$

Los pasatiempos y las paradojas fueron ya populares en la antigüedad; los hombres de todas las épocas agudizaron su ingenio con los juegos. Sabemos que Kepler, Pascal, Fermat, Leibniz, Euler, Lagrange y otros, dedicaron mucho tiempo a solucionar rompecabezas. Las investigaciones en el campo de los pasatiempos matemáticos surgen de la misma curiosidad, están guiadas por los mismos principios y requieren las mismas facultades que los estudios relacionados con los descubrimientos más profundos de las matemáticas puras.

PARADOJAS

$$\text{Si } 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots = \ln 2$$

reordenando obtenemos:

$$\ln 2 = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots\right)$$

$$=\left[\left((1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots\right)\right]-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots$$

$$-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots\right)=0$$

$$\therefore \ln 2 = 0$$

$$\text{Si } 1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots=\frac{1}{1-x}$$

Entonces, Euler probó para $x = 2$ y quedó sorprendido del resultado:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots = -1$$

¿Es posible este resultado o tiene algún “pequeño” error?

Problema

Supongamos que un mono de 10 kg de peso cuelga de uno de los extremos de una cuerda que pasa por una polea, en un tiempo $t = 0$; del otro extremo de la soga pende un peso también de 10 kg. El mono decide trepar por la cuerda. ¿Qué sucede y cuál es la ecuación representativa del proceso?

Propiedades metafísicas del número 6

Representa el principio del movimiento y de reposo. Simboliza la actuación del Verbo en cada ser, la aptitud generativa, la concordia, la estabilidad, la adaptación, la tentación y la virtud que la resiste. Según los pitagóricos, el número 6 es la *panacea nupcial* y para que lo sea se deben ejercitar las siguientes virtudes:

1. Dar hospitalidad.
2. Proporcionar comodidad a los enfermos.
3. Instruir a los niños en edad temprana.
4. Vivir de acuerdo con la ley.
5. Ser tolerante con el vecino.
6. Dedicar una parte de cada día a la meditación y a la oración.

Numeración hindú (aprox. 200 a 300 a. C.)

1	2	4	7	10	20	100	1 000

HORIZONTALES

1. Series de forma cnx^n
2. Compostura que se hace en el casco de la nave. Papa…
3. Vocal. Donad. Hijo de Dédalo.
4. Aspire, solicite. Vocal.
5. Abreviatura de universidad. Gran astrónomo alemán que trabajó las ecuaciones:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0$$

6. Terminación de los alcoholes. Negación. Vocal. Vocal. Vocal.
7. Matemático que desarrolló un procedimiento para resolver ecuaciones alrededor de puntos singulares mediante series.
8. Rey, en francés. El, en francés, consonante. Consonante.
9. Vocal. Cetáceo de hasta 10 m de largo, cabeza redonda, color azul por el lomo y blanco por el vientre; persigue a las focas y ballenas. Uno de los cuatro elementos básicos de la naturaleza.
10. Conjunto de reglas o principios sobre una materia enlazados entre sí. Vocal en plural.

VERTICALES

1. Abreviatura de capital. Vocal. Animal doméstico.
2. Apócope de papá. Apellido de un novelista mexicano. Vocal.
3. Colocación de algo en un lugar que le corresponde. Corrientes de agua.
4. Miembro de los clérigos de San Cayetano. RT.
5. (Por) en consecuencia, por tanto. Dificultad, obstáculo, inconveniente.
6. Símbolo químico del sodio. Símbolo químico del niobio. País de Asia antigua, patria de los elamitas.
7. Constante. Imaginan, piensan. Vocal.
8. Habitantes del antiguo Perú. Cólera, enojo.
9. Vocales. Reptil de piel escamosa, cuerpo y cola largos y extremidades cortas.
10. Suma de los términos de una sucesión. Consonante. Nota musical.
11. Artículo neutro. Artículo femenino. Singular. Pronombre personal.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	■										■
2							■				
3		■				■					
4									■		■
5	■				■						
6			■			■		■		■	
7	■										■
8				■			■			■	
9		■					■				
10								■			

7

Transformadas de Laplace

Pierre Simon
(1749-1827)

Introducción
Transformada inversa de Laplace
Traslación sobre el eje *s*
Existencia de la transformada
Propiedades de la transformada de Laplace
Resolución de ecuaciones diferenciales mediante la transformada de Laplace usando fracciones parciales
Derivación de transformadas
Integración de las transformadas
Función escalón unitario
Traslación sobre el eje *t*
Funciones periódicas
Convolución
Aplicaciones de la transformada de Laplace

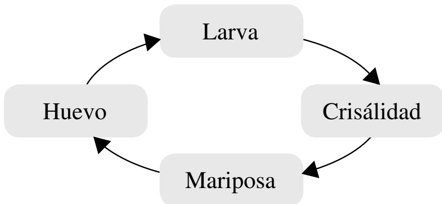
Transformación:	Modificación:	Transfiguración,
cambio,	giro,	tú-yo
variación,	mutación,	conversión,
metamorfosis.	metempsicosis.	pura “yo-tuosis”.

Introducción

Nuestro planeta es el reino de las transformaciones, unas lineales:

$$\text{Semilla} \rightarrow \text{trigo} \rightarrow \text{pan}$$

Otras cíclicas:



Otras más, reversibles:

$$\text{ED} \rightarrow \text{TL} \rightarrow \text{EA} \rightarrow \text{sol. A. TL}^{-1} \rightarrow \text{Solución de la ED.}$$

Donde: ED = ecuación diferencial.
TL = transformada de Laplace.
EA = ecuación algebraica racional.
Sol. A. = Solución de la ecuación algebraica racional.
TL^{-1} = Transformada inversa de Laplace.

La TL tiene inversa, por eso se le llamó reversible.

Pierre Simon de Laplace estableció una transformación mediante la integral siguiente:

Definición 7.1

Transformada de Laplace. Sea $f(t)$ una función definida para $t \geq 0$; a la expresión:

$$£ f\{(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = F(s)$$

Se le llama *transformada de Laplace* de la función $f(t)$ si la integral existe.

Notación: $£ f\{(t)\}$ significa que el operador £ se aplica a la función $f(t)$ para generar una nueva función, llamada $F(s)$.

EJEMPLO 1

Hallar $\pounds\{c\}$ donde c es un real; por definición:

$$\pounds\{c\} = \int_0^{\infty} e^{-st} c\,dt$$
$$= \lim_{b\to\infty} c \int_0^{b} e^{-st} dt$$
$$= \lim_{b\to\infty} c \left.\frac{-e^{-st}}{s}\right|_0^b$$
$$= \lim_{b\to\infty} c \frac{-e^{-st}+1}{s}$$
$$= \frac{c}{s} \text{ para } s > 0$$

NOTA: Para abreviar, la integral impropia se expresará sin la función límite, aunque naturalmente se sobreentiende.

EJEMPLO 2

Hallar: $\pounds\{t\}$

Por definición:

$$\pounds\{t\} = \int_0^{\infty} e^{-st} t\,dt$$

Usando integración por partes:

$$= -\frac{t}{s} e^{-st}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{s}\int_0^{\infty} e^{-st} dt$$
$$= -\frac{t}{s} e^{-st}\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{s} e^{-st}\Big|_0^{\infty}$$

Veamos el primer término:

$$\lim_{t\to\infty} -\frac{t}{se^{st}} + \lim_{t\to 0} \frac{t}{se^{st}},$$

Aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{-1}{s^2 e^{st}} = 0$$

y el segundo límite también es cero (esto ocurrirá no importa la potencia a que esté elevada la variable t). Por tanto:

$$-\frac{t}{s} e^{-st}\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{s^2} e^{-st}\Big|_0^{\infty} = -0 + \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2}$$

EJEMPLO 3

Hallar: $\pounds\left\{t^2\right\}$

Por definición:

$$\pounds\left\{t^2\right\} = \int_0^\infty e^{-st} t^2 dt$$

$$= -\frac{t^2}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty + \frac{2}{s} \int_0^\infty t e^{-st} dt$$

$$= -\frac{t^2}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty + \frac{2}{s}\left[-\frac{t}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} dt \right]$$

$$= -\frac{t^2}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty - \frac{2t}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty - \frac{2}{s^3} e^{-st} \Big|_0^\infty$$

$$= -0 + \frac{2}{s^3}$$

Observamos, después de estos ejemplos, que la transformada de una constante es la constante dividida entre la variable s; la transformada de t es $1/s^2$, y la transformada de t^2 es $\frac{2}{s^3}$. Entonces, podemos deducir, por la definición, que:

$$\pounds\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\text{donde } 0! = 1$$

EJEMPLO 4

Hallar: $\pounds\{e^{at}\}$.

Por definición:

$$\pounds\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt$$

$$= -\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \Big|_0^\infty = 0 + \frac{1}{s-a}$$

$$\therefore \pounds\left\{e^{at}\right\} = \frac{1}{s-a}, \quad s > a$$

EJEMPLO 5

Hallar: $\pounds\{\cos \omega t\}$

Por definición:

$$\pounds\{\cos \omega t\} = \int_0^\infty e^{-st} \cos \omega t dt$$

$$= -\frac{1}{s}e^{-st}s\cos\omega t\Big|_0^{\infty} - \frac{\omega}{s}\int_0^{\infty} e^{-st}\operatorname{sen}\omega t dt$$

$$= -\frac{1}{s}e^{-st}\cos\omega t\Big|_0^{\infty} + \frac{\omega}{s^2}e^{-st}\operatorname{sen}\omega t\Big|_0^{\infty}$$

$$-\frac{\omega^2}{s^2}\int_0^{\infty} e^{-st}\cos\omega t dt$$

$$\rightarrow \left(1+\frac{\omega^2}{s^2}\right)\int_0^{\infty} e^{-st}\cos\omega t dt = -\frac{1}{se^{st}}\cos\omega t\Big|_0^{\infty}$$

$$+\frac{\omega}{s^2e^{st}}\operatorname{sen}\omega t\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

$$\therefore \int_0^{\infty} e^{-st}\cos\omega t dt = \frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{\omega^2}{s^2}} = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

Notamos que cuando $t \rightarrow \infty$, entonces, $e^{-st} \rightarrow 0$ y $\cos\omega t$, $\operatorname{sen}\omega t$; por mucho que crezca t siempre están entre -1 y 1, limitados; por tanto, al crecer t sin límite, el cociente:

$\dfrac{\cos\omega t}{e^{st}}$, o $\dfrac{\operatorname{sen}\omega t}{e^{st}}$, se acerca más y más a cero.

La demostración rigurosa la da el *teorema*:

Sean *f, g, h* definidas en un intervalo abierto I que contiene a a,

si $f(x) \leq g(x) \leq h(x),\ x \in I$ y si

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} h(x)$ existen y son iguales a L,

$\rightarrow \lim\limits_{x\to a} g(x)$ existe y es igual a L.

Podríamos obviar esta dificultad, suponiendo que podemos encontrar la transformada de Laplace para e^{iat} (lo cual puede demostrarse también para los complejos).

$$\rightarrow \pounds\{e^{iwt}\} = \frac{1}{s-iw} \quad \text{(vea ejemplo 4)}$$

$$= \frac{s+iw}{s^2+w^2} = \frac{s}{s^2+w^2} + i\frac{w}{s^2+w^2}$$

y como sabemos que $e^{iwt} = \cos wt + i\operatorname{sen} wt$, igualando las partes reales y las imaginarias, se obtiene:

$$\pounds\{e^{iwt}\} = \pounds(\cos wt + i\operatorname{sen} wt) = \frac{s+iw}{s^2+w^2}$$

$$\therefore \pounds(\cos wt) = \frac{s}{s^2+w^2}$$

$$\text{y } \pounds(\operatorname{sen} wt) = \frac{w}{s^2 + w^2}$$

EJEMPLO 6

Hallar: $\pounds\{f(t)\}$ si $f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < 1 \\ 3 & t \ge 1 \end{cases}$

$$\pounds\{f(t)\} = \int_0^1 0e^{-st}dt + \int_1^\infty 3e^{-st}dt$$

$$= -\frac{3}{s}e^{-st}\Big|_1^\infty = \frac{3}{s}e^{-s}$$

EJEMPLO 7

Hallar: $\pounds\{\operatorname{senh} at\}$

Por definición: $\operatorname{senh} at = \dfrac{e^{at} - e^{-at}}{2}$

$$\pounds\{\operatorname{senh} at\} = \frac{1}{2}\pounds\{e^{at}\} - \frac{1}{2}\pounds\{e^{-at}\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{s+a-s+a}{s^2-a^2}$$

$$= \frac{a}{s^2-a^2}, \; s > |a|$$

En este ejemplo, hemos aplicado una importante propiedad de la transformada: su linealidad.

Teorema 1

La transformada de Laplace es un *operador lineal*: para cada función $f(t)$ y $g(t)$ cuya transformada de Laplace exista y para cualesquiera constantes a y b, tenemos:

$$\pounds\{af(t) + bg(t)\} = a\pounds\{f(t)\} + b\pounds\{g(t)\}$$

Demostración:

$$\pounds\{af(t) + bg(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\left[af(t) + bg(t)\right]dt$$

por definición de la transformada

$$= a\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt + b\int_0^\infty e^{-st}g(t)dt$$

puesto que la integral también es lineal

$$= a£\{f(t)\} + b£\{g(t)\}$$

EJEMPLO 8

Hallar: $£\{e^{-3t} + t^3 - 2\}$

$$£\{e^{-3t} + t^3 - 2\} = £\{e^{-3t}\} + £\{t^3\} - £\{2\} \text{ por linealidad,}$$

usando los ejemplos 4, 3 y 1, respectivamente:

$$= \frac{1}{s+3} + \frac{3!}{s^4} - \frac{2}{s}$$

$$= \frac{-s^4 - 6s^3 + 6s + 18}{s^4(s+3)}$$

Transformada inversa de Laplace

Definición 7.2
Transformada inversa de Laplace. Si $£\{f(t)\} = F(s)$, entonces, $£^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ se llama *transformada inversa de F(s).*

Notación: $£^{-1}\{F(s)\}$ indica que vamos a obtener la función $f(t)$ cuya transformada es precisamente $F(s)$. También la transformada inversa es lineal.

EJEMPLO 1

Sea: $F(s) = \frac{3}{s^2}$

Hallar $f(t)$ tal que $£^{-1}\left\{\frac{3}{s^2}\right\} = f(t)$.

Sabemos que: $£^{-1}\{1/s^2\} = t$ (ejemplo 2)

Por linealidad: $£^{-1}\{3/s^2\} = 3£^{-1}\{1/s^2\}$. Entonces, $£^{-1}\left\{\frac{3}{s^2}\right\} = 3t$

$\therefore f(t) = 3t$

EJEMPLO 2

Encontrar $f(t)$ si $F(s) = \frac{7}{s+3}$. Como $\frac{1}{s-a} = £\{e^{at}\}$ (vea ejemplo 4)

$$\rightarrow \frac{7}{s+3} = 7£\{e^{-3t}\} = £\{7e^{-3t}\}$$

$$\therefore f(t) = 7e^{-3t}$$

EJEMPLO 3

Hallar: $f(t)$ si $F(s) = \dfrac{1}{s^4}$

Como $£\left\{t^n\right\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}} \rightarrow \dfrac{1}{n!}£\left\{t^n\right\} = \dfrac{1}{s^{n+1}}$

en nuestro caso $n+1=4 \rightarrow n=3$,

$$\therefore f(t) = \frac{1}{3!}£^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\} = \frac{1}{3!}t^3 = \frac{1}{6}t^3$$

Traslación sobre el eje *s*

Teorema 2

Traslación sobre el eje s (primer teorema de traslación).

Si $£\{f(t)\} = F(s)$

$$\rightarrow £\left\{e^{at}f(t)\right\} = F(s-a),\ \ a \in R$$

Demostración:

$£\left\{e^{at}f(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)dt$ por definición, entonces,

$$= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt$$

$$= F(s-a)$$

Este teorema facilita encontrar transformadas sin resolver la integral, basta con recorrer la función. Gráficamente se vería así:

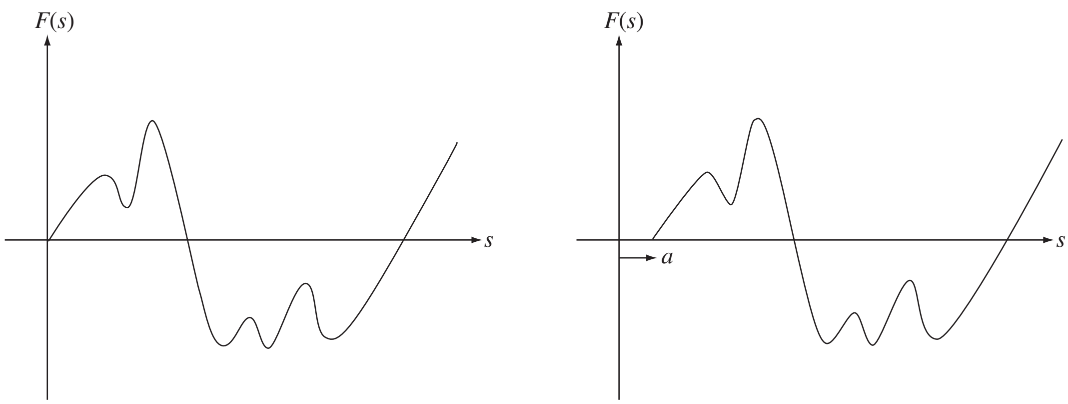


Figura 7-1.

EJEMPLO 1

Aplica el teorema de traslación para encontrar:

$$\text{£}\left\{t^2e^{6t}\right\}, \text{ donde } a=6$$

Como $\text{£}\left\{t^2\right\}=\dfrac{2}{s^3}$ (vea ejemplo 3)

$$\rightarrow \text{£}\left\{t^2e^{6t}\right\}=\frac{2}{\left(s-6\right)^3}$$

EJEMPLO 2

Hallar: $\text{£}\left\{e^{-2t}\operatorname{sen}3t\right\}$, $a=-2$

Como $\text{£}\left\{\operatorname{sen}3t\right\}=\dfrac{3}{s^2+9}$ (vea ejemplo 5)

$$\rightarrow \text{£}\left\{\operatorname{sen}3t\right\}=\frac{3}{(s+2)^2+9}$$

EJEMPLO 3

Hallar: $\text{£}\left\{e^{t}\cosh 2t\right\}$, $a=1$

Como $\text{£}\left\{\cosh 2t\right\}=\dfrac{1}{2}\text{£}\left\{e^{2t}\right\}+\dfrac{1}{2}\text{£}\left\{e^{-2t}\right\}$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-2}+\frac{1}{s+2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{s+2+s-2}{s^2-4}\right)$$

$$=\frac{s}{s^2-4}$$

$$\rightarrow \text{£}\left\{e^{t}\cosh 2t\right\}=\frac{s-1}{\left(s-1\right)^2-4}$$

También se nos puede pedir que encontremos la función $f(t)$ si conocemos su transformada de Laplace.

EJEMPLO 4

Hallar: $f(t)$ si $\text{£}\left\{f(t)\right\}=\dfrac{s+5}{s^2+2s+5}$

Primero acomodamos el denominador como suma o diferencia de cuadrados (que son hasta ahora las formas generales de las funciones más usadas).

$$s^2+2s+5=s^2+2s+1+4=(s+1)^2+4$$

$$\rightarrow £\{f(t)\}=\frac{s+1+4}{(s+1)^2+4}=\frac{s+1}{(s+1)^2+4}+\frac{4}{(s+1)^2+4}$$

$$=\frac{s+1}{(s+1)^2+4}+2\cdot\frac{2}{(s+1)^2+4}$$

Observamos que la función quedó recorrida $a=-1$; por tanto, la $f(t)$ debe quedar multiplicada por e^{-t}. Como sabemos (ejemplo 5) que:

$$£\{\cos\omega t\}=\frac{s}{s^2+\omega^2} \text{ y } £\{\operatorname{sen}\omega t\}=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

y en nuestro problema: $u^2=4,\ \omega=2,$

$$\rightarrow £\{\cos 2t\}=\frac{s}{s^2+4} \text{ y } £\{\operatorname{sen} 2t\}=\frac{2}{s^2+4}$$

Recorriendo ambas $s-(-1)=s+1$, tenemos:

$$f(t)=e^{-t}\cos 2t+2e^{-t}\operatorname{sen} 2t$$

$$\therefore f(t)=e^{-t}(\cos 2t+\operatorname{sen} 2t)$$

NOTA: Observamos que este resultado es la solución particular de una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes. De ahí la importancia del estudio de la transformada de Laplace.

Definición 7.3

Función seccionalmente continua.

$f(t)$ es función *seccionalmente continua* en $t\in[a,\ b]\leftrightarrow$

1. Está definida en todo punto del intervalo.
2. Si es posible dividir el intervalo $[a, b]$ en un número finito de subintervalos, en cada uno de los cuales la función es continua y existe el límite de la función desde el interior del subintervalo a cualquiera de los extremos del mismo.

Definición 7.4

Función de orden exponencial.

$f(t)$ es función de orden exponencial α.

$\leftrightarrow$ Existen $M,\ \alpha\in R$ tales que:

$$|f(t)|\le Me^{\alpha t}$$

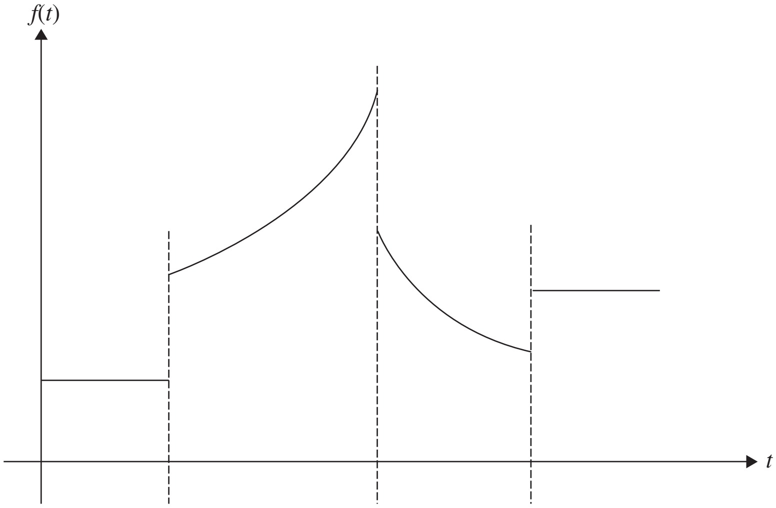


Figura 7-2.

Esta condición significa que la función $f(t)$ está acotada por exponenciales.

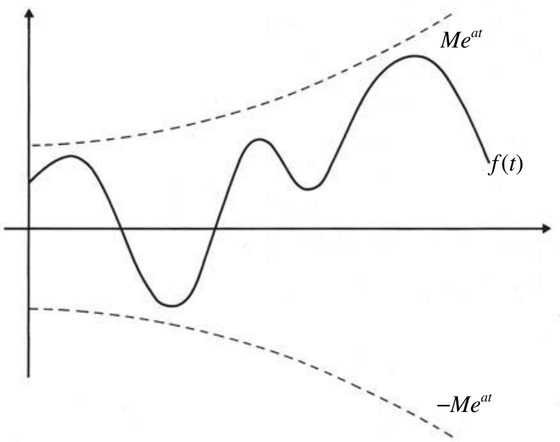


Figura 7-3.

EJEMPLO 1

Determinar si $f(t)=t^3$ es de orden exponencial α.

Hay que determinar si existe α de tal manera que:

$$\left|t^3\right| \leq Me^{\alpha t}$$

$$-Me^{\alpha t} \leq t^3 \leq Me^{\alpha t}$$

Tomando $t^3 \leq Me^{\alpha t}$, si a partir de un valor de α, la expresión $t^3 Me^{-\alpha t}$ decrece y se acerca a cero, a medida que α tiende a infinito, entonces, t^3 será de orden exponencial α (similarmente la otra desigualdad).

$$\to \lim_{t\to\infty} t^3 Me^{-\alpha t} = 0$$

$\therefore t^3$ es de orden exponencial α para $\alpha > 0$.

EJEMPLO 2

Determinar si $f(t) = e^{-2t}$ es de orden exponencial α.

Como en el ejemplo anterior:

$$\to \lim_{t\to\infty} e^{-2t} Me^{-\alpha t} = \lim_{t\to\infty} \frac{M}{e^{(\alpha+2)t}} = 0$$

$\therefore e^{-2t}$ es de orden exponencial α, si $\alpha > -2$.

Existencia de la transformada

Teorema 3

Existencia de la transformada. Sea $f(t)$ de orden exponencial α en $t \geq 0$. Sea $f(t)$ seccionalmente continua en $t \geq 0$.

$$\to \pounds\{f(t)\} \text{ existe para } s > \alpha.$$

Demostración:

Para cualquier entero positivo n, tenemos:

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^n \underbrace{e^{-st} f(t)dt}_{I_1} + \int_0^n \underbrace{e^{-st} f(t)dt}_{I_2}$$

Como $f(t)$ es seccionalmente continua en cada intervalo finito $0 \leq t \leq n$, la integral I_1, existe. Para la integral I_2 se cumple que:

$$|I_2| \leq \int_n^\infty |e^{-st} f(t)| dt$$

$$\leq \int_n^\infty e^{-st} |f(t)| dt$$

Como $f(t)$ es de orden exponencial α, existen M, α tales que: $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$.

$$\therefore \int_n^\infty e^{-st} |f(t)| dt \leq \int_n^\infty e^{-st} Me^{\alpha t} dt$$

$$= M \int_n^\infty e^{-(s-a)t} dt$$

$$= \frac{M}{-(s-\alpha)} e^{-(s-a)t} \Big|_n^\infty$$

$$= \frac{M}{s-\alpha} e^{-(s-a)n}, \text{ para } s > \alpha$$

EJEMPLO 1

Dado que: $\pounds^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^{a+1}}\right\}=\dfrac{t^{a}}{\Gamma(a+1)}$, hallar: $\pounds^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^{5/2}}\right\}$

Sea: $a+1=\dfrac{5}{2}\rightarrow a=\dfrac{3}{2}$.

Entonces, $\pounds^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^{5/2}}\right\}=\dfrac{t^{3/2}}{\Gamma(\frac{5}{2})}=\dfrac{t^{3/2}}{1.3293}$.

EJERCICIOS 7.1

Usaremos los siguientes resultados ya obtenidos:

$$\pounds\{c\}=\frac{c}{s}$$

$$\pounds\{t^{n}\}=\frac{n!}{s^{n+1}},\quad n=1,\,2,\,3,\,...$$

$$\pounds\{e^{at}\}=\frac{1}{s-a}$$

$$\pounds\{\operatorname{sen}\omega t\}=\frac{\omega}{s^{2}+\omega^{2}}$$

$$\pounds\{\cos\omega t\}=\frac{s}{s^{2}+\omega^{2}}$$

$$\pounds\{\operatorname{senh}at\}=\frac{a}{s^{2}+a^{2}}$$

$$\pounds\{\cosh at\}=\frac{s}{s^{2}-a^{2}}$$

$$\pounds\{e^{at}f(t)\}=F(s-a)$$

Encontrar la transformada de Laplace en las siguientes funciones:

Respuestas:

1. $f(t)=t^{6}$ $\qquad \dfrac{720}{s}$

2. $f(t)=e^{t/5}$ $\qquad \dfrac{5}{5s-1}$

3. $f(t)=4e^{-3t}$ $\qquad \dfrac{4}{s+3}$

4. $f(t)=e^{t-2}$ $\qquad \dfrac{1}{e^{2}(s-1)}$

5. $f(t)=6-t^{2}$ $\qquad \dfrac{6s^{2}-2}{s^{3}}$

6. $f(t)=t^4-3t^2+9$ $\qquad \dfrac{24-6s^2+9s^4}{s^5}$

En los siguientes ejercicios usar la definición para obtener la transformada de Laplace de las siguientes funciones:

Respuestas:

7. $f(t)=1-2t^3$ $\qquad \dfrac{1}{s}-\dfrac{12}{s^4}$

8. $f(t)=t-8+e^t$ $\qquad \dfrac{-7s^2+9s-1}{s^2(s-1)}$

9. $f(t)=\begin{cases} -1, 0<t<2 \\ 0, 2\le t<4 \\ 1, \quad t\ge 4 \end{cases}$ $\qquad \dfrac{1}{s}\left(e^{-2s}+e^{-4s}-1\right)$

10. $f(t)=\begin{cases} 1, 0<t<3 \\ t, \quad t\ge 3 \end{cases}$ $\qquad \dfrac{1}{s}\left(1+2e^{-3s}\right)+\dfrac{1}{s^2}e^{-3s}$

11. $f(t)=\begin{cases} 3t, 0<t<1 \\ 0, \quad t\ge 1 \end{cases}$ $\qquad 3\left(-\dfrac{1}{s}e^{-s}-\dfrac{1}{s^2}e^{-s}+\dfrac{1}{s^2}\right)$

12. $f(t)=te^t$ $\qquad \dfrac{1}{(s-1)^2}$

13. $f(t)=e^t\cos t$ $\qquad \dfrac{s-1}{(s-1)^2+1}$

14. $f(t)=t\cos t$ $\qquad \dfrac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$

15. $f(t)=t\,\mathrm{senh}\,t$ $\qquad \dfrac{2s}{(s^2-1)^2}$

16. $f(t)=\cosh at$ $\qquad \dfrac{s}{s^2-a^2}$

17. $f(t)=t\cosh 2t$ $\qquad \dfrac{s^2+4}{(s^2-4)^2}$

18. $f(t)=e^{-t}\cos t$ $\qquad \dfrac{s+1}{(s^2+1)^2+1}$

19. $f(t)=t^2e^{-3t}$ $\qquad \dfrac{2}{(s+3)^3}$

Usar las fórmulas para encontrar la transformada de Laplace de las siguientes funciones:

	Respuestas:
20. $f(t)=(t-2)^2$	$\frac{2}{s^3}-\frac{4}{s^2}+\frac{4}{s}$
21. $f(t)=te^{-2t}$	$\frac{1}{(s+2)^2}$
22. $f(t)=t^6-2t$	$\frac{720}{s^7}-\frac{2}{s^2}$
23. $f(t)=e^t(t+3)$	$\frac{3s-2}{(s-1)^2}$
24. $f(t)=4e^{5t}-3\operatorname{sen}4t$	$\frac{4}{s-5}-\frac{12}{s^2+16}$
25. $f(t)=6t^3+2\cos 9t$	$\frac{36}{s^4}+\frac{2s}{s^2+81}$
26. $f(t)=e^{-2t}\operatorname{sen}4t$	$\frac{4}{(s+2)^2+16}$
27. $f(t)=e^{4t}\cosh 5t$	$\frac{s-4}{(s-4)^2-25}$
28. $f(t)=e^{-2t}\cos 2t$	$\frac{s+2}{(s+2)^2+4}$
29. $f(t)=e^t\operatorname{senh}3t$	$\frac{3}{(s-1)^2-9}$
30. $f(t)=\cos 2t+\operatorname{sen}3t$	$\frac{s}{s^2+4}+\frac{3}{s^2+9}$
31. $f(t)=3\operatorname{sen}4t+e^{-2t}$	$\frac{12}{s^2+16}+\frac{1}{s+2}$
32. $f(t)=\operatorname{sen}t\cos t$	$\frac{1}{s^2+4}$
33. $f(t)=\operatorname{sen}^2 t$	$\frac{2}{s(s^2+4)}$
34. $f(t)=\cos^2 t$	$\frac{s^2+2}{s(s^2+4)}$

35. $f(t) = \operatorname{sen}^3 t$ $\qquad \dfrac{6}{(s^2+1)(s^2+9)}$

Sugerencia $\begin{cases} \operatorname{sen}^3 t = \operatorname{sen} t \operatorname{sen}^2 t \\ \operatorname{sen} t = \operatorname{sen}(2t - t) \end{cases}$

36. $f(t) = \operatorname{sen} t \cos 2t$ $\qquad \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{s^2+9} - \dfrac{1}{s^2+1}\right)$

37. $f(t) = (\operatorname{sen} t - \cos t)^2$ $\qquad \dfrac{s^2 - 2s + 4}{s(s^2+4)}$

38. $f(t) = (t+2)^2 e^t$ $\qquad \dfrac{4s^2 - 4s + 2}{(s-1)^3}$

39. $f(t) = \cos t \cos 2t$ $\qquad \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{s}{s^2+1} + \dfrac{s}{s^2+9}\right)$

40. $f(t) = e^{-t} \operatorname{sen}^2 t$ $\qquad \dfrac{2}{(s+1)(s^2+2s+5)}$

41. Probar que $£\{t^{\alpha}\} = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}, \ \alpha > -1$

42. Probar que $£\{t^{1/2}\} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$ Sugerencia: usar el resultado anterior.

43. Probar que $£\{t^{-1/2}\} = \sqrt{\dfrac{\pi}{s}}, \ s > 0.$

44. Probar que $£\{t^{3/2}\} = \dfrac{3\sqrt{\pi}}{4s^{5/2}}.$

En los siguientes problemas, encontrar $f(t)$ dada su transformada de Laplace $F(s)$, donde $f(t) = £^{-1}\{F(s)\}$.

Respuestas:

45. $F(s) = \dfrac{1}{s^2}$ $\qquad f(t) = t$

46. $F(s) = \dfrac{2}{s^3}$ $\qquad f(t) = t^2$

47. $F(s) = \dfrac{1}{s^4}$ $\qquad f(t) = \dfrac{1}{6}t^3$

48. $F(s) = \dfrac{1}{s^2} - \dfrac{1}{s+1}$ $\qquad f(t) = t - e^{-t}$

49. $F(s)=\dfrac{(s+2)^2}{s^3}$ $\qquad f(t)=1+4t+2t^2$

50. $F(s)=\dfrac{(s-3)^4}{s^5}$ $\qquad f(t)=1-12t+27t^2-18t^3+\dfrac{27}{8}t^4$

51. $F(s)=\dfrac{(s-1)^3}{s^4}$ $\qquad f(t)=1-3t+\dfrac{3}{2}t^2-\dfrac{1}{6}t^3$

52. $F(s)=\dfrac{2}{s^3}-\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{s-4}$ $\qquad f(t)=t^2-1+e^{4t}$

53. $F(s)=\dfrac{1}{s^3}+\dfrac{6}{s}+\dfrac{1}{s+9}$ $\qquad f(t)=\dfrac{1}{2}t^2+6+e^{-9t}$

54. $F(s)=\dfrac{1}{s-2}+\dfrac{1}{s+3}-\dfrac{24}{s^3}$ $\qquad f(t)=e^{2t}+e^{-3t}-12t^2$

55. $F(s)=\dfrac{1}{3s-2}$ $\qquad f(t)=\dfrac{1}{3}e^{2t/3}$

56. $F(s)=\dfrac{1}{4s+7}$ $\qquad f(t)=\dfrac{1}{4}e^{-7t/4}$

57. $F(s)=\dfrac{1}{2s-1}+\dfrac{3}{s^2}$ $\qquad f(t)=\dfrac{1}{2}e^{t/2}+3t$

58. $F(s)=\dfrac{1}{3(s-1)}+\dfrac{1}{3(s+1)}$ $\qquad f(t)=\dfrac{1}{3}e^{t}+\dfrac{1}{3}e^{-t}$

59. $F(s)=\dfrac{1}{4s-1}+\dfrac{1}{4(s-1)}$ $\qquad f(t)=\dfrac{1}{4}e^{t/4}+\dfrac{1}{4}e^{t}$

60. $F(s)=\dfrac{2s}{2s^2+1}$ $\qquad f(t)=\cos\dfrac{\sqrt{2}}{2}t$

61. $F(s)=\dfrac{1}{9s^2+1}$ $\qquad f(t)=\dfrac{1}{3}\operatorname{sen}\dfrac{1}{3}t$

62. $F(s)=\dfrac{s}{6s^2+4}$ $\qquad f(t)=\dfrac{1}{6}\cos\dfrac{2}{\sqrt{6}}t$

63. $F(s)=\dfrac{1}{25s^2-1}$ $\qquad f(t)=\dfrac{1}{5}\operatorname{senh}\dfrac{t}{5}$

64. $F(s)=\dfrac{4s}{4s^2-1}$ $\qquad f(t)=\cosh\dfrac{1}{2}t$

65. $F(s)=\dfrac{3s-2}{s^2+4}$ $\qquad f(t)=3\cos 2t-\operatorname{sen}2t$

66. $F(s)=\dfrac{s+4}{s^2+3}$ $\qquad f(t)=\cos\sqrt{3}t+4\dfrac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{sen}\sqrt{3}t$

67. $F(s)=\dfrac{7s-4}{s^2+9}$ $\qquad f(t)=7\cos 3t-\dfrac{4}{3}\operatorname{sen}3t$

68. $F(s)=\dfrac{1}{s^{3/2}}$ $\qquad f(t)=2\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}$

69. Probar que la función $\dfrac{1}{t^2}$ no tiene transformada de Laplace.

70. Probar que $\Gamma(0)=\infty$.

Elegir la opción que contiene la transformada de Laplace de las siguientes funciones:

71. $f(t)=\cos 3t-\operatorname{senh}3t$

a. $\dfrac{s}{s^2+9}-\dfrac{3}{s^2-9}$

b. $\dfrac{s}{s^2-9}-\dfrac{3}{s^2+9}$

c. $\dfrac{3}{s^2+9}-\dfrac{s}{s^2-9}$

d. $\dfrac{s}{s^2+9}-\dfrac{s}{s^2-9}$

72. $f(t)=\cos^2 2t$

a. $\dfrac{1}{s}+\dfrac{s}{s^2+16}$

b. $\dfrac{1}{s}+\dfrac{s}{s^2+4}$

c. $\dfrac{s^2+2}{s\left(s^2+4\right)}$

d. $\dfrac{s^2+8}{s\left(s^2+16\right)}$

73. $f(t)=\cosh^2 t-\operatorname{senh}^2 t$

a. $\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{s-2}+\dfrac{2}{s}+\dfrac{1}{s+2}\right]$

b. $\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{s-2}-\dfrac{2}{s}+\dfrac{1}{s+2}\right]$

c. $\dfrac{1}{s}$

d. $\dfrac{1}{4s}$

74. $f(t)=\left(\operatorname{sen}t+\cos t\right)^2$

a. $\left(\dfrac{1}{s^2+1}+\dfrac{s}{s^2+1}\right)^2$

b. $\dfrac{2}{s^2+4}$

c. $\dfrac{s^2+2s+4}{s\left(s^2+4\right)}$

d. $\dfrac{s^2+2}{s\left(s^2+4\right)}$

75. $f(t)=\left(1+e^{-t}\right)e^{t}$

a. $\dfrac{2s+1}{s\left(s+1\right)}$

b. $\dfrac{2s-1}{s\left(s-1\right)}$

c. $\dfrac{2s+1}{s+1}$

d. $\dfrac{2s-1}{s-1}$

76. $f(t)=e^{-2t}\left(3\cos 6t-5\operatorname{sen}6t\right)$

a. $\dfrac{3s-24}{s^2+4s+40}$

b. $\dfrac{-30}{s^2+4s+40}$

c. $\dfrac{8-5s}{s^2+4s+40}$

d. $\dfrac{3s+2}{s^2+4s+40}$

Elegir la opción que contiene la función $f(t)$ que se obtiene aplicando $£^1\left\{F(s)\right\}$ (la transformada inversa de $F(s)$).

77. $F(s)=\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}-\frac{3}{s-2}$

a. $f(t)=t^2+t^3-3e^{2t}$

b. $f(t)=t^2+t^3-3e^{-2t}$

c. $f(t)=1+t-3e^{-2t}$

d. $f(t)=1+t-3e^{2t}$

78. $£^1\left\{\frac{1}{3s-1}+\frac{2}{3(s-1)}\right\}$

a. $f(t)=\frac{1}{3}e^{t/3}+\frac{2}{3}e^{t}$

b. $f(t)=\frac{1}{3}e^{t/3}+\frac{2}{3}e^{t/3}$

c. $f(t)=\frac{1}{3}e^{t}+\frac{2}{3}e^{t/3}$

d. $f(t)=\frac{1}{3}e^{t}+\frac{2}{3}e^{t}$

79. $£^1\left\{\frac{s+8}{s^2+4s+8}\right\}$

a. $f(t)=\left(\operatorname{sen}2t+3\cos 2t\right)e^{-2t}$

b. $f(t)=\left(\cos 2t+3\operatorname{sen}2t\right)e^{-2t}$

c. $f(t)=\cos 8te^{-2t}$

d. $f(t)=\cos 4te^{-2t}$

80. $£^1\left\{\frac{s+1}{s^2+s+1}\right\}$

a. $e^{-t/2}\left[\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]$

b. $e^{-t}\left[\cos t+\operatorname{sen}t\right]$

c. $e^{-t/2}\left[\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]$

d. $e^{-t}\left[\operatorname{sen}\frac{1}{2}t+\cos\frac{1}{2}t\right]$

Respuestas:

71. *a.* La respuesta *b* corresponde a $f(t)=\cosh 3t-\operatorname{sen}3t$. La opción *c* corresponde a $f(t)=\operatorname{sen}3t-\cosh 3t$. La opción *d* corresponde a $f(t)=\cos 3t-\cosh 3t$.

72. *d.* Como $\cos^2 2t=\frac{1}{2}\left(1+\cos 4t\right)$, el error de la opción *a* es haber tomado $f(t)=1+\cos 4t$, el error de la *b* es haber tomado $f(t)=\frac{1}{2}\left(1+\cos 2t\right)$.

73. *c.* Debido a que $\cosh^2 t-\operatorname{senh}^2 t=1$ las opciones *a* y *b* contemplan sólo $£\left\{\cosh^2 t\right\}$ y $£\left\{\operatorname{senh}^2 t\right\}$. La opción *d* contiene un factor equivocado.

74. *c.* La opción *a* aplicó directamente la transformada dentro del paréntesis, en vez de desarrollar el cuadrado. La opción *b* presenta la transformada de $\operatorname{sen}2t$ únicamente. La opción *d* la de $\cos^2 t$ solamente.

75. *b.* La opción *a* representa la transformada de $1+e^{-t}$. Las opciones *c* y *d* olvidan misteriosamente la transformada de $f(t)=1$.

76. *a.* La opción *b* contiene la transformada de $f(t)=-5e^{-2t}\operatorname{sen}6t$. La opción *c* la de $f(t)=3e^{-2t}\operatorname{sen}6t-5e^{-2t}\cos 6t$ (que no es la que se pide). La opción *d* la de $f(t)=3e^{-2t}\cos 6t$.

77. *d*. La opción *a* tiene equivocados los dos primeros términos. La opción *b* supone que $F(s)=\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}-\frac{3}{s+2}$.

78. *a*. Los errores provienen de tomar la $F(s)=\frac{1}{3(s-1)}+\frac{2}{3(s-1)}$ o $F(s)=\frac{1}{3s-1}+\frac{2}{3s-1}$.

79. *b*. La opción *a* tiene intercambiadas las fórmulas. Las opciones *c* y *d* no acomodan la fracción correctamente y por eso falta la función sen $2t$.

80. *c*.

Propiedades de la transformada de Laplace

Algunas integrales se complican mucho o se invierte demasiado tiempo en ellas, aunque sean sencillas; por ejemplo: $£\{t^4 e^t \operatorname{sen} t\}$; de ahí la necesidad de usar teoremas que faciliten las operaciones.

Teorema 4

Transformada de la derivada de una función.

Si $£\{f(t)\}=F(s)\rightarrow £\{f'(t)\}=sF(s)-f(0)$

Demostración: $£\{f'(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt$

$$u=e^{-st},\ dv=f'(t)dt$$

$$du=-se^{-st}dt,\ v=f(t).$$

$$\rightarrow \left.\frac{f(t)}{e^{st}}\right|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

$$=-f(0)+s£\{f(t)\}$$

$$=sF(s)-f(0)$$

Procediendo de la misma manera, obtenemos:

$$£\{f''(t)\}=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$$

$$£\{f'''(t)\}=s^3F(s)-s^2f(0)-sf'(0)-f''(0),\ \text{etcétera.}$$

Generalizando:

$$£\{f^{(n)}(t)\}=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-s^{n-3}f''(0)-...-f^{(n-1)}(0).$$

Esta igualdad se cumple siempre que $f,\ f',\ f'',\ \cdots,\ f^{(n)}$ sean continuas en $t\geq 0$ y de orden exponencial α y, además, $f^{(n)}$ sea seccionalmente continua en $t>0$.

EJEMPLO 1

Usar este teorema para demostrar que:

$$£\{t\} = \frac{1}{s^2}.$$

Sea: $f(t) = t \to f'(t) = 1$ y $f(0) = 0$

$$\to £\{1\} = sF(s) - f(0) = s£\{t\} - f(0) = s£\{t\} - 0$$

Despejando: $£\{t\} = \frac{1}{s}£\{1\}$

$$= \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

EJEMPLO 2

Dada: $£\{\operatorname{sen} t\} = \frac{1}{s^2+1}$, usar el teorema de la *transformada de la derivada* para obtener $£\{\cos t\}$.

Sea $f(t) = \cos t$

$$\to f'(t) = -\operatorname{sen} t \text{ y } f(0) = 1$$

$$£\{-\operatorname{sen} t\} = s£\{\cos t\} - f(0)$$

$$1 - £\{\operatorname{sen} t\} = s£\{\cos t\}$$

$$£\{\cos t\} = \frac{1 - £\{\operatorname{sen} t\}}{s}$$

$$= \frac{1}{s}\left(1 - \frac{1}{s^2+1}\right)$$

$$= \frac{1}{s} \cdot \frac{s^2+1-1}{s^2+1}$$

$$= \frac{s}{s^2+1}.$$

EJEMPLO 3

Demostrar que: $£\{\operatorname{senh} at\} = \frac{a}{s^2-a^2}$, mediante el teorema de la *transformada de la derivada.*

Sea $f(t) = \operatorname{senh} at$, $f(0) = 0$,

$$f'(t) = a\cosh at,\ f'(0) = a,$$

$$f''(t) = a^2 \operatorname{senh} at.$$

$$£\{f''\} = s^2£\{\operatorname{senh} at\} - 0 - a$$

$$a = \left(s^2 - a^2\right)£\{\operatorname{senh} at\}$$

$$£\{\operatorname{senh} at\} = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

EJEMPLO 4

Hallar: $£\{t\cos\omega t\}$.

Sean $f(t) = t\cos\omega t,\ \ f(0) = 0$

$$f'(t) = -\omega t \operatorname{sen}\omega t + \cos\omega t,\ \ f'(0) = 1$$

$$f''(t) = -\omega^2 \cos t\omega t - 2\omega \operatorname{sen}\omega t,$$

$$\rightarrow £\{f''\} = s^2 £\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$$

$$\rightarrow £\{-\omega t \operatorname{sen}\omega t + \cos\omega t\} = s^2 £\{t\cos\varpi t\} - 0 - 1$$

$$-2\omega £\{\operatorname{sen}\omega t\} = \left(s^2 + \omega^2\right)£\{t\cos\omega t\} - 1$$

$$-2\omega\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} + 1 = \left(s^2 + \omega^2\right)£\{t\cos\omega t\}$$

$$£\{t\cos\omega t\} = \frac{\left(s^2 + \omega^2\right)}{\left(s^2 + \omega^2\right)^2}.$$

EJEMPLO 5

Resolver la siguiente ecuación diferencial con condiciones iniciales.

$$y'' - \frac{3}{2}y' - y = 0 \qquad y(0) = 0,\ \ y'(0) = \frac{5}{2}$$

$$£\{y''\} - \frac{3}{2}£\{y'\} - £\{y\} = £\{0\}$$

$$s^2 £\{y\} - sy(0) - y'(0) - \frac{3}{2}\left[s£\{y\} - y(0)\right] - £\{y\} = 0$$

$$£\{y\}\left\{s^2 - \frac{3}{2}s - 1\right\} = sy(0) - y'(0) - \frac{3}{2}y(0) = \frac{5}{2}$$

$$£\{y\} = \frac{5/2}{s^2 - \frac{3}{2}s - 1} \rightarrow £^{-1}\left\{\frac{5/2}{s^2 - \frac{3}{2}s - 1}\right\} = y$$

NOTA: Llamaremos $£\{y\} = (s)$

Aplicando el método de fracciones parciales:

$$\frac{5/2}{(s-2)\left(s+\frac{1}{2}\right)}=\frac{A}{s-2}+\frac{B}{s+\frac{1}{2}} \rightarrow \begin{matrix} B=1 \\ A=1 \end{matrix}$$

$$=\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s+\frac{1}{2}}$$

$$\therefore £^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s+\frac{1}{2}}\right\}=e^{2t}-e^{-t/2}$$

$$\therefore y=e^{2t}-e^{-t/2}$$

Teorema 5

Transformada de la integral de una función. Sea $f(t)$ una función seccionalmente continua en $t \geq 0$ y de orden exponencial α, y si $£\{f(t)\}=F(s)$, entonces,

$$£\left\{\int_0^1 f(\tau)d\tau\right\}=\frac{1}{s}£\{f(t)\}=\frac{1}{s}F(s)$$

Demostración:

Sea $G(t)=\int_0^t f(\tau)d\tau$

$$\rightarrow G'(t)=\frac{d}{dt}\int_0^t f(\tau)d\tau=f(t)$$

Además, $G(0)=\int_0^0 f(\tau)d\tau=0$

Tomando transformada de Laplace:

$$£\{G'(t)\}=s£\{G(t)\}-G(0)$$

$$=s£\{G(t)\}, \text{ de donde: } £\{G(t)\}=\frac{1}{s}£\{G'\}$$

$$=s\int_0^t e^{-st}\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right)dt \text{ integrando por partes:}$$

$$u=\int_0^t f(\tau)d\tau \qquad dv=\int_0^t e^{-st}dt$$

$$du=f(t)dt \qquad v=\frac{-1}{s}e^{-st}$$

Tenemos: $s\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\int_0^t f(\tau)d\tau\Big|_0^\infty+\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt\right]$

$$= \int_0^t e^{-st} f(t)dt$$

$$= \pounds\{f(t)\}$$

$$= F(s)$$

$$\rightarrow \pounds\{G'(t)\} = F(s)$$

Pero, $\pounds\{G(t)\} = \frac{1}{s}\pounds\{G'(t)\}$

$$= \frac{1}{s}F(s)$$

EJEMPLO 6

Hallar $f(t)$ mediante e teorema de la *transformada de la integral*, si

$$F(s) = \frac{1}{s\left(s^2-1\right)}$$

Sabemos que $\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-1}\right\} = \operatorname{senh} t$, entonces,

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s\left(s^2-1\right)}\right\} = \int_0^t \operatorname{senh}\tau d\tau = \cosh\tau\Big|_0^t = \cosh t - 1$$

$$\therefore f(t) = \cosh t - 1$$

EJEMPLO 7

Dada $F(s) = \frac{20}{s^2\left(s-2\right)}$ hallar $f(t)$ usando el teorema de la *transformada de la integral* de una función. Sabemos que $\pounds^{-1}\left\{\frac{20}{s-2}\right\} = 20e^{2t}$,

$$\rightarrow \pounds^{-1}\left\{\frac{20}{s(s-2)}\right\} = \int_0^t 20e^{2\tau}d\tau = 10e^{2\tau}\Big|_0^t = 10e^{2\tau} - 10$$

$$\text{Y } \pounds^{-1}\left\{\frac{20}{s^2(s-2)}\right\} = \int_0^t \left(10e^{2\tau} - 10\right)d\tau$$

$$= 5e^{2\tau} - 10\tau\Big|_0^t$$

$$= 5e^{2\tau} - 10\tau - 5,$$

$$\text{Y } \rightarrow \pounds^{-1}\left\{\frac{20}{s^3(s-2)}\right\} = \int_0^t \left(5e^{2\tau} - 10\tau - 5\right)d\tau$$

$$= \frac{5}{2}e^{2\tau} - 5\tau^2 - 5\tau\Big|_0^t$$

$$= \frac{5}{2}e^{2\tau} - 5\tau^2 - 5\tau - \frac{5}{2}$$

$$F(t) = 5\left(\frac{1}{2}e^{2\tau} - \tau^2 - \tau - \frac{1}{2}\right)$$

Como se puede comprobar, aplicando la transformada y reduciendo a común denominador, se observa que el teorema puede aplicarse sucesivamente.

EJERCICIOS 7.2

Usar el teorema de la transformada de la *derivada* de una función para encontrar $F(s)$, dada $f(t)$:

Respuestas:

1. $t\,\text{sen}\,3t$ — $\dfrac{6s}{\left(s^2+9\right)^2}$
2. $t\cosh t$ — $\dfrac{s^2+1}{\left(s^2-1\right)^2}$
3. $t\,\text{senh}\,2t$ — $\dfrac{4s}{\left(s^2-4\right)^2}$
4. $t^2\,\text{sen}\,t$ — $\dfrac{6s^2-2}{\left(s^2+1\right)^3}$
5. $t^2\cos 3t$ — $\dfrac{2s^3-54s}{\left(s^2+9\right)^3}$
6. $t^2\,\text{senh}\,t$ — $\dfrac{6s^2+2}{\left(s^2-1\right)^3}$
7. Sea $f(t) = \begin{cases} 3t & 0 \le t \le 1 \\ t & t > 1 \end{cases}$

   a. Hallar $£\{f(t)\}$

   b. Hallar $£\{f'(t)\}$

   c. ¿Se cumple $£\{f'\} = s£\{f\} - f(0)$ en este caso?

   Dar las razones.

   Respuestas: *a.* $\dfrac{3}{s^2} - e^{-s}\left(\dfrac{2}{s} + \dfrac{2}{s^2}\right)$ *b.* $\dfrac{3}{s} - \dfrac{2}{s}e^{-s}$

8. Sea $f(t)=\begin{cases} t^2 & 0\le t\le 1 \\ 0 & \text{resto}\end{cases}$

a. Hallar $£\{f(t)\}$

b. Hallar $£\{f''\}$

c. Justificar $£\{f''\}\neq s^2£\{f\}-sf(0)-f'(0)$

Respuestas: *a.* $e^{-s}\left(-\dfrac{1}{s}-\dfrac{2}{s^2}-\dfrac{2}{s^3}\right)+\dfrac{2}{s^3},$ *b.* $\dfrac{2}{s}$

Usar el teorema de la transformada de la *integral* de una función para encontrar $f(t)$, dada $F(s)$:

9. $£^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s-4)}\right\}$ $\qquad \dfrac{1}{4}\left(e^{4t}-1\right)$

10. $£^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s+3)}\right\}$ $\qquad \dfrac{1}{9}\left(e^{-3t}+3t-1\right)$

11. $£^{-1}\left\{\dfrac{1}{s\left(s^2+16\right)}\right\}$ $\qquad \dfrac{1}{16}\left(1-\cos 4t\right)$

12. $£^{-1}\left\{\dfrac{s-2}{s^2\left(s^2+4\right)}\right\}$ $\qquad \dfrac{1}{4}\left(\operatorname{sen}2t-\cos 2t+1\right)-\dfrac{t}{2}$

13. $£^{-1}\left\{\dfrac{2s-1}{s^2(s+1)}\right\}$ $\qquad 3-t-3e^{-t}$

14. $£^{-1}\left\{\dfrac{7}{s^3(s-1)}\right\}$ $\qquad 7\left(e^t-\dfrac{t^2}{2}-t-1\right)$

15. $£^{-1}\left\{\dfrac{3}{s^2\left(s^2-9\right)}\right\}$ $\qquad \dfrac{1}{9}\operatorname{senh}3t-\dfrac{1}{3}t$

16. $£^{-1}\left\{\dfrac{s+4}{s^2\left(s^2+16\right)}\right\}$ $\qquad \dfrac{1}{16}\left(1-\cos 4t-\operatorname{sen}4t\right)+\dfrac{t}{4}$

17. $£^{-1}\left\{\dfrac{s-a}{s^3(s+a)}\right\}$ $\qquad \dfrac{2}{a^2}e^{-at}-\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{2t}{a}-\dfrac{2}{a^2}$

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales, con valor inicial, usando la transformada de Laplace:

Respuestas:

18. $y'+y=0,\ y(0)=1$ $\qquad y=e^{-x}$

19. $y''+4y=2,\ y(0)=0$, $y'(0)=0$ $\qquad y=\dfrac{1}{2}\left(1-\cos 2x\right)$

20. $y'' - 9y = 0,\ y(0) = 1$ $\qquad y'(0) = 0$ $\qquad y = \cosh 3x$

21. $y' - 2y = x,\ y(0) = 0$ $\qquad y = \frac{1}{4}\left(e^{2x} - 1\right) - \frac{x}{2}$

22. $y'' + 16y = 4,\ y(0) = 1$ $\qquad y'(0) = 0$ $\qquad y = \frac{3}{4}\cos 4x + \frac{1}{4}$

En los siguientes ejercicios, elegir la opción correcta. Con el teorema de la transformada de la *derivada,* hallar $F(s)$:

23. $t^2 e^{2t}$

a. $\dfrac{2}{(s-2)^3}$

b. $\dfrac{2}{(s-2)^2}$

c. $\dfrac{1}{(s-2)^3}$

d. $\dfrac{1}{(s-2)^3}$

24. $t \operatorname{sen} 5t$

a. $\dfrac{10s}{(s^2+25)^2}$

b. $\dfrac{10s}{s^2+25}$

c. $\dfrac{s}{(s^2+25)^2}$

d. $\dfrac{s}{s^2+25}$

25. $t^2 \operatorname{sen}^2 t$

a. $\dfrac{2s^3 - 24s}{(s^2+4)^3}$

b. $\dfrac{4s}{(s^2+4)^2}$

c. $\dfrac{2}{s^3} - \dfrac{2s^3 - 24s}{(s^2+4)^3}$

d. $\dfrac{1}{s^3} - \dfrac{s^3 - 12s}{(s^2+4)^3}$

Usar el teorema de la transformada de la *integral*:

26. $£^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s-1)}\right\}$

a. $e^t - 1$

b. $e^t + 1 - t$

c. $e^t + 1$

d. $e^t - 1 - t$

27. $£^{-1}\left\{\dfrac{3}{s(s^2-1)}\right\}$

a. $3(\operatorname{senh} t - 1)$

b. $3\cosh t$

c. $3(\cosh t - 1)$

d. $3\operatorname{senh} t$

28. $\pounds^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{s^2\left(s^2+4\right)}\right\}$

a. $\dfrac{1}{4}\left(t-\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}2t\right)$

b. $\dfrac{1}{4}\left(1-\cos 2t+t\operatorname{sen}2t\right)$

c. $\dfrac{1}{4}(1-\cos 2t)+\dfrac{1}{4}t-\dfrac{1}{8}\operatorname{sen}2t$

d. $\dfrac{1}{4}\left(1-\cos 2t\right)$

Resolver mediante transformada de Laplace.

29. $y'-y=0,\ \ y(0)=\pi$

a. $\dfrac{\pi}{s-1}$

b. πe^{t}

c. $\dfrac{\pi}{s+1}$

d. πe^{-t}

30. $y''+25y=3,\ y(0)=1,\ \ y'(0)=5$

a. $\cos 5t+\operatorname{sen}5t$

b. $\dfrac{22}{25}\cos 5t+\operatorname{sen}5t+\dfrac{3}{25}$

c. $\dfrac{3}{25}\left(1-\cos 5t\right)$

d. $\cos 5t-\operatorname{sen}5t$

Respuestas:

23. *a*. La opción *b* contiene la transformada de $2te^{t}$. La opción *c* la de te^{2t}. La *d* contiene la de $\dfrac{1}{2}t^2e^{2t}$.

24. *a*. La opción *b* contiene la transformada de $10\cos 5t$. La opción *c* la de $\dfrac{1}{10}t\operatorname{sen}5t$. La opción *d* representa la de $\cos 5t$.

25. *d*. La opción *a* contiene la transformada de $t^2\cos 2t$ (paso intermedio de la correcta solución). La opción *b* contiene la de $t\operatorname{sen}2t$ (también es un paso intermedio). La opción *c* la de $t^2-t^2\cos 2t$ (¿será también un paso útil para llegar a la solución correcta?).

26. *d*. La opción *a* contiene la transformada inversa de $\dfrac{1}{s(s-1)}$. La opción *b* aplicó mal los límites de la integral. La opción *c* contiene los dos errores anteriores.

27. *c*. La opción *a* equivocó las fórmulas. La opción *b* contiene la transformada inversa de $\dfrac{3}{s^2-1}$. La opción *c* los dos errores anteriores.

28. *c*. La opción *a* contiene la transformada inversa de $\dfrac{1}{s^2(s^2+4)}$ solamente. La opción *b* tiene un coeficiente equivocado. La opción *d* contiene la de $\dfrac{1}{s(s^2+4)}$ (la *a* y *d* son pasos intermedios).

29. *b*. La opción *a* representa la $F(s)$ a la cual se le debe aplicar la transformada inversa. La opción *c* no aplicó correctamente el teorema de la derivada de la transformada y además está incompleta. La opción *d* contiene el error de la *c* aunque ya esté completa.

30. *b*. La opción *a* contiene una parte de la solución. La opción *c* representa la otra parte de la solución. La opción *d* supone que la ecuación es $y'' - 25y = 0$, para $y(0) = 1$ y $y'(0) = 5$.

Resolución de ecuaciones diferenciales mediante la transformada de Laplace usando fracciones parciales

Método de fracciones parciales para encontrar la transformada inversa.

En otros ejercicios pueden aparecer otros factores en el denominador. Estudiaremos:

1. Factores lineales no repetidos.
2. Factores complejos no repetidos.
3. Factores lineales repetidos.
4. Factores complejos repetidos.

Factores lineales no repetidos

Estudiaremos $\pounds^{-1}\left\{\dfrac{G(s)}{H(s)}\right\}$ donde $\dfrac{G(s)}{H(s)} = \dfrac{A}{s-a} + W(s)$, porque $H(s)$ contiene un factor $(s-a)$ que por ser lineal tendrá como numerador una constante. $W(s)$ representa las restantes fracciones parciales. Para determinar el valor de A, tenemos tres opciones:

a. Usando fracciones parciales (según se estudió en cálculo).

b. Usando límites:

Como $(s-a) \neq 0 \rightarrow (s-a)\dfrac{G(s)}{H(s)} = A + (s-a)W(s)$

Sea $Q(s) = (s-a)\dfrac{G(s)}{H(s)}$

$$\rightarrow Q(s) = A + (s-a)W(s)$$

Tomando el límite cuando $s \rightarrow a$, vemos que $H(s)$ no se hace cero porque contiene un factor $(s-a)$ que se puede cancelar con el que está multiplicando; por tanto, existe el límite.

$$\lim_{s\to a} Q(s) = \lim_{s\to a} A + \underbrace{\lim_{s\to a}(s-a)W(s)}_{cero}$$

$$\therefore Q(a) = A,$$

$$\text{y } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{H(s)}\right\} = Ae^{at} + \mathcal{L}^{-1}\{W(s)\}.$$

c. Usando derivadas (desarrollo de Heaviside).

Sea $Q(s) = (s-a)\dfrac{G(s)}{H(s)}$ que da A en el límite, como acabamos de ver,

$$\rightarrow Q(s) = \frac{\dfrac{G(s)}{H(s)}}{s-a}$$

$$\rightarrow A = \lim_{s\to a} Q(s) = \lim_{s\to a} \frac{G(s)}{\dfrac{H(s)}{s-a}}$$

$$A = \frac{\lim\limits_{s\to a} G(s)}{\lim\limits_{s\to a} \dfrac{H(s)}{s-a}}$$

El límite cuando $s \rightarrow a$ produce una forma indeterminada que puede destruirse mediante la regla de L'Hôpital:

$$A = \frac{G(a)}{\lim\limits_{s\to a} \dfrac{H'(s)}{1}} = \frac{G(a)}{H'(a)}.$$

EJEMPLO 1

Resolver la siguiente ecuación diferencial por medio de la transformada de Laplace.

$$y'' - 2y' - 3y = 4 \text{ para } y(0) = 1, \;\; y'(0) = -1$$

$$\pounds\{y''-2y'-3y\}=\pounds\{4\}$$

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-2sY(s)+2y(0)-3Y(s)=\frac{4}{s}$$

$$Y(s)=\frac{\frac{4}{s}+sy(0)+y'(0)-2y(0)}{s^2-2s-3}$$

$$=\frac{4+s^2-s-2s}{s\left(s^2-2s-3\right)}=\frac{s^2-3s+4}{s\left(s+1\right)\left(s-3\right)}$$

La solución de la ecuación por el método de las derivadas será:

$$y=\pounds^{-1}\left\{\frac{s^2-3s+4}{s(s+1)(s-3)}\right\}=Ae^{0t}+Be^{-t}+Ce^{3t}$$

$$\rightarrow A=\frac{G(0)}{H'(0)},\ B=\frac{G(-1)}{H'(-1)},\ C=\frac{G(3)}{H'(3)}.$$

Además,

$$G(s)=s^2-3s+4$$

$$H(s)=s^3-2s^2-3s$$

$$H'(s)=3s^2-4s-3$$

$$A=\frac{4}{-3},\ \ B=\frac{8}{4}=2,\ \ C=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore\ y=-\frac{4}{3}+2e^{-t}+\frac{1}{3}e^{3t}.$$

Comprobando por el método de fracciones parciales.

$$\frac{s^2-3s+4}{s\left(s+1\right)\left(s-3\right)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{s-3}$$

$$s^2-3s+4=As^2-2As-3A+Bs^2-3Bs+Cs^2+Cs$$

$$\left.\begin{array}{l}A+B+C=1\\ -2A-3B+C=-3\\ -3A=4\end{array}\right\}\begin{array}{l}A=-\frac{4}{3}\\ B=2\\ C=\frac{1}{3}.\end{array}$$

Comprobación por el método de límites.

$$A=\left.\frac{s^2-3s+4}{(s+1)(s-3)}\right|_{s=0}=\frac{4}{-3}$$

$$B = \left. \frac{s^2 - 3s + 4}{s(s-3)} \right|_{s=-1} = \frac{8}{4} = 2$$

$$C = \left. \frac{s^2 - 3s + 4}{s(s+1)} \right|_{s=3} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

EJEMPLO 2

Resolver $y'' - 2y' - 3y = e^t$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$.

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 2sY(s) + 2y(0) - 3Y(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$Y(s) = \frac{2s^2 - 2s + 1}{(s-1)(s-3)(s+1)}$$

$$£^{-1}\left\{ \frac{2s^2 - 2s + 1}{s^3 - 3s^2 - s + 3} \right\} = Ae^t + Be^{3t} + Ce^{-t}$$

$$G(s) = 2s^2 - 2s + 1$$

$$H'(s) = 3s^2 - 6s - 1$$

$$A = \frac{G(1)}{H'(1)} = -\frac{1}{4}$$

$$B = \frac{G(3)}{H'(3)} = \frac{13}{8}$$

$$C = \frac{G(-1)}{H'(-1)} = \frac{5}{8}$$

$$\therefore y = -\frac{1}{4}e^t + \frac{13}{8}e^{3t} + \frac{5}{8}e^{-t}.$$

Factores complejos no repetidos

Teníamos que $£^{-1}\left\{ \frac{G(s)}{H(s)} \right\} = Ae^{at} + £^{-1}\{W(s)\}$

Cuando a es complejo, entonces,

$$a = \alpha + i\beta \text{ y } \bar{a} = \alpha - i\beta$$

Si $s - a$ es factor de $H(s)$ también lo es $s - \bar{a}$.

$$\therefore \frac{G(s)}{H(s)} = \frac{A}{s-a} + \frac{B}{s-\bar{a}} + W(s)$$

Donde los coeficientes de G y H son reales,

$$\text{y} \quad y = £^{-1}\left\{\frac{G(s)}{H(s)}\right\} = Ae^{at} + Be^{\bar{a}t} + £^{-1}\{W(s)\}$$

Como $e^{at} = e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}e^{i\beta t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\operatorname{sen}\beta t)$

$$\text{y} \quad e^{\bar{a}t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\operatorname{sen}\beta t)$$

$$\rightarrow y = Ae^{\alpha t}(\cos\beta t + i\operatorname{sen}\beta t) + Be^{\alpha t}(\cos\beta t - i\operatorname{sen}\beta t) + £^{-1}\{W(s)\}$$

$$= e^{\alpha t}\left[(A+B)\cos\beta t + i(A-B)\operatorname{sen}\beta t\right] + £^{-1}\{W(s)\}.$$

Por el análisis del caso anterior teníamos:

$$A = Q(a) = Q(\alpha + i\beta) = Q_1 + iQ_2, \quad Q_1, Q_2 \in \Re$$

$$\text{y} \quad B = Q(\bar{a}) = Q(\alpha - i\beta) = Q_1 - iQ_2, \quad Q_1, Q_2 \in \Re$$

Sumando y restando las dos ecuaciones:

$$A + B = 2Q_1$$

$$A - B = 2iQ_2 \rightarrow i(A-B) = -2Q_2$$

Sustituyendo estas nuevas constantes:

$$y = e^{\alpha t}(2Q_1\cos\beta t - 2Q_2\operatorname{sen}\beta t)$$

$$\therefore £^{-1}\left\{\frac{A}{s-a} + \frac{B}{s-\bar{a}} + W(s)\right\} =$$

$$2e^{\alpha t}(Q_1\cos\beta t - Q_2\operatorname{sen}\beta t) + £^{-1}\{W(s)\}.$$

EJEMPLO 1

Resolver: $y'' - 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 2sY(s) + 2y(0) + 2Y(s) = 0$$

$$Y(s) = \frac{sy(0) + y'(0) - 2y(0)}{s^2 - 2s + 2} = \frac{1}{(s-1-i)(s-1+i)}$$

Tomamos: $Q(s) = \dfrac{1}{s-1+i}$, entonces,

$$Q(1+i)=\frac{1}{1+i-1+i}=\frac{1}{2i}\cdot\frac{i}{i}=-\frac{i}{2}\rightarrow Q_1=0,\ Q_2=-\frac{1}{2},$$

Como $s=\dfrac{2\pm\sqrt{4-8}}{2}=\dfrac{2\pm 2i}{2}=1\pm i\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=1\end{cases}$

$$y=2e^t\left(0-\left(-\tfrac{1}{2}\right)\operatorname{sen} t\right)$$

$$\therefore\ y=e^t\operatorname{sen} t.$$

EJEMPLO 2

Resolver: $y''+4y'+5y=1,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=0.$

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+4sY(s)-4y(0)+5Y(s)=\frac{1}{s}$$

$$Y(s)=\frac{\frac{1}{s}}{s^2+4s+5}=\frac{1}{s\left(s^2+4s+5\right)}=\frac{1}{s\left(s+2-i\right)\left(s+2+i\right)}$$

para $s=-2\pm i,\quad \alpha=-2,\quad \beta=1$

y $Q(s)=\dfrac{1}{s\left(s+2+i\right)}\rightarrow Q(-2+i)=\dfrac{1}{\left(-2+i\right)\left(-2+i+2+i\right)}$

$$=-\frac{1}{10}+\frac{1}{5}i$$

para $s=0$

$$Q(s)=\frac{1}{\left(2-i\right)\left(2+i\right)}\rightarrow Q(0)=\frac{1}{4-i^2}=\frac{1}{5}$$

$$\therefore\ y=\frac{1}{5}+2e^{-2t}\left(-\frac{1}{10}\cos t+\frac{1}{5}\operatorname{sen} t\right).$$

EJEMPLO 3

Resolver: $y''+2y'+2y=2\cos 2t-\operatorname{sen}2t$

para $y(0)=0,\quad y'(0)=0$

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+2sY(s)-2y(0)+2Y(s)=\frac{2s}{s^2+4}-\frac{2}{s^2+4}$$

$$Y(s)=\frac{\frac{2s-2}{s^2+4}}{s^2+2s+2}=\frac{2s-2}{\left(s^2+4\right)\left(s^2+2s+2\right)}$$

$$=\frac{2s-2}{\left(s-2i\right)\left(s+2i\right)\left(s+1-i\right)\left(s+1+i\right)}$$

ambos factores tienen raíces complejas.

Para $s^2+4,\ \ s=\pm 2i,\ \ \alpha=0,\ \ \beta=2,$

Para $s^2+2s+2,\ s=-1\pm i,\ \alpha=-1,\ \beta=1,$ tomaremos una $Q(s)$ para cada raíz.

Para $s=2i$:

$$Q(s)=\frac{2s-2}{(s+2i)(s+1-i)(s+1+i)}$$

$$Q(2i)=\frac{2(2i)-2}{4i(i+1)(3i+1)}=\frac{4i-2}{(-2+4i)4i}=\frac{4i-2}{-16-8i}$$

$$=\frac{2i-1}{-8-4i}\cdot\frac{-8+4i}{-8+4i}$$

$$=\frac{-20i}{80}=-\frac{1}{4}i\rightarrow Q_1=0,\ Q_2=-\frac{1}{4},$$

para $s=-1+i$

$$Q(s)=\frac{2s-2}{(s+2i)(s-2i)(s+1+i)}$$

$$Q(-1+i)=\frac{2(-1+i)-2}{(-1+3i)(-1-i)(2i)}=\frac{-4+2i}{(4-2i)2i}=\frac{-4+2i}{4+8i}$$

$$=\frac{-2+i}{2+4i}\frac{2-4i}{2-4i}=\frac{10i}{20}=\frac{1}{2}i\rightarrow Q_1=0,\ Q_2=\frac{1}{2}$$

$$y=2e^{ot}\left(0\cos 2t+\frac{1}{4}\operatorname{sen}2t\right)+2e^{-t}\left(0\cos t-\frac{1}{2}\operatorname{sen}t\right)$$

$$\therefore\ y=\frac{1}{2}\operatorname{sen}2t-e^{-t}\operatorname{sen}t.$$

Factores lineales repetidos

Si $H(s)=(s-a)^m$, entonces, según la teoría de fracciones parciales tenemos:

$$\frac{G(s)}{H(s)}=\frac{A_m}{(s-a)^m}+\frac{A_{m-1}}{(s-a)^{m-1}}+\ldots+\frac{A_2}{(s-a)^2}+\frac{A_1}{s-a}+W(s)$$

Pero $£^{-1}\left\{\dfrac{A_m}{(s-a)^m}\right\}=A_m e^{at}\,\dfrac{t^{m-1}}{(m-1)!}$ por definición de transformada de Laplace.

$$\rightarrow £^{-1}\left\{\frac{G(s)}{H(s)}\right\}=e^{at}\left(A_m\,\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}+A_{m-1}\,\frac{t^{m-2}}{(m-2)!}+\ldots+\frac{A_2 t}{1!}+A_1\right)+£^{-1}\{W(s)\}.$$

Sea $Q(s) = \dfrac{G(s)}{H(s)}\left(s-a\right)^m$

$$\to Q(s) = A_m + A_{m-1}(s-a) + A_{m-2}(s-a)^2 + \ldots$$

$$+A_2(s-a)^{m-2} + A_1(s-a)^{m-1} + W(s)(s-a)^m \qquad (1)$$

Tomando el límite cuando $s \to a$, todos los sumandos, menos el primero, se anulan y $Q(a) = A_m$.

Derivando los dos miembros de (1) con respecto a s encontraremos A_{m-1} y con sucesivas derivaciones, obtendremos el resto de las constantes.

$$Q'(s) = A_{m-1} + 2A_{m-2}(s-a) + 3A_{m-3}(s-a)^2 + \ldots$$

$$+(m-1)A_1(s-a)^{m-2} + mW(s)(s-a)^{m-1}$$

Tomando el límite cuando $s \to a$:

$$\lim_{s\to a} Q'(s) = A_{m-1} \to Q'(a) = A_{m-1}$$

$$Q''(s) = 2A_{m-2} + 6A_{m-3}(s-a) + \ldots$$

$$Q''(a) = 2A_{m-2} \to A_{m-2} = \frac{Q''(a)}{2}$$

$$Q'''(s) = 6A_{m-3} + \ldots$$

$$Q'''(a) = 6A_{m-3} \to A_{m-3} = \frac{Q'''(a)}{6}, \text{ etcétera.}$$

y en general

$$A_{m-k} = \frac{Q^{(k)}(a)}{k!}, k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ m-1.$$

EJEMPLO 1

Resolver $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0$

Para: $y(0) = 4,\ y'(0) = -12,\ y''(0) = 34.$

$$s^3Y(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0) + 6s^2Y(s) - 6sy(0) - 6y'(0)$$

$$+12sY(s) - 12y(0) + 8Y(s) = 0$$

$$Y(s) = \frac{4s^2 + 12s + 10}{s^3 + 6s^2 + 12s + 8} = \frac{4s^2 + 12s + 10}{\left(s+2\right)^3}$$

Aquí: $a = -2$

$$\to y = e^{-2t}\left(A_3\frac{t^2}{2} + A_2t + A_1\right)$$

Como siempre tomamos como $Q(s)$ la parte de $Y(s)$ donde no está el factor raíz del denominador; aquí, $Q(s)$ es:

$$Q(s) = 4s^2 + 12s + 10$$

$$Q'(s) = 8s + 12$$

$$Q''(s) = 8$$

$$\text{y } A_3 = Q(-2) = 16 - 24 + 10 = 2$$

$$A_2 = Q'(-2) = -16 + 12 = -4$$

$$A_1 = \frac{Q''(-2)}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$y(t) = e^{-2t}\left(2\frac{t^2}{2} - 4t + 4\right)$$

$$\therefore\ y(t) = e^{-2t}\left(t-2\right)^2.$$

EJEMPLO 2

Resolver $y'' + y = t$ para $y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0.$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{s^2} + 0 + 0}{s^2 + 1} = \frac{1}{s^2\left(s^2+1\right)}$$

tenemos un factor real repetido $s = 0$ y un factor complejo $s^2 + 1.$

Para el factor $s = 0 \rightarrow Q(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$

como sólo está repetido dos veces, solamente se necesita la primera derivada

$$Q'(s) = \frac{-2s}{\left(s^2+1\right)^2}$$

y la forma de la solución es:

$$y = e^{0t}\left(A_2t + A_1\right)$$

donde $A_2 = Q(0) = 1$ y $A_1 = Q'(0) = 0.$

Para el factor $s = i$ $\left[\text{porque } s^2 + 1 = (s-i)(s+i)\right]$

$$Q(s) = \frac{1}{s^2\left(s^2+1\right)} \rightarrow Q(i) = \frac{i}{2} \rightarrow Q_1 = 0,\ Q_2 = \frac{1}{2},$$

y la forma de la solución es

$$y = 2e^{ot}\left(0\cos t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\right).$$

Entonces,

$$y = e^{0t}\left(A_2 t + A_1\right) + 2e^{0t}\left(-\frac{1}{2}\operatorname{sen} t\right)$$

$$\therefore\ y = t - \operatorname{sen} t.$$

EJEMPLO 3

Resolver $y'' - 6y' + 9y = 0 \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - 6sY(s) + 6y(0) + 9Y(s) = 0$$

$$Y(s) = \frac{s-4}{\left(s-3\right)^2}, \quad a = 3$$

$$\rightarrow y = e^{3t}\left(A_2 t + A_1\right)$$

$$Q(s) = s - 4 \rightarrow A_2 = Q(3) = -1$$

$$Q'(s) = 1 \qquad A_1 = 1$$

$$\therefore\ y = e^{3t}\left(-t+1\right).$$

Factores complejos repetidos

Sea: $$\frac{G(s)}{H(s)} = \frac{A_m}{\left(s-a\right)^m} + \frac{A_{m-1}}{\left(s-a\right)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_2}{\left(s-a\right)^2} + \frac{A_1}{s-a} +$$

$$+\frac{B_m}{(s-\bar{a})^m} + \frac{B_{m-1}}{(s-\bar{a})^{m-1}} + \ldots + \frac{B_2}{(s-\bar{a})^2} + \frac{B_1}{s-\bar{a}} + W(s)$$

$$\rightarrow \pounds^{-1}\left\{\frac{G(s)}{H(s)}\right\} = e^{at}\left(A_m \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} + A_{m-1}\frac{t^{m-2}}{(m-2)!} + \ldots + A_2 t + A_1\right)$$

$$+e^{\bar{a}t}\left(B_m \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} + B_{m-1}\frac{t^{m-2}}{(m-2)!} + \ldots + B_2 t + B_1\right) + \pounds^{-1}\left\{W(s)\right\}$$

Esto puede expresarse en forma condensada:

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{A_k}{(s-a)^k} + \frac{B_k}{(s-\bar{a})^k}\right\} = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\left(A_k e^{at} + B_k e^{\bar{a}t}\right)$$

$$=\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\left[A_k e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\,\mathrm{sen}\,\beta t)+B_k e^{\alpha t}(\cos\beta t-i\,\mathrm{sen}\,\beta t)\right]$$

$$=\frac{e^{\alpha t}t^{k-1}}{(k-1)!}\left[(A_k+B_k)\cos\beta t+i(A_k-B_k)\mathrm{sen}\,\beta t\right]$$

Para $k = 1, 2, 3, \ldots, m$

Como $A_k = Q_{k1}+iQ_{k2}$ y $B_k = Q_{k1}-iQ_{k2}$

para $Q_{k1}, Q_{k2} \in \Re$

Sumando y restando, tenemos:

$$A_k + B_k = 2Q_{k1}$$

$$A_k - B_k = 2iQ_{k2} \text{ y } i(A_k - B_k) = -2Q_{k2}$$

$$\rightarrow y(t)=\frac{2e^{\alpha t}t^{k-1}}{(k-1)!}(Q_{k1}\cos\beta t-Q_{k2}\mathrm{sen}\,\beta\, t).$$

Caso particular: $m = 2$ y $W(s) = 0$

$$\rightarrow y(t)=\underbrace{\frac{2e^{\alpha t}t^{0}}{0!}(Q_{11}\cos\beta t-Q_{12}\,\mathrm{sen}\,\beta\, t)}_{k=1}$$

$$+\underbrace{\frac{2e^{\alpha t}t^{1}}{1!}(Q_{21}\cos\beta t-Q_{22}\mathrm{sen}\,\beta t)}_{k=2}$$

$$\therefore\ y(t)=2e^{\alpha t}\left[(Q_{11}+tQ_{21})\cos\beta t-(Q_{12}+tQ_{22})\mathrm{sen}\,\beta\, t\right].$$

EJEMPLO 1

Resolver $y''+y=2\cos t$ para $y(0)=2,\ \ y'(0)=0.$

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+Y(s)=\frac{2s}{s^2+1}$$

$$Y(s)=\frac{\frac{2s}{s^2+1}+2s}{s^2+1}=\frac{2s^3+4s}{\left(s^2+1\right)^2}$$

$$\rightarrow s^2+1=(s+i)(s-i)\rightarrow s=\pm i,\ \text{donde}\ \ \alpha=0,\ \ \beta=1,$$

$$\rightarrow y(t)=2e^{0t}\left[(Q_{11}+tQ_{21})\cos t-(Q_{12}+tQ_{22})\mathrm{sen}\, t\right].$$

Para $s=i$:

$$Q(s)=\frac{2s^3+4s}{\left(s+i\right)^2}$$

$$Q(i) = \frac{2i^3 + 4i}{(2i)^2} = \frac{2i}{-4} = -\frac{1}{2}i$$

Como $A_2 = Q_{21} + iQ_{22} \to Q_{21} = 0,\ Q_{22} = -\frac{1}{2}.$

Para encontrar A_1 tomamos la primera derivada:

$$Q'(s) = \frac{2s^3 - 4s + 6s^2 i + 4i}{(s+i)^3}$$

$$Q'(i) = \frac{2i^3 - 4i + 6i^3 + 4i}{(2i)^3} = 1$$

$$A_1 = Q_{11} + iQ_{12} \to Q_{11} = 1,\ Q_{12} = 0,$$

$$y(t) = 2\left[(1+0)\cos t - \left(0 - \frac{1}{2}t\right)\operatorname{sen} t\right]$$

$$\therefore\ y(t) = 2\cos t + t\operatorname{sen} t.$$

EJEMPLO 2

Resolver: $y'' + y = 2(\cos t + \operatorname{sen} t),\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = -1.$

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = 2\frac{s}{s^2+1} + s\frac{1}{s^2+1}$$

$$Y(s) = \frac{\dfrac{2s+2}{s^2+1} - 1}{s^2+1} = \frac{2s + 2 - s^2 - 1}{(s^2+1)^2} = \frac{2s - s^2 + 1}{(s^2+1)^2}$$

donde $s = \pm i,\quad \alpha = 0,\quad \beta = 1$

$$\to y(t) = 2e^{0t}\left[(Q_{11} + tQ_{21})\cos t - (Q_{12} + tQ_{22})\operatorname{sen} t\right]$$

$$Q(s) = \frac{2s - s^2 + 1}{(s+i)^2}$$

$$Q(i) = \frac{2i - i^2 + 1}{(2i)^2} = \frac{2i + 2}{-4} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$A_2 = Q_{21} + iQ_{22} \to Q_{21} = -\frac{1}{2},\ Q_{22} = -\frac{1}{2}.$$

$$Q'(s) = \frac{2i - 2si - 2s - 2}{(s+i)^3}$$

$$Q'(i) = \frac{2i - 2i^2 - 2i - 2}{(2i)^3} = 0$$

$$A_1 = Q_{11} + iQ_{12}, \ \ Q_{11} = 0, \ Q_{12} = 0.$$

$$y = 2e^{0t}\left[\left(0 - \frac{1}{2}t\right)\cos t - \left(0 - \frac{1}{2}t\right)\operatorname{sen} t\right]$$

$$y = 2\left(-\frac{t}{2}\cos t + \frac{t}{2}\operatorname{sen} t\right)$$

$$\therefore \ y = t(\operatorname{sen} t - \cos t).$$

Derivación de transformadas

Teorema 6

Si $£\{f(t)\} = F(s)$

$$\rightarrow £\{tf(t)\} = -F'(s)$$

Demostración:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

Diferenciando respecto a s:

$$\frac{dF}{ds} = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty \frac{\delta}{\delta s} e^{-st} f(t)dt$$

$$= \int_0^\infty -te^{-st} f(t)dt$$

$$= -\int_0^\infty e^{-st} tf(t)dt$$

$$= -£\{tf(t)\}$$

Generalizando:

$$£\{(-t)^n f(t)\} = F^{(n)}(s)$$

Así, para $n = 2$:

$$\rightarrow £\{t^2 f(t)\} = F''(s)$$

Para $n = 3$:

$$\rightarrow £\{t^3 f(t)\} = F'''(s), \ \text{etcétera.}$$

EJEMPLO 1

Encontrar $\pounds\{t\cos\omega t\}$ usando este teorema:

$$\pounds\{t\cos\omega t\} = -\frac{d}{ds}\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$= -\frac{s^2+\omega^2-2s^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2} = \frac{s^2-\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}.$$

EJEMPLO 2

Hallar $\pounds\left\{t^2 \operatorname{senh} at\right\}$.

Por el teorema de la *derivada* de la transformada:

$$\pounds\left\{t^2 \operatorname{senh} at\right\} = F''(s)$$

Como $F(s) = \dfrac{a}{s^2-a^2}$, entonces,

$$F'(s) = \frac{-2as}{\left(s^2-a^2\right)^2}, \quad F''(s) = \frac{-2as^2+2a^3+8as^2}{\left(s^2-a^2\right)^3}$$

$$\therefore \pounds\left\{t^2 \operatorname{senh} at\right\} = \frac{6as^2+2a^3}{\left(s^2-a^2\right)^3}$$

Integración de las transformadas

Teorema 7

Sea $f(t)$ una función que satisface las condiciones del *teorema de existencia* y $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f(t)}{t}$ existe, y además $\pounds\left\{f(t)\right\} = F(s)$, entonces,

$$\pounds\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(\sigma)d\sigma$$

Demostración:

Sea $G(t) = \dfrac{f(t)}{t} \to f(t) = tG(t)$.

Tomando la transformada a ambos lados y aplicando el *teorema de la derivada* en el segundo miembro:

$$\pounds\left\{f(t)\right\} = -\frac{d}{ds}\pounds\left\{G(t)\right\}$$

Entonces, $F(s)=-\dfrac{dG}{ds}$, integrando:

$$g(s)=-\int_{\infty}^{s} f(\sigma)d\sigma=\int_{s}^{\infty} f(\sigma)d\sigma$$

$$\therefore \pounds\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\int_{s}^{\infty} f(\sigma)d\sigma$$

EJEMPLO 1

Dada $F(s)=\dfrac{2}{(s-a)^3}$ encontrar $f(t)$ usando *integración* de la transformada:

$$\int_{s}^{\infty}\frac{2}{(\sigma-a)^3}d\sigma=-\frac{1}{(\sigma-a)^2}\Bigg|_{s}^{\infty}=\frac{1}{(s-a)}$$

y como $f(t)=t\pounds^{-1}\left\{\int_{s}^{\infty}F(\sigma)d\sigma\right\}$, entonces,

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^2}\right\}\to y(t)=e^{at}\left(B_2t+B_1\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} Q(s)=1\to Q(a)=1 \quad B_2=1 \\ Q'(s)=0\to Q'(a)=0 \quad B_1=0 \end{array}\right\} y(t)=te^{at}$$

$$f(t)=t\left(te^{at}\right)$$

$$\therefore f(t)=t^2e^{at}.$$

EJEMPLO 2

Hallar: $\pounds\left\{\dfrac{\text{sen}3t}{t}\right\}$. Como $\pounds\{\text{sen}\,3t\}=\dfrac{3}{s^2+9}$

$$\pounds\left\{\frac{\text{sen}\,3t}{t}\right\}=\int_{s}^{\infty}\frac{3}{\sigma^2+9}d\sigma=\tan^{-1}\frac{\sigma}{3}\Bigg|_{s}^{\infty}=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{s}{3}.$$

EJEMPLO 3

Hallar $f(t)$ dada $F(s)=\ln\dfrac{s+a}{s+b}$, usando los teoremas convenientes.

$$\ln\frac{s+a}{s+b}=\ln(s+a)-\ln(s+b);\quad -\frac{d}{ds}[\ln(s+a)-\ln(s+b)]=$$

$$=-\frac{1}{s+a}+\frac{1}{s+b}.\ \text{Y}\ \pounds^{-1}\left\{\ln\frac{s+a}{s+b}\right\}=\frac{1}{t}\left(e^{-bt}-a^{-at}\right).$$

EJERCICIOS 7.3

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales usando transformada de Laplace.

Factores lineales:	***Respuestas:***
1. $y'' + 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$	$y = -2e^{-2t} + 3e^{-t}$
2. $y'' - 4y = 0$, $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$	$y = \frac{1}{2}(\cosh 2t - 1)$
3. $y'' - \frac{5}{2}y' + y = 0$, $y(0) = 1, \quad y'(0) = \frac{1}{2}$	$y = e^{(1/2)t}$
4. $y'' - 2y' - 3y = 0$, $y(0) = 3, \quad y'(0) = 2$	$y = \frac{5}{4}e^{3t} + \frac{7}{4}e^{-t}$
5. $y'' - 8y' - 9y = 0$, $y(0) = 0, \quad y'(0) = 4$	$y = \frac{3}{5}e^{-t} + \frac{23}{45}e^{9t} - \frac{10}{9}$
6. $y'' - 6y' + 8y = 2e^{3}$, $y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$	$y = 2e^{4t} - 2e^{3t}$
7. $y''' - 3y'' - y' + 3y = 3$, $y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = 2$	$y = \frac{3}{8}e^{3t} - \frac{5}{4}e^{t} - \frac{1}{8}e^{-t} + 1$
8. $y''' - y'' - 4y' + 4y = e^{-t}$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$	$y = \frac{1}{6}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{t} - \frac{1}{12}e^{-2t} + \frac{1}{12}e^{2t}$
9. $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$, $y(0) = 2, \quad y'(0) = y''(0) = 1$	$y = 2e^{t} - \frac{1}{5}e^{3t} + \frac{1}{5}e^{-2t}$
10. $y''' - 9y'' + 26y' - 24y = 1$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$	$y = \frac{13}{4}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{t} - \frac{1}{12}e^{-2t} + \frac{1}{12}e^{2t}$

Factores lineales repetidos:	***Respuestas:***
11. $y'' + y' - 2y = 1 - 2t$, $y(0) = 0, \quad y'(0) = 4$	$y = e^{t} - e^{-2t} + t$
12. $y'' + y' - 2y = te^{t}$, $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$	$y = e^{t}\left(\frac{1}{6}t^2 - \frac{1}{9}t + \frac{1}{27}\right) - \frac{1}{27}e^{-2t}$
13. $y'' - 2y' + y = te^{t}$, $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$	$y = \frac{1}{6}t^3e^{t}$
14. $y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-}$, $y(0) = 0, \quad y'(0) = y''(0) = 1$	$y = e^{-t}\left(\frac{1}{6}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + t\right)$

15. $y'' - 4y = \operatorname{senh} 2t$ $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$	$y = \frac{3}{8}\operatorname{senh} 2t + \frac{1}{4}t\cosh 2t$
16. $y'' + 2y' + y = t + 3$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$	$y = t + 1 - te^{-t}$
17. $y'' - 4y' + 4y = te^{2t}$ $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$	$y = e^{2t}\left(\frac{t^3}{6} + t\right)$
18. $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = e^{-t}$ $y(0) = y'(0) = 0, \; y''(0) = 4$	$y = e^{-t}\left(\frac{t}{2} + \frac{5}{4}\right) - 3e^{-2t} + \frac{7}{4}e^{-3t}$
19. $y''' = 1, \; y(0) = 2$ $y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$	$y = \frac{t^4}{24} + 2$
20. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = -6e^{-t}$ $y(0) = y'(0) = 0, \; y''(0) = 4$	$y = e^t(3t^2 + 6t + 6) - 6e^{2t}$

Factores complejos no repetidos. Verificarlos por dos métodos: *a*. Complejos, *b*. Por las fórmulas básicas.

	Respuestas:
21. $y'' + 4y' + 5y = 0$ $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$	$y = e^{-2t}\operatorname{sen} t$
22. $y'' - 4y' + 13y = 0$ $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$	$y = e^{-2t}\left(\cos 3t - \frac{2}{3}\operatorname{sen} 3t\right)$
23. $y'' - 6y' + 13y = 2$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$	$y = \frac{2}{13} + e^{3t}\left(\frac{11}{13}\cos 2t - \frac{10}{13}\operatorname{sen} 2t\right)$
24. $y'' - 8y' + 17y = e^t$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$	$y = \frac{2}{13}e^t + e^{4t}\left(\frac{9}{10}\cos t - \frac{17}{10}\operatorname{sen} t\right)$
25. $y'' + 4y' + 5y = t$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = -3$	$y = e^{-2t}\left(\frac{29}{25}\cos t - \frac{22}{25}\operatorname{sen} t\right) + \frac{t}{5} - \frac{4}{25}$
26. $y^{\mathrm{IV}} + 29y'' + 100y = 0$ $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$ $y'''(0) = 4$	$y = \frac{2}{21}\operatorname{sen} t - \frac{4}{105}\operatorname{sen} 5t$
27. $y^{\mathrm{IV}} - 2y'' + 10y'' - 18y' + 9y = 0$ $y(0) = y'(0) = 0$ $y''(0) = 1, \; y'''(0) = 4$	$y = te^t + \frac{2}{25}e^t - \frac{2}{25}\cos 3t - \frac{3}{50}\operatorname{sen} 3t$
28. $y^{\mathrm{IV}} - y = 0 \quad y(0) = 2$ $y'(0) = -1, \quad y''(0) = 4$ $y'''(0) = -2$	$y = \frac{9}{4}e^{-t} + \frac{3}{4}e^t - \cos t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t$

29. $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$ $\qquad y = e^{2t} + 4\cos t$

$y(0) = 5,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 0$

Factores complejos repetidos: ***Respuestas:***

30. $y^{\text{IV}} - 2y'' + y = 0$

$y(0) = y'(0) = 0$ $\qquad y = t\cos t - \operatorname{sen} t + t\operatorname{sen} 3t$

$y''(0) = 2,\ y'''(0) = -2$

31. $y^{\text{IV}} + 8y'' + 16y = 0$

$y(0) = 1$ $\qquad y = \cos 2t + t\operatorname{sen} 2t$

$y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$

32. $y'' + y = \operatorname{sen} t$ $\qquad y = 2\cos t - \frac{1}{2}t\cos t + \frac{3}{2}\operatorname{sen} t$

$y(0) = 2,\quad y'(0) = 1$

33. $y'' + 9y = \cos 3t$ $\qquad y = \frac{1}{6}t\operatorname{sen} 3t$

$y(0) = y'(0) = 0$

34. $y'' + 25y = 2\operatorname{sen} 5t$ $\qquad y = \cos 5t - \frac{1}{5}t\cos t + \frac{1}{25}\operatorname{sen} 5t$

$y(0) = 1,\quad y'(0) = 0$

35. $y^{\text{IV}} + 8y'' + 16y = 0$ $\qquad y = \frac{3}{8}\operatorname{sen} t - \frac{3}{8}t\cos t - \frac{1}{8}t^2\operatorname{sen} t$

$y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$

En los siguientes ejercicios, usar el teorema de la *derivada* de la transformada para encontrar $F(s)$.

Respuestas:

36. $\pounds\{t\operatorname{senh} 3t\}$ $\qquad \dfrac{6s}{\left(s^2-9\right)^2}$

37. $\pounds\{t^3 e^{at}\}$ $\qquad \dfrac{6}{\left(s-a\right)^4}$

38. $\pounds\{t^2 \cos\omega\, t\}$ $\qquad \dfrac{2s^3 - 6s\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^3}$

39. $\pounds\{t^2 \cosh 2\, t\}$ $\qquad \dfrac{2s^3 - 24s}{\left(s^2+4\right)^3}$

40. $\pounds\{t^5 e^{-t}\}$ $\qquad \dfrac{120}{\left(s+1\right)^6}$

41. $\pounds\{t^2 \cosh 5\, t\}$ $\qquad \dfrac{2s^3 + 150s}{\left(s^2-25\right)^3}$

42. $\pounds\{t\,\text{sen}\,t + t\cos t\}$ $\qquad$ $\dfrac{s^2+2s-1}{\left(s^2+1\right)^2}$

43. $\pounds\{t^3\cos 2\,t\}$ $\qquad$ $\dfrac{6s^4-144s^2+96}{\left(s^2+4\right)^4}$

44. $\pounds\{te^t\,\text{sen}\,\omega t\}$ $\qquad$ $\dfrac{2\omega(s-1)}{\left[(s-1)^2+\omega^2\right]^2}$

45. $\pounds\{te^{-t}\cosh t\}$ $\qquad$ $\dfrac{s^2+2s+2}{\left(s^2+2s\right)^2}$

Usando el teorema de la *integral* de la transformada, hallar $F(s)$.

Respuestas:

46. $\pounds\left\{\dfrac{\text{senh}\,t}{t}\right\}$ $\qquad$ $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{s+1}{s-1}$

47. $\pounds\left\{\dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\right\}$ $\qquad$ $\ln\dfrac{s+b}{s+a}$

48. $\pounds\left\{\dfrac{\cos at-\cos bt}{t}\right\}$ $\qquad$ $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{s^2+b^2}{s^2+a^2}$

49. Demostrar:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-3t}-e^{-6t}}{t}dt = \ln 2$$

50. Hallar:

$$\int_0^\infty \frac{\cos 6t-\cos 4t}{t}dt \qquad \ln\frac{2}{3}$$

51. Probar:

$$\int_0^\infty \frac{\text{sen}\,t}{t}dt = \frac{\pi}{2}$$

52. $\pounds\left\{\dfrac{\text{sen}\,4t}{t}\right\}$ $\qquad$ $\dfrac{\pi}{2}-\tan^{-1}\dfrac{s}{4}$

En los siguientes ejercicios, elegir la opción correcta.

53. $y''-6y'+8y=1, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=7$

a. $\dfrac{3}{2}e^{4t}-\dfrac{1}{2}e^{2t}$

b. $\dfrac{1}{8}-\dfrac{7}{4}e^{2t}+\dfrac{21}{8}e^{4t}$

c. $\frac{21}{8}e^{4t}-\frac{7}{4}e^{2t}$

d. $1-\frac{3}{4}e^{2t}+\frac{10}{8}e^{4t}$

54. $y'''-y''-4y'+4y=3e^{3t}, \quad y(0)=0, \; y(0)'=y''(0)=1$

a. $\frac{1}{6}e^{3t}-\frac{1}{4}e^{-2t}-\frac{13}{60}e^{2t}+\frac{3}{10}e^{t}$

b. $-\frac{4}{3}e^{t}+\frac{1}{12}e^{-2t}+\frac{5}{4}e^{2t}$

c. $\frac{5}{4}e^{t}+\frac{1}{12}e^{2t}-\frac{4}{3}e^{-2t}$

d. $\frac{1}{6}e^{t}-\frac{13}{60}e^{-2t}-\frac{1}{4}e^{2t}+\frac{3}{10}e^{3t}$

55. $y''-4y'=te^{-2t}, \quad y(0)=y'(0)=0$

a. $\frac{1}{36}e^{2t}-\frac{1}{4}e^{-2t}+te^{-t}$

b. $te^{-t}+\frac{1}{3}e^{-t}$

c. $\frac{1}{36}e^{-2t}-\frac{1}{4}e^{2t}+te^{-t}$

d. $e^{-t}\left(-\frac{1}{3}t+\frac{2}{9}\right)+\frac{1}{36}e^{2t}-\frac{1}{4}e^{-2t}$

56. $y''=2te^{2t}, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=-4$

a. $e^{2t}\left(\frac{1}{2}-\frac{7}{2}t\right)+\frac{t}{2}-\frac{1}{2}$

b. $e^{2t}\left(-\frac{7}{2}+\frac{1}{2}t\right)$

c. $e^{2t}\left(-\frac{7}{2}t+\frac{1}{2}\right)$

d. $\frac{1}{2}\left[1-7te^{2t}(t-1)\right]$

57. $y''+36y=0, \quad y(0)=2, \quad y'(0)=3$

a. $\frac{5}{4}e^{6t}+\frac{3}{4}e^{-6t}$

b. $-\frac{1}{2}\cos 6t-2\operatorname{sen}6t$

c. $2\cos 6t+\frac{1}{2}\operatorname{sen}6t$

d. $\frac{3}{4}e^{6t}+\frac{5}{4}e^{-6t}$

58. $y'' + 4y' + 5y = e^t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

a. $e^{-2t}\left(\frac{17}{10}\cos t + \frac{9}{10}\operatorname{sen} t\right)$

b. $e^{-2t}\left(\frac{9}{20}\cos t - \frac{17}{20}\operatorname{sen} t\right) + \frac{1}{10}e^t$

c. $e^{-2t}\left(\frac{9}{20}\cos t - \frac{17}{20}\operatorname{sen} t\right)$

d. $e^{-2t}\left(\frac{9}{10}\cos t + \frac{17}{10}\operatorname{sen} t\right) + \frac{1}{10}e^t$

59. $y'' + y = \cos t, \quad y(0) = y'(0) = 0$

a. $2t\cos t + \frac{1}{2}t\operatorname{sen} t$

b. $2\cos t + \frac{1}{2}t\operatorname{sen} t$

c. $\frac{1}{2}t\operatorname{sen} t$

d. $\frac{1}{2}\operatorname{sen} t + \frac{1}{2}t\operatorname{sen} t$

Usando el teorema de la *derivada* de la transformada:

60. $£\left\{t^3 \operatorname{sen}\, t\right\}$

a. $\frac{6s^2 - 2}{\left(s^2+1\right)^3}$

b. $\frac{24s - 24s^3}{\left(s^2+1\right)^4}$

c. $\frac{24s^3 - 24s}{\left(s^2+1\right)^4}$

d. $\frac{2 - 6s^2}{\left(s^2+1\right)^3}$

61. $£\left\{t^2 \cos t + t^2 \operatorname{sen} t\right\}$

a. $\frac{2s^3 - 6s}{\left(s^2+1\right)^3}$

b. $\frac{2\left(s^3 + 3s^2 - 3s - 1\right)}{\left(s^2+1\right)^3}$

c. $\frac{6s^2 - 2}{\left(s^2+1\right)^3}$

d. $\frac{2\left(s+1\right)^3}{\left(s^2+1\right)^3}$

62. $£\left\{te^{2t} \cosh\ 3t\right\}$

a. $\frac{s^2 + 9}{\left(s^2 - 9\right)^2}$

b. $\frac{s\left(s-2\right)^3 + 54\left(s-2\right)}{\left[\left(s-2\right)^2 - 9\right]^3}$

c. $\dfrac{s^2-4s+13}{\left(s^2-4s-5\right)^2}$

d. $\dfrac{2s^3+54s}{\left(s^2-9\right)^3}$

Usando el teorema de la *integral* de la transformada:

63. $£\left\{\dfrac{\cosh t-\cosh 2t}{t}\right\}$

a. No existe porque $\ln s$, cuando $s \to \infty$, es ∞

b. $\ln\dfrac{s^2-4}{s^2-1}$

c. $2\ln\dfrac{s^2-4}{s^2-1}$

d. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{s^2-4}{s^2-1}$

64. $£\left\{\dfrac{\operatorname{sen}(1/2)t}{t}\right\}$

a. $\pi-\tan^{-1}2s$

b. $\dfrac{\pi}{2}-\tan^{-1}2s$

c. $\dfrac{\pi}{4}-\tan^{-1}s$

d. $\pi-\tan^{-1}s$

Respuestas:

53. *b*. La opción *a* tiene el error de considerar $£\{l\}=0$ en vez de $\dfrac{1}{s}$. La opción *c* se olvidó de computar $\dfrac{G(0)}{H'(0)}$. La opción *d* aplica otras condiciones iniciales.

54. *d*. La opción *a* tiene desordenados los coeficientes. La opción *b* olvidó pasar el denominador el factor $s-3$; $£\left\{e^{3t}\right\}=\dfrac{1}{s-3}$. La opción *c* contiene los errores de *a* y *b*.

55. *d*. La opción *a* no considera el factor lineal repetido $(s+1)^2$. La opción *b*, además de tener equivocados los coeficientes, no consideró los factores $(s-2)$ y $(s+2)$. La opción *c* también tiene el error de *a* y los coeficientes intercambiados.

56. *d*. La opción *a* tiene intercambiados los paréntesis. La opción *b*, como la *c*, confunden los factores y para e^{2t} debe ser $\left(\dfrac{t}{2}-\dfrac{l}{2}\right)$, así como para e^{0t} debe ser $\dfrac{1}{s}-\dfrac{7}{2}t$.

57. *c*. La opción *a* toma los factores complejos ($s \pm 6i$) como reales ($s \pm 6$). La opción *b* tiene intercambiados los coeficientes. La opción *d* tiene los errores de *a* y *b*.

58. *d*. La opción *a* tiene intercambiados los coeficientes e incompleta la solución (falta el factor $s - 1$). La opción *b* no aplicó bien la fórmula, faltó multiplicar por 2 la exponencial. La opción *c* contiene los errores de *a* y *b*.

59. *c*. La opción *a* supone que $Q_{21} = 1$ y debe ser cero. La opción *b* supone que $Q_{11} = 1$ y debe ser cero. La opción *d* supone que $Q_{12} = \frac{1}{4}$ y debe ser cero.

60. *c*. La opción *a* contiene $F''(s)$ en vez de $-F''(s)$. La opción *b* no consideró el cambio de signo. La opción *d* contiene los errores de *a* y *b*.

61. *b*. Las opciones *a* y *c* tienen sólo $\pounds\{t^2 \cos t\}$ y $\pounds\{t^2 \operatorname{sen} t\}$, respectivamente. La opción *d* equivoca los signos del numerador.

62. *c*. La opción *a* está incompleta, le falta aplicar el primer teorema de traslación. La opción *b* toma $\pounds\{t^2 e^{2t} \cosh 3t\}$. La opción *d* contiene los errores de *a* y *b*.

63. *d*. La opción *a* no considera el cociente $\ln \frac{\sigma^2 - 1}{\sigma^2 - 4}$, cuando $\sigma \to \infty$, aplicando la regla de L'Hôpital queda $\ln 1 = 0$. La opción *b* no completó adecuadamente la integral. La opción *c* da $4\pounds\left\{\frac{\cosh t - \cosh 2t}{t}\right\}$.

64. *b*. La opción *a* considera que el resultado de la integral es $2\tan^{-1} 2\sigma\Big|_s^\infty$. La opción *c* supone que es $\frac{1}{2}\tan^{-1}\sigma$. La opción *d* contiene los errores de *a* y *c*.

Función escalón unitario

Esta función es un elemento básico para representar fuerzas discontinuas o impulsivas, como las vibraciones en sistemas mecánicos o algunas situaciones en circuitos eléctricos.

Definición 7.5

La función *escalón unitario* $U(t - a)$ [o también $Ua(t)$] se define:

$$U(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t \geq a, \quad a \geq 0 \end{cases}$$

Si $a = 0 \rightarrow$

$$U(t) = U_0(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

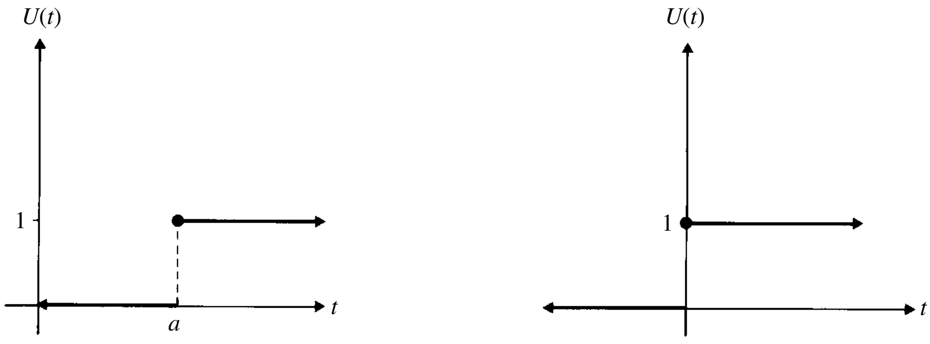


Figura 7-4.

Frecuentemente esta función se presenta combinada con otras. Veámoslo en el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 1

Sea la función $y = f(t) = t^2$

Observar cuidadosamente las siguientes gráficas:

$a.\ f(t) = t^2$

$b.\ f(t) = t^2 \quad t \geq 0$

$c.\ f(t-3)^2$

$d.\ U(t-3)$

$e.\ f(t-3)^2 U(t-3),\ t \geq 0$

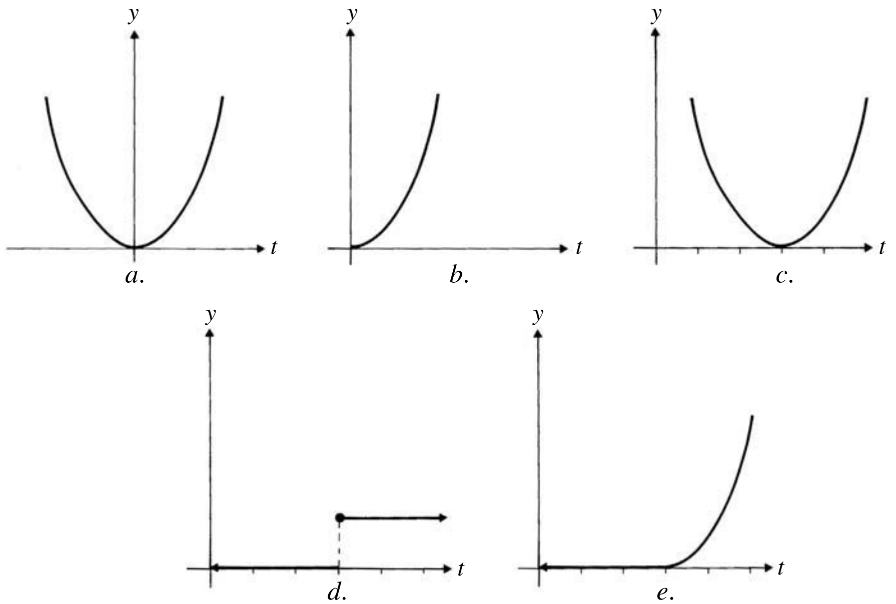


Figura 7-5.

Se ve claramente que la función escalón unitario es de orden exponencial α, y seccionalmente continua, entonces existirá su transformada de Laplace.

Definición 7.6

Transformada de $U(t-a)$

$$£\{U(t-a)\}=\frac{1}{s}e^{-as}$$

Puesto que por definición de transformada tenemos:

$$£\{U(t-a)\}=\int_0^\infty e^{-st}U(t-a)dt=\int_0^\infty e^{-st}0dt+\int_0^\infty e^{-st}1dt$$

$$=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_a^\infty=0+\frac{1}{s}e^{-as}$$

EJEMPLO 1

Hallar la transformada de Laplace de $U(t-3)+U(t-2)$

$$£\{U(t-3)+U(t-2)\}=\frac{1}{s}(e^{-3s}+e^{-2s})$$

EJEMPLO 2

Dada la siguiente gráfica:

1. Expresarla como $y=f(t)$.
2. Expresarla en función de escalón unitario.
3. Encontrar su transformada.

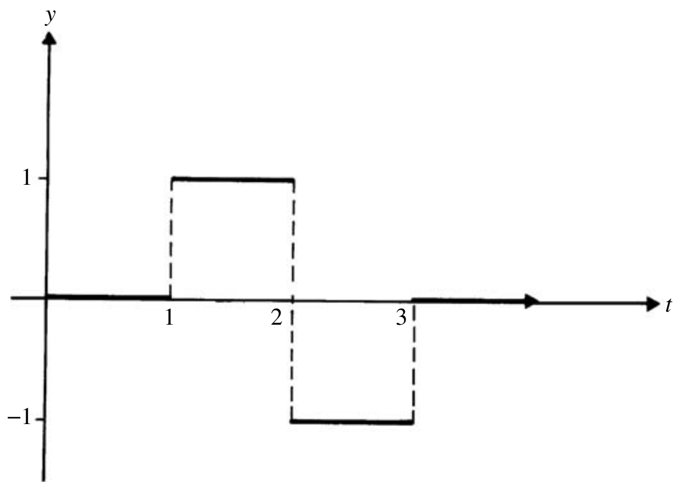


Figura 7-6.

1. $f(t)=\begin{cases} 0, & 0<t<1,\ \ t>3 \\ 1, & 1<t<2 \\ -1, & 2<t<3 \end{cases}$

2. Recordemos que $U(t-a)=\begin{cases} 0 & t<a \\ 1 & t\geq a,\ \ a\geq 0 \end{cases}$

Observamos que para $t=0,\ t=1,\ t=2$ y $t=3$, tenemos:

$$U(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t\geq 0 \end{cases}$$

$$U(t-1)=\begin{cases} 0 & t<1 \\ 1 & t\geq 1 \end{cases}$$

$$U(t-2)=\begin{cases} 0 & t<2 \\ 1 & t\geq 2 \end{cases}$$

$$U(t-3)=\begin{cases} 0 & t<3 \\ 1 & t\geq 3 \end{cases}$$

En $t=0,\ f(t)=0,\ \rightarrow\ 0.U(o)$

En $t=1,\ f(t)=1,\ \rightarrow\ 1.U(t-1)$

En $t=2,\ f(t)=-1,\ \rightarrow\ -2.U(t-2)$

En $t=3,\ f(t)=0,\ \rightarrow\ 1.U(t-3)$

En $t=1$, se multiplica $1.U(t-1)$, porque es 1 lo que vale el brinco de $f(t)=0$ a $f(t)=1$.

En $t=2$, se multiplica por (–2) porque la $f(t)$ desciende dos unidades.

En $t=3$, se multiplica por 1 porque $f(t)$ asciende una unidad.

$$\rightarrow f(t)=U(t-1)-2U(t-2)+U(t-3)$$

$$=U_1(t)-2U_2(t)+U_3(t)$$

3. $\pounds\left\{f(t)\right\}=\frac{1}{s}\left(e^{-s}-2e^{-2s}+e^{-3s}\right)$

EJEMPLO 3

Dada la siguiente gráfica:

1. Expresarla en función de escalón unitario.
2. Encontrar su transformada.

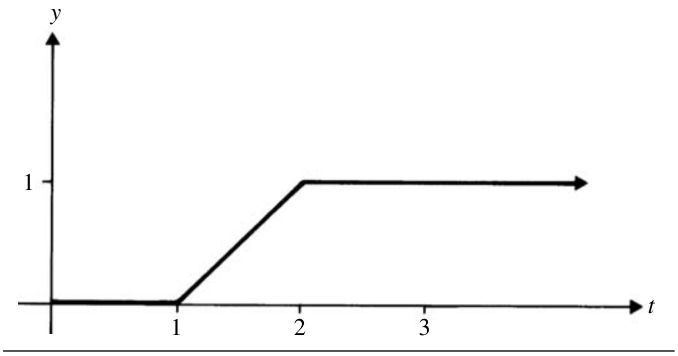


Figura 7-7.

$$y(t)=\begin{cases}0 & 0<t\le 1\\ t-1 & 1<t<2\\ 1 & t\ge 2\end{cases}$$

1. $f(t)=0U_o(t)+(t-1)U_1(t)-(t-1)U_2(t)+1.U_2(t)$

$(t-1)U_1(t)$ produce la recta con pendiente 1 prolongada hasta el infinito, y como en $t=2$ se trunca, por eso hay que restarle $(t-1)U_2(t)$, entonces,

$$f(t)=tU_1(t)-tU_1(t)-tU_2(t)+2U_2(t)$$

2. Aplicaremos la transformada, término a término:

$$£\{U_1(t)\}=\frac{e^{-s}}{s}$$

$$\rightarrow £\{U_1(t)\}=-F'(s)=-\left(\frac{-e^{-s}(s+1)}{s^2}\right)=\frac{e^{-s}(s+1)}{s^2}$$

Similarmente para $£\{tU_2(t)\}=\dfrac{e^{-2s}(2s+1)}{s^2}$

$$\therefore £\{f(t)\}=\frac{e^{-s}(s+1)}{s^2}-\frac{e^{-s}}{s}-\frac{e^{-2s}(s+1)}{s^2}+\frac{2e^{-2s}}{s}$$

$$=\frac{se^{-s}+e^{-s}-se^{-s}-2se^{-2s}-e^{-2s}+2se^{-2s}}{s^2}$$

$$=\frac{e^{-s}-e^{-2s}}{s^2}$$

EJEMPLO 4

Hallar $f(t)$ si $£\{f(t)\}=\dfrac{e^{-as}}{s^2}$

Como $£^{-1}\left\{\dfrac{e^{-as}}{s^2}\right\}=U(t-a)$, entonces,

$$tU(t-a)=£^{-1}\{-F'(s)\}=£^{-1}\left\{\frac{e^{-as}(as+1)}{s^2}\right\}$$

La nueva $F(s)=\dfrac{ase^{-as}}{s^2}+\dfrac{e^{-as}}{s^2}$

en la que nos sobra un término, que se lo restamos:

$$£^{-1}\left\{\frac{ase^{-as}}{s^2}+\frac{e^{-as}}{s^2}-\frac{ase^{-as}}{s^2}\right\}=tU(t-a)-aU(t-a)=$$

$$=(t-a)U(t-a)$$

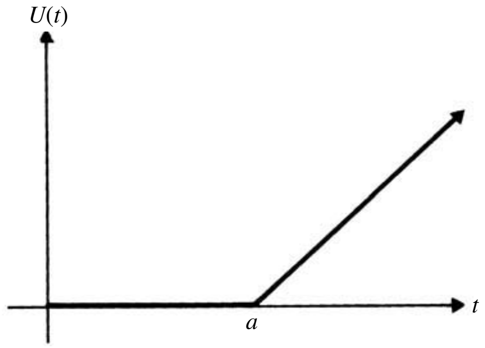


Figura 7-8.

$$\therefore f(t)=\begin{cases}0 & t<a\\ t-a & t\geq a\end{cases}$$

Traslación sobre el eje *t*

Teorema 8

Traslación sobre el eje t (segundo teorema de traslación).

Si $F(s)=£\{f(t)\}$ y $a>0$

$$\rightarrow e^{-as}F(s)=£\{f(t-a)U(t-a)\}$$

Demostración:

Llamemos $F(s)=£\{f(\tau)\}$

$\rightarrow F(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}f(\tau)d\tau$, por definición.

Multiplicando la igualdad por e^{-as};

$$e^{-as}F(s)=\int_0^{\infty}e^{-(a+\tau)s}f(\tau)d\tau$$

sea $a+\tau=t\ \rightarrow d\tau=dt$ $\quad\begin{cases}\text{cuando } \tau=0, & t=a\\ \text{cuando } \tau=\infty, & t=\infty\end{cases}$ y

$$e^{-as}F(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t-a)dt$$

Para que la integral vaya de cero a infinito, se modifica la función multiplicando $fU(t-a)$; cuando $U(t-a)=0$, $\rightarrow f=0$, cuando $U(t-a)=1$, $\rightarrow f\cdot 1=f$,

$$e^{-as}F(s)=\int_0^a e^{-st}f(t-a)(0)dt+\int_0^\infty e^{-st}f(t-a)(1)dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-st}f(t-a)U\left(t-a\right)dt$$

$$\therefore e^{-st}F(s)=\pounds\left\{f(t-a)U(t-a)\right\}$$

EJEMPLO 1

Trazar la gráfica y encontrar la transformada de $f(t) = (t - 1)^2$ $U(t - 1)$. La gráfica es:

$$(t-1)^2U(t-1)=\begin{cases}0 & t<1\\(t-1)^2, & t\geq 1\end{cases}$$

Por el segundo teorema de traslación, tenemos:

$$\pounds\left\{(t-1)U(t-1)\right\}=e^{-st}F(s)$$

Además, $\pounds\left\{t^2\right\}=\dfrac{2}{s^2}$

$$\therefore \pounds\left\{(t-1)^2U(t-1)\right\}= e^{-s}\,\frac{2}{s^2}$$

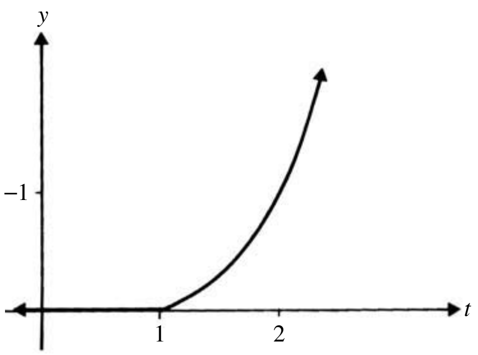


Figura 7-9.

Comprobación:

$$\pounds\left\{(t-1)^2U(t-1)\right\}=\pounds\left\{t^2U(t-1)\right\}-2\pounds\left\{tU(t-1)\right\}+\pounds\left\{U(t-1)\right\}$$

$$\pounds\left\{t^2U(t-1)\right\}=F''(s)=\frac{s^2e^{-s}+2se^{-s}+2e^{-s}}{s^3}$$

$$\pounds\left\{tU(t-1)\right\}=-F'(s)=\frac{e^{-s}}{s}+\frac{e^{-s}}{s^2}$$

$$\pounds\left\{U(t-1)\right\}=F(s)=\frac{e^{-s}}{s}$$

$$\to \pounds\left\{t^2U(t-1)\right\}=\frac{s^2e^{-s}+2se^{-s}+2e^{-s}}{s^3}-\frac{2e^{-s}}{s}-\frac{2e^{-s}}{s^2}+\frac{e^{-s}}{s}$$

$$=\frac{s^2e^{-s}+2se^{-s}-2s^2e^{-s}-2se^{-s}+s^2e^{-s}}{s^3}=2\frac{e^{-s}}{s^3}$$

Esto también confirma la utilidad de este teorema.

EJEMPLO 2

Dada $f(t)=U(t-\pi)\operatorname{sen} t$, hallar $e^{-st}F(s)$

Para poder usar el segundo teorema de traslación necesitamos $\operatorname{sen} t(t-\pi)$

Sabemos:

$$\operatorname{sen} t(t-\pi)=\operatorname{sen} t\cos\pi-\cancel{\cos t\operatorname{sen}\pi}^{\,0}=-\operatorname{sen} t$$

$$f(t)=-U(t-\pi)\operatorname{sen} t(t-\pi),$$

Como $£\{\operatorname{sen} t\}=\dfrac{1}{s^2+1}$, entonces,

$$£\{-U(t-\pi)\operatorname{sen} t(t-\pi)\}=-\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$$

EJEMPLO 3

Dada $F(s)=\dfrac{e^{-s}-e^{-2s}-e^{-3s}+e^{-4s}}{s^3}$, hallar $f(t)$.

$£^{-1}\left\{\dfrac{e^{-s}}{s^2}-\dfrac{e^{-2s}}{s^2}-\dfrac{e^{-3s}}{s^2}+\dfrac{e^{-4s}}{s^2}\right\}$ tomamos el primer término.

Para encontrar $£^{-1}\{e^{-s}\}$ partimos del hecho:

$$£^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s^2}\right\}=U(t-1)\ \text{ y }\ £\{tU(t-1)\}=-F'(s)=\frac{e^{-s}(s+1)}{s^2}\ \text{ y}$$

$$£^{-1}\left\{\frac{e^{-s}(s+1)}{s^2}\right\}=tU(t-1)$$

Pero necesitamos: $£^{-1}\left\{\dfrac{e^{-s}}{s^2}\right\}$ y vemos que en la expresión $£^{-1}\left\{\dfrac{e^{-s}(s+1)}{s^2}\right\}$, podemos restarle un término para que dé lo que buscamos.

$$£^{-1}\left\{\frac{se^{-s}+e^{-s}-se^{-s}}{s^2}\right\}=$$

$$£^{-1}\left\{\frac{se^{-s}+e^{-s}}{s^2}\right\}-£^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s}\right\}$$

$$=tU(t-1)-U(t-1)=(t-1)U(t-1)=£^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s^2}\right\}$$

Similarmente trabajamos con los demás términos:

$$\frac{1}{s^2}\left[se^{-s}+e^{-s}-se^{-s}+(-2se^{-2s}-e^{-2s})+2se^{-2s}+(-3se^{-3s}-e^{-3s})+3se^{-4s}+4se^{-4s}+e^{-4s}-4se^{-4s}\right]$$

cuya transformada inversa es:

$$(t-1)U(t-1)+(2-t)U(t-2)+(3-t)U(t-3)+(4-t)U(t-4)$$

¿Cuál será la gráfica de esta función? Procedemos por pasos:

$$(t-1)U(t-1)=\begin{cases}0 & t<1\\ t-1 & t>1\end{cases} \text{ para } t>1 \quad\rightarrow\quad t-1$$

$$(2-t)U(t-2)=\begin{cases}0 & t<2\\ 2-t & t>2\end{cases} \text{ para } t>2 \quad\rightarrow\quad \begin{array}{r} t-1\\ +2-t\\ \hline 1\end{array}$$

$$(3-t)U(t-3)=\begin{cases}0 & t<3\\ 3-t & t>3\end{cases} \text{ para } t>3 \quad\rightarrow\quad \begin{array}{r} 1\\ +3-t\\ \hline 4-t\end{array}$$

$$(4-t)U(t-4)=\begin{cases}0 & t<4\\ t-4 & t>4\end{cases} \text{ para } t>4 \quad\rightarrow\quad \begin{array}{r} t-4\\ +t-4\\ \hline 0\end{array}$$

$$\therefore f(t)=\begin{cases}t-1 & 1<t<2\\ 1 & 2<t<3\\ 4-t & 3<t<4\\ 0 & \text{resto}\end{cases}$$

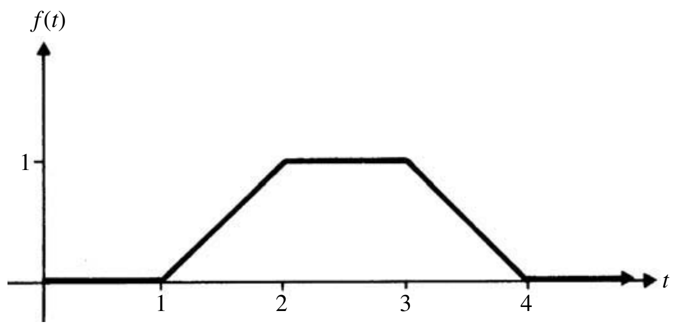


Figura 7-10.

EJERCICIOS 7.4

Hallar la transformada de Laplace de las siguientes funciones:

Respuestas:

1. $f(t)=k[U(t-3)-U(t-2)]$ $\quad \frac{k}{s}\left(e^{-3s}-e^{-2s}\right)$

2. $f(t)=kU(t+1)$ $\quad$ No tiene

3. $f(t)=-5U(t-1)+6U(t)$ $\quad -\frac{5}{s}e^{-s}+\frac{6}{s}$

4. $f(t)=\begin{cases} 3 & 0<t\leq \pi \\ 0 & t>\pi \end{cases}$ $\qquad \frac{3}{s}\left(1-e^{-\pi s}\right)$

5. $f(t)=\begin{cases} 0 & t<1,\ 2<t<3,\ t>4 \\ 1 & 1<t<2 \\ 2 & 3<t<4 \end{cases}$ $\qquad \frac{1}{s}\left(e^{-s}-e^{-2s}+2e^{-3s}-2e^{-4s}\right)$

Establecer las siguientes funciones en términos de la función escalón unitario y encontrar su transformada.

6.

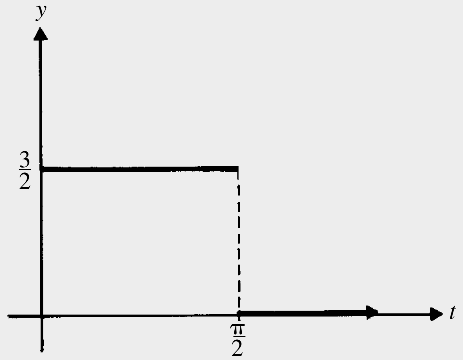


Figura 7-11.

$f(t)=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}U\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$F(s)=(3/2s)\left(1-e^{(-\pi/2)s}\right)$

7.

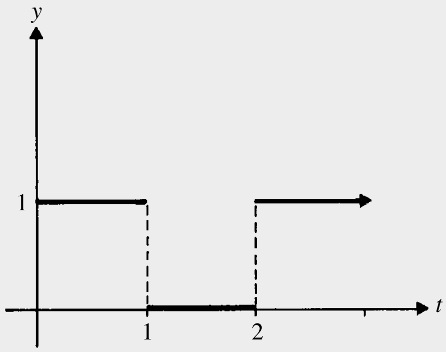


Figura 7-12.

$\frac{1}{s}\left(1-e^{-s}+e^{-2s}\right)$

8.

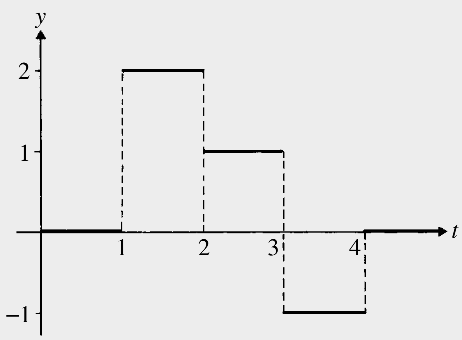
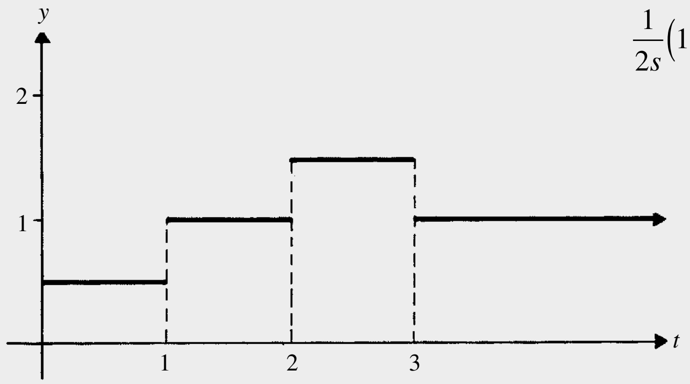


Figura 7-13.

$\frac{1}{s}\left(2e^{-s}-e^{-2s}-2e^{-3s}+e^{-4s}\right)$

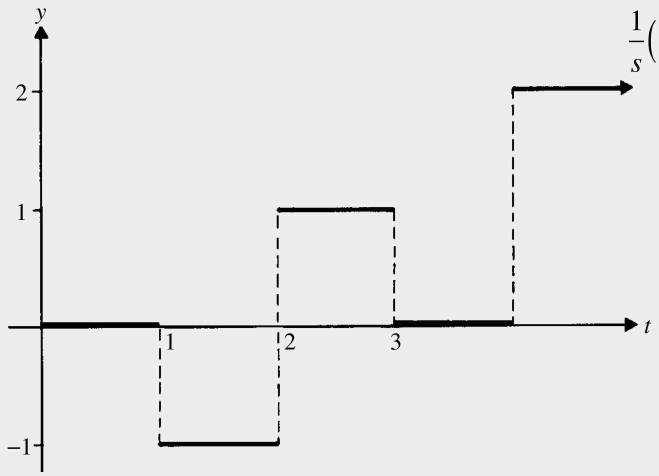
9.



$$\frac{1}{2s}\left(1+e^{-s}+e^{-2s}-e^{-3s}\right)$$

Figura 7-14.

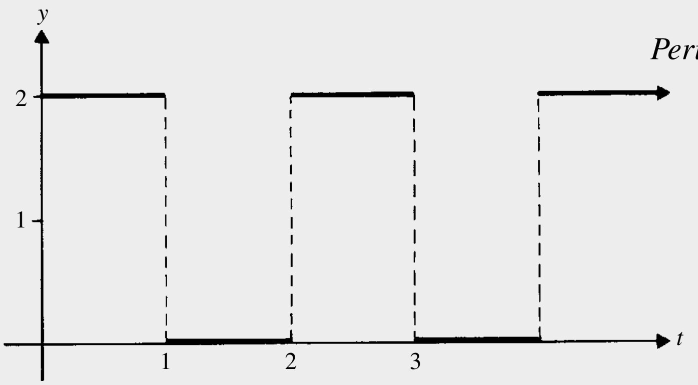
10.



$$\frac{1}{s}\left(2e^{-4s}-e^{-3s}+2e^{-2s}-e^{-s}\right)$$

Figura 7-15.

11.



Periódica con periodo 2 $\dfrac{2}{s}\left(\dfrac{1}{1+e^{-s}}\right)$

Figura 7-16.

12.

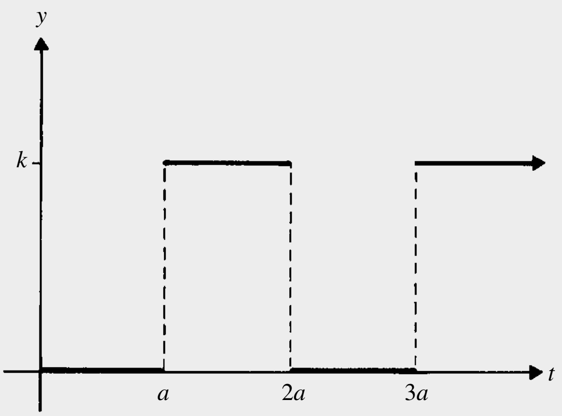


Figura 7-17.

Periódica con periodo 2a $\frac{k}{s}\left(\frac{1}{e^{as}+1}\right)$

13.

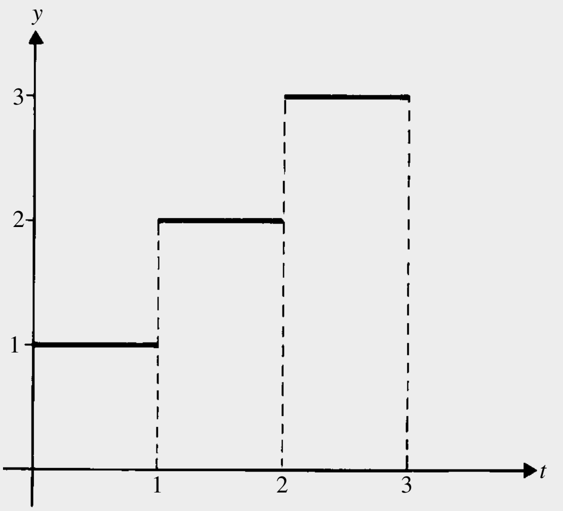


Figura 7-18.

Función escalonada $\frac{1}{s}\left(\frac{1}{1-e^{-s}}\right)$

14.

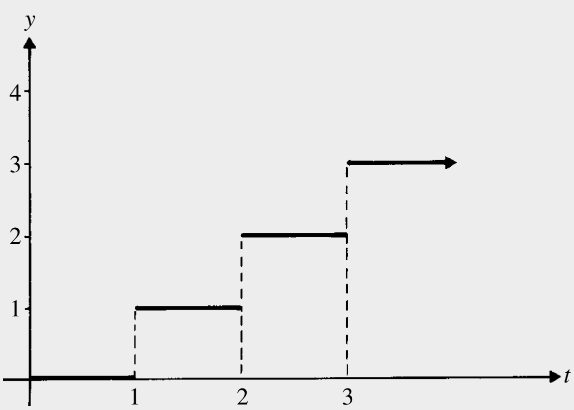
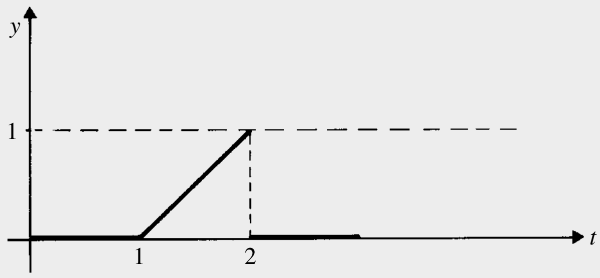


Figura 7-19.

Función escalonada $\frac{1}{s}\left(\frac{1}{e^{s}-1}\right)$

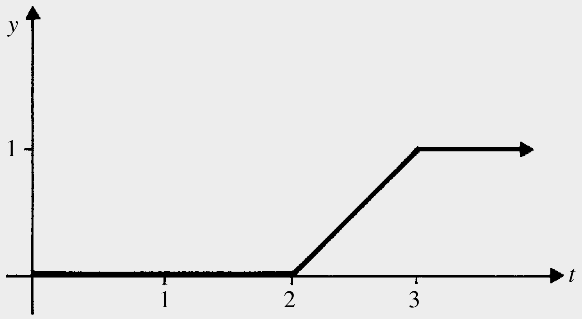
15.



$$\frac{1}{s^2}\left(e^{-s}-e^{-2s}\right)-\frac{1}{s}e^{-2s}$$

Figura 7-20.

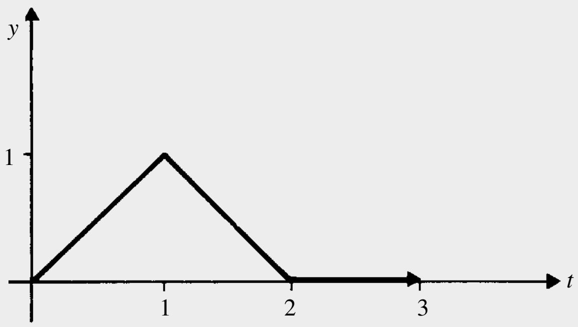
16.



$$\frac{1}{s^2}\left(e^{-2s}-e^{-3s}\right)$$

Figura 7-21.

17.

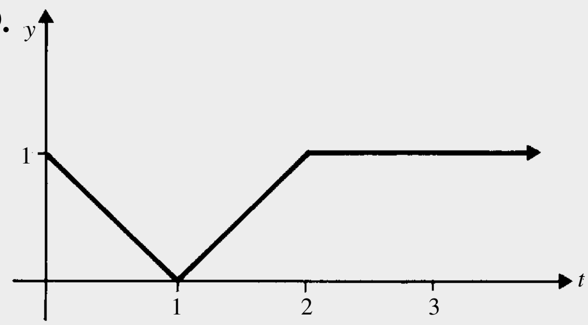


$$\frac{\left(1-e^{-s}\right)^2}{s^2}$$

Figura 7-22.

18. Resolver el ejercicio 17 usando el siguiente teorema: $\pounds^{-1}\left\{f'(t)\right\}=s\pounds\left\{f(t)\right\}-f(0)$

19.



$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}\left(-1-2e^{-s}-e^{-2s}\right)$$

Figura 7-23.

20.

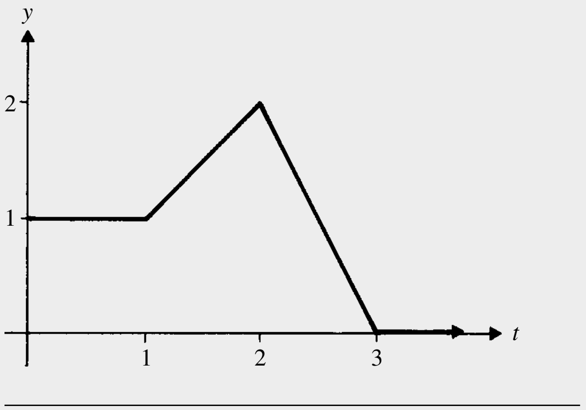


Figura 7-24.

$$\frac{1}{s^2}\left(s+e^{-s}-3e^{-2s}+2e^{-3s}\right)$$

21.

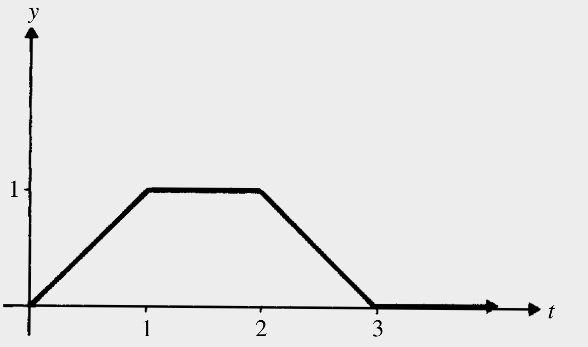


Figura 7-25.

$$\frac{1}{s^2}\left(1-e^{-s}-e^{-2s}+e^{-3s}\right)$$

22. Resolver el ejercicio 21 usando el teorema de la transformada de la *derivada* de una función.

En los siguientes ejercicios, hallar $f(t)$ dada $F(s)$:

a. En términos de la función escalón unitario.

b. En la forma usual.

Respuestas:

23. $\pounds^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s}\right\}$

$$\begin{cases} f(t)=U(t-2) \\ f(t)=\begin{cases} 0 & t<2 \\ 1 & t>2 \end{cases} \end{cases}$$

24. $\pounds^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}-e^{-3s}}{s}\right\}$

$$\begin{cases} f(t)=U(t-2)-U(t-3) \\ f(t)=\begin{cases} 0 & t<2,\ t>3 \\ 1 & 2<t<3 \end{cases} \end{cases}$$

25. $\pounds^{-1}\left\{\frac{e^{-s}+e^{-2s}+2e^{-3s}}{s}\right\}$

$$f(t)=\begin{cases} 0 & t<1 \\ 1, & 1<t<2 \\ 2, & 2<t<3 \\ 4 & t>3 \end{cases}$$

26. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-2s}}{s^2}\right\}$ $\qquad \begin{cases} f(t) = (t-2)U(t-2) \\ f(t) = \begin{cases} 0 & t<2 \\ t-2 & t>2 \end{cases} \end{cases}$

27. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-as}}{s^2}\right\}$ $\qquad f(t) = \begin{cases} 0 & t<a \\ t-a & t>a \end{cases}$

28. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{-e^{-2s}+3e^{-s}}{s^2}\right\}$ $\qquad f(t) = \begin{cases} 0 & t<1 \\ 3t-3, & 1<t<2 \\ 2t-1 & t>2 \end{cases}$

29. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2}\left(e^{-s}-2e^{-2s}+e^{-3s}\right)\right\}$ $\qquad f(t) = \begin{cases} 0 & t<1,\ t>3 \\ t-1 & 1<t<2 \\ -t+3 & 2<t<3 \end{cases}$

30. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{s^2}\left(-e^{-s}+e^{-2s}+e^{-3s}-2e^{-4s}+e^{-5s}\right)\right\}$ $\qquad f(t) = \begin{cases} 1 & 0<t<1 \\ -t+2 & 1<t<2 \\ 0 & 2<t<3,\ t>5 \\ t-3 & 3<t<4 \\ -t+5 & 4<t<5 \end{cases}$

En los siguientes ejercicios usar el segundo teorema de traslación para encontrar la transformada de las siguientes funciones:

Respuestas:

31. $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t & 0<t<\dfrac{\pi}{2} \\ 1 & t>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ $\qquad \dfrac{s+e^{-\pi s/2}}{s\left(s^2+1\right)}$

32. $f(t) = \begin{cases} \cos t & 0<t<\dfrac{\pi}{2} \\ 0 & t>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

33. Comparar los resultados de los dos ejercicios anteriores y encontrar una relación entre ellos.

Respuestas:

34. $f(t) = \begin{cases} \cos t & \dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{3\pi}{2} \\ 0 & \text{Resto} \end{cases}$ $\qquad \dfrac{-e^{-\pi s/2}-e^{-3\pi s/2}}{s^2+1}$

35. $f(t)=\begin{cases} t^2 & 0<t<1 \\ 1 & t>1 \end{cases}$ $\frac{2}{s^2}\left(1-e^{-s}-se^{-s}\right)$

36. $f(t)=\begin{cases} \cos t & 0<t<\pi \\ \text{sen } t & t>\pi \end{cases}$ $\frac{s}{s^2+1}+e^{-\pi s}\left(\frac{s-1}{s^2+1}\right)$

37. $f(t)=e^{t}U(t-2)$ $\frac{e^{-2(s-1)}}{s-1}$

38. $f(t)=e^{-2t}U(t-1)$ $\frac{e^{-(s+2)}}{s+2}$

39. $f(t)=e^{3s}U(t-2)$ $\frac{e^{-2(s-3)}}{s-3}$

40. $f(t)=\text{sen } tU(t-\pi)$ $\frac{-e^{-\pi s}}{s^2+1}$

41. Hallar $£^{-1}\left\{\frac{se^{-\pi s}}{s^2+4}\right\}$ $f(t)=\begin{cases} 0 & t<\pi \\ \cos 2t, & t>\pi \end{cases}$

42. $£^{-1}\left\{\frac{3e^{-\pi s}}{s^2+9}\right\}$ $f(t)=\begin{cases} 0 & t<\pi \\ -\text{sen}3t, & t>\pi \end{cases}$

43. $£^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi}}{s^2+2s+2}\right\}$ $f(t)=\begin{cases} 0 & t<\pi \\ (-\text{sen } t)e^{\pi-t}, & t>\pi \end{cases}$

En los siguientes ejercicios elegir la opción correcta:

44. La transformada de $f(t)=(-t+2)\cup(t-1)-(-t+2)\cup(t-2)$ viene dada por:

a. $\frac{1}{s^2}\left[e^{-2s}(2s+1)\right]$

b. $\frac{1}{s^2}\left[2se^{-s}-e^{-s}(s+1)\right]$

c. $\frac{1}{s^2}\left(e^{-2s}\right)$

d. $\frac{1}{s^2}\left(se^{-s}-e^{-s}+e^{-2s}\right)$

45. La función $f(t)=\begin{cases} t^2 & 0<t<2, \\ 2t & t>2, \end{cases}$ en términos de la función escalón unitario es:

a. $2t(t-2)-t^2\cup(t-2)$

b. $t^2-t^2\cup(t-2)$

c. $t^2\cup(t-0)-2t\cup(t-2)$

d. $t^2\cup(t-0)+\left(2t-t^2\right)\cup(t-2)$

46. La $\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\left(e^{-s}+2e^{-2s}\right)\right\}$, está dada por:

a. $f(t)=\begin{cases} t-1 & 1<t<2 \\ 3t-5 & t>2 \end{cases}$

b. $f(t)=(t-1)\cup(t-1)+2\cup(t-2)$

c. $f(t)=\begin{cases} t-1 & 1<t<2 \\ 2t-4 & t>2 \end{cases}$

d. $f(t)=t\cup(t-1)+2\cup(t-2)$

47. Elegir la gráfica que representa:

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{4}{s}-\frac{3e^{-2s}}{s}+\frac{e^{-3s}}{s}\right\}$$

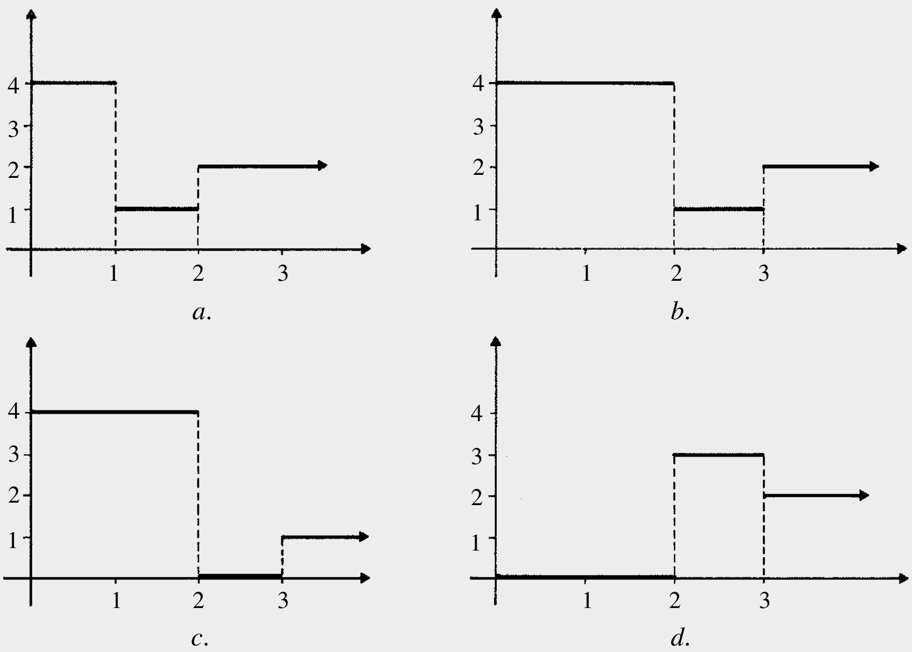


Figura 7-26.

48. La $\pounds^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s^2+16}\right\}$ viene dada por:

a. $\operatorname{sen}4(t-\pi)\cup(t-\pi)$

b. $\frac{1}{4}\cos 4(t-\pi)\cup(t-\pi)$

c. $\frac{1}{4}\operatorname{sen}4t\cup(t-\pi)$

d. $\cos 4t\cup(t-\pi)$

49. La $£\{f(t)\}$ si $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t & 0 < t < \pi \\ \cos t & t > \pi \end{cases}$, está dada por:

a. $\dfrac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}$

b. $\dfrac{1-se^{-\pi s}}{s^2+1}$

c. $\dfrac{1+e^{-\pi s}(1-s)}{s^2+1}$

d. $\dfrac{e^{-\pi s}(1-s)}{s^2+1}$

50. La $£^{-1}\left\{\dfrac{se^{-\pi s/*}}{s^2+1}\right\}$, está dada por:

a. $f(t) = \begin{cases} 0 & t < \pi/2 \\ \operatorname{sen} t & t > \pi/2 \end{cases}$

b. $f(t) = \begin{cases} 0 & t < \pi/2 \\ \cos t & t > \pi/2 \end{cases}$

c. $f(t) = \cos t \cup \left(t - \pi/2\right)$

d. $f(t) = \operatorname{sen} t \cup \left(t - \pi/2\right)$

Respuestas:

44. *d.* La opción *a* es incorrecta pues solamente $£\{t \cup (t-2)\}$. La opción *b* da $£\{(-t+2)\cup(t-1)\}$. La opción *c* es $£\{-(-t+2)\cup(t-2)\}$.

45. *d.* La opción *a* está incompleta; le falta añadir t^2. La opción *b* está incompleta, le falta $+2t\cup(t-2)$. La opción *c* no corta a la función t^2 en $t = 2$.

46. *a.* La opción *b* debería ser $(t-1)\cup(t-1)+2(t-2)\cup(t-2)$. La opción *c* se le olvidó sumar $(t-1)+(2t-4)$. La opción *d* está incompleta.

47. *b.*

48. *c.* Las demás opciones no usan correctamente las identidades: $\cos(A \pm B)$ y $\operatorname{sen}(A \pm B)$. A la opción *a* le falta el cociente $\dfrac{1}{4}$.

49. *c.* La opción *a* es $£\{\operatorname{sen} t + \operatorname{sen}(t-\pi)\cup(t-\pi)\}$ solamente. La opción *b* es $£\{\operatorname{sen} t - \cos(t-\pi)\cup(t-\pi)\}$ solamente. La opción *d* es $£\{\operatorname{sen}(t-\pi)\cup(t-\pi) - \cos(t-\pi)\cup(t-\pi)\}$ solamente.

50. *a* y *d* porque $£^{-1}\dfrac{se^{-\pi s/*}}{s^2+1} = \cos\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} t \cup \left(t - \dfrac{\pi}{2}\right)$

$= \begin{cases} 0 & t < \pi/2 \\ \operatorname{sen} t, & t > \pi/2 \end{cases}$

Funciones periódicas

Definición 7.7
Sea $f(t)$ definida para toda $t > 0$ y $p > 0$, f es *periódica* con periodo p.

$$\leftrightarrow f(t+p) = f(t)$$

EJEMPLO 1

Sea $y = \operatorname{sen} x$

$$y = \operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x \cos 2\pi + \cos x \operatorname{sen} 2\pi = \operatorname{sen} x$$

es periódica con periodo 2π.

EJEMPLO 2

Sea $y(t) = \begin{cases} 2 & 0 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < 2 \end{cases}$ con periodo 2,

$$y(t+2) = \begin{cases} 2 & 2 < t < 3 \\ 0 & 4 < t < 4 \end{cases}$$

$$\therefore\ y(t) = y(t+2).$$

Teorema 9

Sea f seccionalmente continua y sea f función periódica con periodo p.

$$\rightarrow \pounds\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sp}} \int_0^p e^{-st} f(t)\,dt$$

Demostración:

Por definición de transformada de Laplace:

$$\pounds\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

Esta integral puede escribirse como la suma de integrales sobre periodos sucesivos:

$$\pounds\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^p e^{-st} f(t)\,dt + \int_p^{2p} e^{-st} f(t)\,dt + \ldots$$

Nos interesa tener los mismos límites en las integrales, para ello se hace la siguiente transformación:

1a. Integral $t = \tau,\ \ dt = d\tau$ $\qquad \begin{cases} t = 0,\ \tau = 0 \\ t = p,\ \tau = p \end{cases}$

2a. Integral $t = \tau + p,\ \ dt = d\tau \quad \begin{cases} t = 0,\ \tau = 0 \\ t = 2p,\ \tau = p \end{cases}$

3a. Integral $t = \tau + 2p,\ \ dt = d\tau \begin{cases} t = 0,\ \tau = 0 \\ t = 3p,\ \tau = p \end{cases}$ etcétera.

$$£\{f(t)\} = \int_0^p e^{-s\tau} f(\tau)\, d\tau + \int_0^p e^{-s(\tau+p)} f(\tau+p)\, d\tau +$$

$$\int_0^p e^{-s(\tau+2p)} f(\tau+2p)\, d\tau + \ldots$$

Como *f* es periódica, con periodo *p*, entonces,

$$f(\tau+p) = f(\tau) \text{ y:}$$

$$£\{f(t)\} = \int_0^p e^{-s\tau} f(\tau) d\tau + \int_0^p e^{-s\tau} e^{-sp} f(\tau) d\tau + \int_0^p e^{-s\tau} e^{-2sp} f(\tau) d\tau + \ldots$$

$$= \int_0^p e^{-s\tau} f(\tau) d\tau \underbrace{\left[1 + e^{-sp} + \left(e^{-sp}\right)^2 + \left(e^{-sp}\right)^3 + \ldots\right]}_{\text{Serie geométrica con razón } e^{-sp}}$$

Para $s > 0$ y $p > 0 \rightarrow e^{-sp} < 1$ y la serie geométrica converge a $\dfrac{1}{1 - e^{-sp}}$

$$\therefore £\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sp}} \int_0^p e^{-st} f(t) dt$$

EJEMPLO 3

Sea la función $y(t) = \begin{cases} 2 & 0 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < 2 \end{cases}$ con periodo 2

Hallar su transformada de Laplace.

$$£\{y(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-2s}} \int_0^2 e^{-st} y(t) dt = \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left[\int_0^1 2e^{-st} dt + \int_1^2 0 dt\right]$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left(-\frac{2}{s} e^{-st}\Big|_0^1\right) = \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left(-\frac{2}{s} e^{-s} + \frac{2}{s}\right)$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left(\frac{2\left(1 - e^{-s}\right)}{s}\right) = \frac{1}{\left(1 - e^{-s}\right)\left(1 + e^{-s}\right)} \left(\frac{2\left(1 - e^{-s}\right)}{s}\right)$$

$$= \frac{2}{s\left(1 + e^{-s}\right)}$$

que concuerda con la solución del ejercicio 11 de la sección 7.4.

EJEMPLO 4

Encontrar la transformada de la siguiente función periódica:

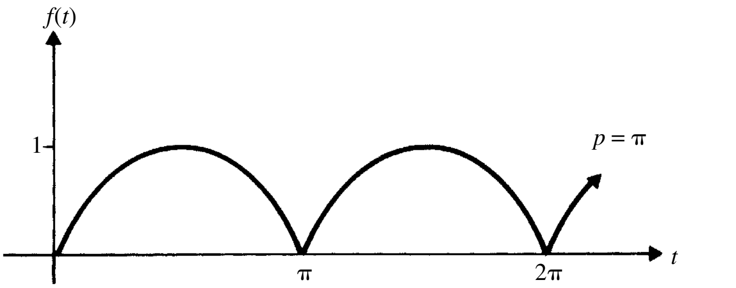


Figura 7-27.

$$\frac{1}{1-e^{-s\pi}}\int_0^{\pi} e^{-st}\operatorname{sen} t\,dt$$

$$\int_0^{\pi} e^{-st}\operatorname{sen} t\,dt = \frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}$$

$\rightarrow \dfrac{1}{1-e^{-\pi s}}\cdot\dfrac{\left(1+e^{-\pi s}\right)}{s^2+1}$, multiplicando por e

$$\frac{e^{\pi s}+1}{e^{\pi s}-1}\cdot\frac{1}{s^2+1}$$

Veamos esta expresión: $\dfrac{e^{\pi s}+1}{e^{\pi s}-1} = \sqrt{\dfrac{\left(e^{\pi s}+1\right)^2}{\left(e^{\pi s}-1\right)^2}}$

$$= \sqrt{\frac{e^{2\pi s}+2e^{\pi s}+1}{e^{2\pi s}-2e^{\pi s}+1}} = \sqrt{\frac{e^{\pi s}+2+e^{-\pi s}}{e^{\pi s}-2+e^{-\pi s}}} = \sqrt{\frac{\dfrac{e^{\pi s}+e^{-\pi s}}{2}+1}{\dfrac{e^{\pi s}+e^{-\pi s}}{2}-1}}$$

$= \sqrt{\dfrac{\cosh \pi s+1}{\cosh \pi s-1}} = \coth\dfrac{\pi}{2}s$ por identidades hiperbólicas del ángulo mitad.

$$\therefore \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\coth\left(\pi/2\right)s}{s^2+1}.$$

Convolución

Teorema 10

Convolución. Si $f(t)$ y $g(t)$ son seccionalmente continuas para $t \geq 0$, de orden exponencial y $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$. Entonces,

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\right\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s).$$

Demostración:

Sean $F(s) = \pounds\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)d\tau$

$$G(s) = \pounds\{g(t)\} = \int_0^\infty e^{-s\gamma} g(\gamma)d\gamma$$

$$F(s)G(s) = \left(\int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)d\tau\right)\left(\int_0^\infty e^{-s\gamma} g(\gamma)d\gamma\right)$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s(\tau+\gamma)} f(\tau)g(\gamma)d\tau d\gamma$$

$$= \int_0^\infty f(\tau)d\tau \int_0^\infty e^{-s(\tau+\gamma)} g(\gamma)d\gamma$$

Tomando τ fija $\rightarrow$ sea $t = \tau + \gamma$

$$\rightarrow \qquad dt = d\gamma$$

Sustituyendo:

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty f(\tau)d\tau \int_\tau^\infty e^{-st} g(t-\tau)dt$$

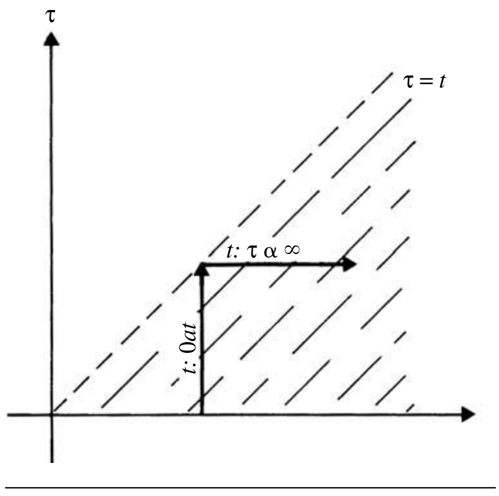


Figura 7-28.

La región de integración se muestra en la figura 7.28, en el plano $t\tau$, y se puede intercambiar el orden de integración porque *f* y *g* son seccionalmente continuas y de orden exponencial. Entonces,

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-st}dt \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}\left[\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau dt\right]$$

$$= \pounds\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right\}$$

Notación:

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \pounds^{-1}\{F(s)G(s)\}$$

EJEMPLO 1

Usar el teorema de convolución para encontrar: $\pounds^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s+1)^2}\right\}$

Sabemos que $\pounds^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s+1)^2}\right\} = t$ y $\pounds^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+1)^2}\right\} = te^{-t}$

$$\rightarrow$$

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)^2}\right\} = \int_0^t \tau e^{-\tau}(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_0^t e^{-\tau}(t\tau-\tau^2)d\tau$$

$$= -t^2e^{-2t} - te^{-t} + t + t^2e^{-t} + 2te^{-t} + 2e^{t} - 2$$

$$= te^{-t} + 2e^{-t} + t - 2.$$

Comprobación: $\pounds\left\{te^{-t} + 2e^{-t} + t - 2\right\} =$

$$= \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s} = \frac{1}{s^2(s+1)^2}.$$

EJEMPLO 2

Evaluar $\pounds\left\{\int_0^t e^{\tau}\cos(t-\tau)d\tau\right\}$

tomamos $f(t) = e^t$ y $g(t) = \cos t$

$$\pounds\left\{\int_0^t e^{\tau}\cos(t-\tau)d\tau\right\} = \pounds\left\{e^t\right\} \cdot \pounds\{\cos t\}$$

$$= \frac{1}{s-1} \cdot \frac{s}{s^2+1}$$

$$= \frac{s}{(s-1)(s^2+1)}.$$

EJEMPLO 3

Hallar: $£^{-1}\left\{\dfrac{s}{\left(s^2+a^2\right)^2}\right\}$

Sean $F(s)=\dfrac{s}{s^2+a^2}$ y $G(s)=\dfrac{1}{s^2+a^2}$, entonces,

$$£^{-1}\{F\}=\cos at \text{ y } £^{-1}\{G\}=\frac{1}{a}\operatorname{sen} at$$

$$\to £^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s^2+a^2\right)^2}\right\}=\int_0^t \cos a\tau \cdot \frac{1}{a}\operatorname{sen} a(t-\tau)\,d\tau$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^t \cos a\tau\left(\operatorname{sen} at\cos a\tau-\cos at\operatorname{sen} a\tau\right)d\tau$$

$$=\frac{1}{a}\operatorname{sen} at\int_0^t \cos^2 a\tau d\tau$$

$$-\frac{1}{a}\cos at\int_0^t \frac{\operatorname{sen} 2a\tau}{2}d\tau$$

$$=\frac{1}{a}\operatorname{sen} at\int_0^t \frac{1}{2}(1+\cos 2a\tau)d\tau$$

$$-\frac{1}{a}\cos at\int_0^t \frac{\operatorname{sen} 2a\tau}{2}d\tau$$

$$=\frac{1}{a}\operatorname{sen} at\left(\frac{t}{2}+\frac{\operatorname{sen} 2at}{4a}\right)$$

$$-\frac{1}{a}\cos at\left(\frac{1-\cos 2at}{4a}\right)$$

$$=\frac{1}{a}\operatorname{sen} at\left(\frac{t}{2}+\frac{\operatorname{sen} at\cos at}{2a}\right)$$

$$-\frac{1}{a}\cos at\left(\frac{\operatorname{sen}^2 at}{2a}\right)$$

$$=\frac{t\operatorname{sen} at}{2a}.$$

EJERCICIOS 7.5

Hallar la transformada de Laplace de las siguientes funciones, cuyo periodo se indica:

1.

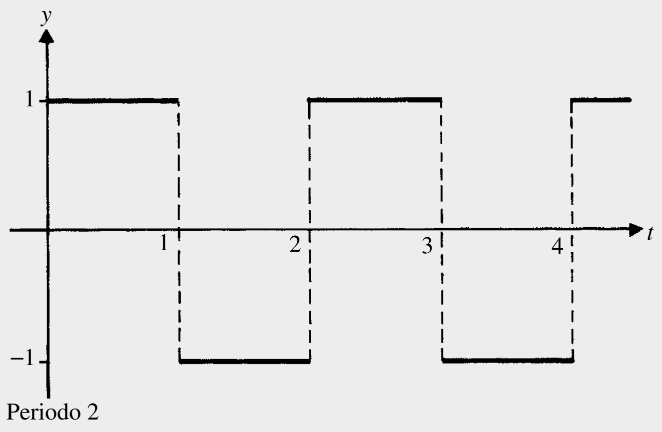


Figura 7-29.

$$\frac{1}{s}\left(\frac{e^s-1}{e^s+1}\right)=\frac{1}{s}\tanh\frac{s}{2}$$

2.

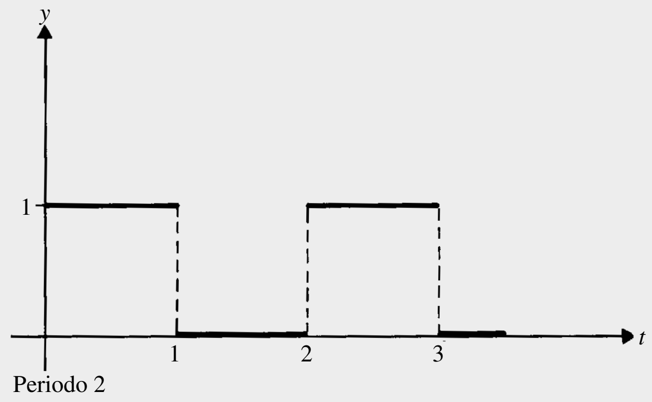


Figura 7-30.

$$\frac{1}{s\left(1+e^{-s}\right)}$$

3.

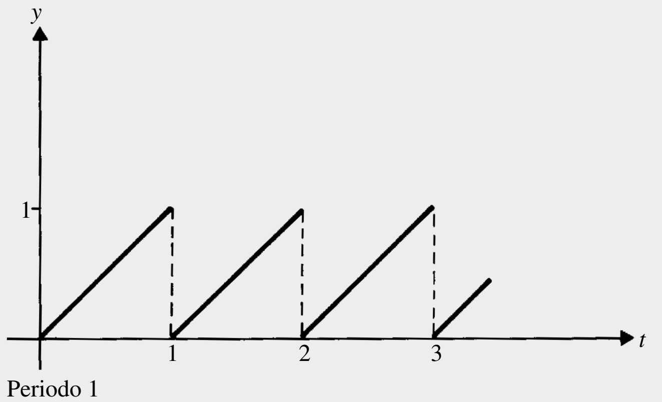


Figura 7-31.

$$\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-s}}{s\left(1-e^{-s}\right)}$$

Respuestas:

4. $f(t)=\begin{cases}0 & 0<t<1\\ \text{t} & 1<t<2\end{cases}$ $\qquad \dfrac{e^{-s}\left(s+1\right)-e^{-2s}\left(2s+1\right)}{s^{2}\left(1-e^{-2s}\right)}$

Periodo 2

5. $f(t)=\begin{cases}2t & 0<t<2\\ 4 & 2<t<4\end{cases}$ $\qquad \dfrac{2\left(1-e^{-2s}-2se^{-4s}\right)}{s^{2}\left(1-e^{-4s}\right)}$

Periodo 4

6. $f(t)=\begin{cases}0 & 0<t<2\\ -2t & 2<t<4\end{cases}$ $\qquad \dfrac{e^{-4s}\left(8s+2\right)+e^{-2s}\left(-4s-2\right)}{s^{2}\left(1-e^{-4s}\right)}$

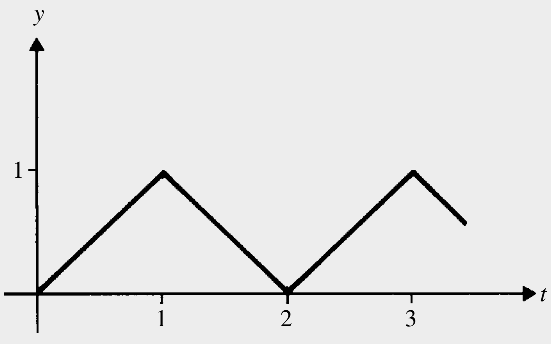
Periodo 4

7. $f(t)=t^{2},\ 0<t<2$ $\qquad \dfrac{2\left(1-e^{-2s}(1+2s+2s^{2})\right)}{s^{3}\left(1-e^{-2s}\right)}$

Periodo 2

8. $f(t)=\begin{cases}t & 0<t<1\\ 0 & 1<t<2\end{cases}$ $\qquad \dfrac{1-e^{-s}\left(s+1\right)}{s^{2}\left(1-e^{-2s}\right)}$

9.



Periodo 2

Figura 7-32.

$$\frac{1}{s^{2}}\tanh\frac{s}{2}$$

10. $f(t)=\begin{cases}\operatorname{sen} t & 0<t<\pi\\ 0 & \pi<t<2\pi\end{cases}$ $\qquad \dfrac{1}{\left(s^{2}+1\right)\left(1-e^{-\pi s}\right)}$

Periodo 2π

En los siguientes ejercicios usar el teorema de convolución para hallar $£^{-1}\{F(s)\}$.

11. $£^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-1)(s-2)}\right\}$ $\qquad e^{2t}-e^{t}$

12. $£^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+3)(s-1)}\right\}$ $\qquad \dfrac{1}{4}\left(e^{t}-e^{-3t}\right)$

13. $£^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+2)(s+1)}\right\}$ $\qquad e^{-t}-e^{-2t}$

14. $£^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s-1)}\right\}$ $\qquad e^{t}-1$

15. $£^{-1}\left\{\dfrac{1}{s\left(s^{2}+1\right)}\right\}$ $\qquad 1-\cos t$

16. $£^{-1}\left\{\dfrac{s}{\left(s^{2}+1\right)(s-1)}\right\}$ $\qquad \dfrac{1}{2}\left(e^{t}+\operatorname{sen} t-\cos t\right)$

17. $£^{-1}\left\{\dfrac{1}{\left(s^{2}+1\right)\left(s^{2}+9\right)}\right\}$ $\qquad \dfrac{1}{24}(3\operatorname{sen} t-\operatorname{sen} 3t)$

18. $£^{-1}\left\{\dfrac{s^{2}}{\left(s^{2}+4\right)^{2}}\right\}$ $\qquad \dfrac{1}{2}t\cos 2t+\dfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2t$

19. $£^{-1}\left\{\dfrac{s}{\left(s^{2}+4\right)^{2}}\right\}$ $\qquad \dfrac{1}{4}t\operatorname{sen} 2t$

20. $£^{-1}\left\{\dfrac{s}{\left(s^{2}+4\right)^{3}}\right\}$ $\qquad \dfrac{1}{64}t\left(\operatorname{sen} 2t-2t\cos 2t\right)$

21. $£^{-1}\left\{\dfrac{1}{\left(s^{2}+w^{2}\right)^{2}}\right\}$ $\qquad \dfrac{1}{2w^{3}}\left(\operatorname{sen} wt-wt\cos wt\right)$

En los siguientes ejercicios elegir la opción correcta:

22. La transformada de la función periódica.

$$f(t)=\begin{cases} t & 0<t<3 \\ 3 & 3<t<6 \end{cases} \quad \text{Periodo } 6$$

Está dada por:

a. $\dfrac{s-3se^{-6s}-e^{-3s}}{s\left(1-e^{-6s}\right)}$

b. $\dfrac{e^{-6s}\left(-\dfrac{3}{s}+1\right)-\dfrac{1}{s^2}e^{-3s}}{s\left(1-e^{+6s}\right)}$

c. $\dfrac{6se^{-3s}-e^{-3s}+1-3e^{-6s}}{s^2\left(1-e^{+6s}\right)}$

d. $\dfrac{1-3se^{-6s}-e^{-3s}}{s^2\left(1-e^{-6s}\right)}$

23. Dada $f(t)=\begin{cases}|\cos t| & 0<t<\pi/2\\ 0 & \pi/2<t<\pi\end{cases}$ Periodo π

Su transformada viene dada por:

a. $\dfrac{s+e^{-\pi s/2}}{s^2\left(1-e^{-\pi s}\right)}$

b. $\dfrac{e^{-\pi s/2}}{\left(s^2+1\right)\left(1-e^{-\pi s}\right)}$

c. $\dfrac{s+e^{-\pi s/2}}{\left(1-e^{-\pi s}\right)\left(s^2+1\right)}$

d. $\dfrac{e^{-\pi s/2}}{s^2\left(1-e^{-\pi s}\right)}$

24. Usando el teorema de convolución elegir la opción que contiene $\pounds\left\{e^{-t}*e^{t}\cos t\right\}$

a. $\dfrac{2s-1}{5\left[(s-1)^2+1\right]}$

b. $\dfrac{s-1}{\left(s^2-2s+2\right)(s+1)}$

c. $\dfrac{2s^3-2s^2+4s-6}{5\left[(s-1)^2+1\right](s+1)}$

d. $\dfrac{-2s^2+5s-3}{5\left(s^2-2s+2\right)(s+1)}$

25. Usar el teorema de convolución para encontrar $£^{-1}\left\{\dfrac{1}{s\left(s^2-1\right)}\right\}$

a. $1-\cosh t$

b. $\cos t-1$

c. $\cosh t-1$

d. $1-\cos t$

26. Elegir la opción que contiene un paso intermedio de la evaluación de

$£^{-1}\left\{\dfrac{1}{s\left(s^2-1\right)^2}\right\}$ usando el teorema de convolución.

a. $1-\cos t-\int_0^t \operatorname{sen}(t-2\tau)d\tau-\dfrac{1}{2}\int_0^t \operatorname{sen} t d\tau$

b. $\cos t-1-\int_0^t \operatorname{sen}(t-2\tau)d\tau-\dfrac{1}{2}\int_0^t \operatorname{sen} t d\tau$

c. $1-\cos t+\int_0^t \operatorname{sen}(t-2\tau)d\tau-\dfrac{1}{2}\int_0^t \operatorname{sen} t d\tau$

d. $\cos t-1+\int_0^t \operatorname{sen}(t-2\tau)d\tau-\dfrac{1}{2}\int_0^t \operatorname{sen} t d\tau$

Respuestas:

22. *d*. La opción *a* tiene errores algebraicos. Las opciones *b* y *c* además tienen un error de concepto, el divisor de las funciones periódicas es $\left(1-e^{-sp}\right)$, donde p es el periodo.

23. *c*. La opción *a* se olvidó de dividir el resultado entre $1+\dfrac{1}{s^2}$ que es factor de la integral $\int_0^{\pi/2} \cos t e^{-st} dt$. A la opción *b* le falta un término. La opción *d* contiene los dos errores anteriores.

24. *b*. La opción *a* está incompleta, le falta $£\left\{-2e^{-t}\right\}$. La opción *c* no contiene $£\left\{e^t \operatorname{sen} t\right\}$. A la opción *d* le falta $£\left\{2e^t \cos t\right\}$

25. *c*. La opción *a* considera el resultado de la integral como $\cosh(t-\tau)\Big|_0^t$. Las opciones *b* y *d* suponen que $£^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2-1}\right\}$ es $\operatorname{sen} t$, lo cual es falso.

26. *a*. La opción *b* supone que el resultado de $\int_0^t \operatorname{sen}(t-\tau)d\tau$ es $-\cos(t-\tau)\Big|_0^t$ y debe ser $\cos(t-\tau)\Big|_0^t$. La opción *c*, así como la *d*, jamás darán el resultado correcto que es: $f(t)=1-\cos t-\dfrac{1}{2}t \operatorname{sen} t$.

Aplicaciones de la transformada de Laplace

Circuitos eléctricos

EJEMPLO 1

Encontrar *Ic* del siguiente circuito:

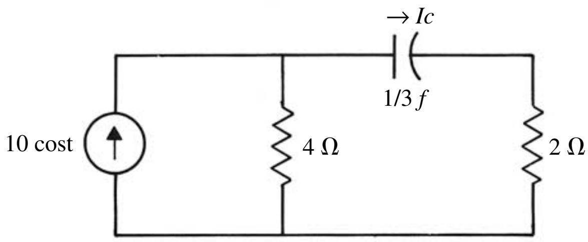


Figura 7-33.

si su equivalente en transformada de Laplace es:

$$\frac{10s}{s^2+1}$$

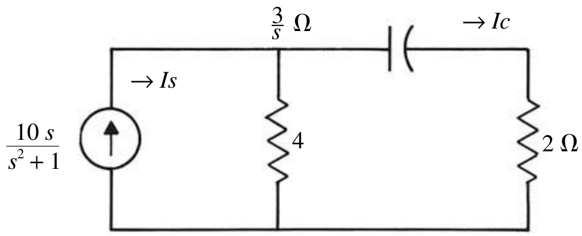


Figura 7-34.

(Sugerencia: utilizar el método de mallas.)

SOLUCIÓN:

$$4\left(Ic - Is\right) + \frac{31c}{5} + 2Ic = 0$$

$$4\left(Ic - \frac{10s}{s^2+1}\right) + \frac{31c}{5} + 2Ic = 0$$

$$4sIc - \frac{40s^2}{s^2+1} + 31c + 2sIc = 0$$

$$Ic(6s+3)=\frac{40s^2}{s^2+1}$$

$$Ic=\frac{40s^2}{(6s+3)(s^2+1)}$$

$$\frac{40s^2}{(6s+3)(s^2+1)}=\frac{A}{(6s+3)}+\frac{Bs+C}{(s^2+1)}$$

$$40s^2=As^2+A+6Bs^2+6Cs+3Bs+3C$$

$$\left.\begin{aligned}40&=A+6B\\0&=6C+3B\\0&=A+3C\end{aligned}\right\}A=8,\ B=\frac{16}{3},\ C=-\frac{8}{3}.$$

$$Ic=\frac{8}{3(2s+1)}+\frac{16}{3}\cdot\frac{s}{s^2+1}-\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{s^2+1}$$

$$\therefore\ Ic=\frac{4}{3}e^{-t/2}+\frac{16}{3}\cos t-\frac{8}{3}\operatorname{sen} t.$$

EJEMPLO 2

Encontrar I_L del siguiente circuito:

$$i(L)(0-)=10\ \text{A}$$

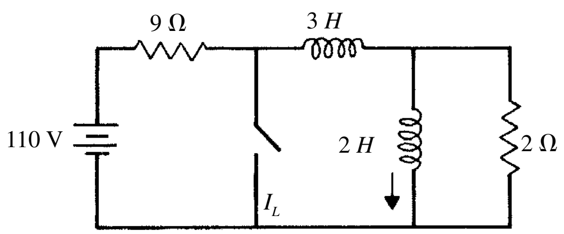


Figura 7-35.

si su equivalente en transformada de Laplace es:

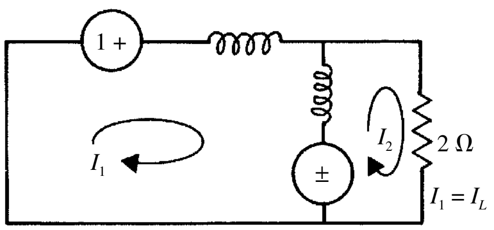


Figura 7-36.

SOLUCIÓN:

ECUACIÓN 1:

$$-22+3sI_1+2s\left(I_1-I_2\right)-33=0$$

$$I_1\left(3s+2s\right)-I_2\left(2s\right)=55$$

$$I_1\left(5s\right)+I_2\left(-2s\right)=55$$

ECUACIÓN 2:

$$2I_2+33+2s\left(I_2-I_1\right)=0$$

$$2I_2+33+2sI_2-2sI_1=0$$

$$I_1\left(-2s\right)+I_2\left(2s+2\right)=-33$$

Resolviendo I_1 por determinantes:

$$I_1=\left|\frac{\begin{matrix}55 & -2s\\ -33 & 2s+2\end{matrix}}{\begin{matrix}5s & -2s\\ -2s & 2s+2\end{matrix}}\right|=\frac{110s+110-66s}{10s^2+10s-4s^2}=\frac{22s+55}{3s^2+5s}$$

Pero $\dfrac{22s+55}{5\left(3s+5\right)}=\dfrac{A}{s}+\dfrac{B}{3s+5}$

$$22s+55=3As+5A+Bs$$

$$55=5A\ \rightarrow A=11$$

$$22=3A+B\ \rightarrow B=-11$$

$$I_1=I_L=£^{-1}\left\{\frac{11}{s}-\frac{11}{3s+5}\right\}=£^{-1}\left\{\frac{11}{s}-\frac{11/3}{s+5/3}\right\}$$

$$I_L=11t-\frac{11}{3}e^{-5t/3}\ A.$$

EJEMPLO 3

Sabiendo que el eje de una viga tiene una deflexión transversal $y(x)$ en el punto x, cuya ecuación es:

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{W(x)}{EI},\ \ 0<x<l$$

donde EI es la constante: rigidez de la flexión, $W(x)$ es la carga vertical por unidad de longitud l y actúa transversalmente sobre la viga.

Encontrar la deflexión en cualquier punto de una viga fija en sus extremos $x = 0$ y $x = l$, que soporta una carga uniforme W por unidad de longitud.

La ecuación es: $\dfrac{d^4y}{dx^4} = \dfrac{w}{EI}$, $0 < x < l$

con condiciones iniciales $y(0) = y''(0) = y(l) = 0$, $y''(l) = 0$ (de viga articulada), aplicando transformada

$$s^4y(s) - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y'''(0) = \frac{w}{EIs}$$

Sean $y'(0) = C_1$, $y'''(0) = C_2$

$$\to s^4y(s) - C_1s^2 - C_2 = \frac{w}{EIs}$$

$$s^4y(s) = \frac{w}{EIs} + C_1s^2 + C_2$$

$$y(s) = \frac{w}{EIs} + \frac{C_1s^2}{s^4} + \frac{C_2}{s^4}$$

$$\pounds\{y(s)\} = \frac{1}{24}\frac{w}{EIs}t^4 + C_1t + \frac{1}{6}C_2t^3$$

Como $y = \dfrac{w}{24EIs}t^4 + C_1t + \dfrac{C_2}{6}t^3$, entonces,

$$y' = \frac{w}{6EIs}t^3 + C_1 + \frac{C_2}{2}t^2 \text{, aplicando: } y(l) = y''(l) = 0$$

$$y'' = \frac{w}{2EIs}t^2 + C_2t$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{w}{24EI}l^4 + C_1l + \frac{C_2}{6}l^3 \\ \\ 0 &= \frac{w}{24EI}l^2 + C_2l \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} C_2l &= -\frac{wl^2}{2EI} \\ C_2l &= -\frac{wl}{2EI} \\ C_1l &= -\frac{C_2}{6}l^3 - \frac{w}{2EI}l^4 \end{aligned}$$

$$C_1 = -\frac{C_2}{6}l^2 - \frac{w}{24EI}l^3$$

$$C_1 = -\frac{l^2}{6}(-\frac{wl}{2EI}) - \frac{wl^3}{24EI} = \frac{wl^3}{12EI} - \frac{wl^3}{24EI} = \frac{wl^3}{24EI}$$

$\therefore$ la deflexión buscada es:

$$y(t) = \frac{w}{24EI}t^4 + \frac{wl^3}{24EI}t - \frac{wl}{24EI}t^3$$

$$= \frac{w}{24EI}\left(t^4 + l^3t - 2lt^3\right) = \frac{w}{24EI}t\left(t^3 + l^3 - 2lt^2\right)$$

Resumen

Definiciones

Transformada de Laplace
Para $t \geq 0$: $\quad £\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt = F(s).$

Transformada inversa
Si $£\{f(t)\} = F(s)$
$\to f(t) = £^{-1}\{F(s)\}$ es la transformada inversa.

Función seccionalmente continua en *t* [*a*, *b*]
Si *a*. está definida en todo punto del intervalo.
b. Si es posible dividir el intervalo [*a*, *b*] en un número finito de subintervalos, en cada uno de los cuales la función es continua y existe el límite de la función desde el interior del subintervalo a cualquiera de los extremos del mismo.

Función de orden exponencial α
f(*t*) es de orden exponencial ↔ existen *M*, $\alpha \in R$ tales que: $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$.

Función escalón unitario

$$U(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t > a, \quad a \geq 0 \end{cases}$$

Transformada de la función escalón unitario

$$£\{U(t-a)\} = \frac{1}{s} e^{-as}.$$

Función periódica
f es periódica con periodo $p \leftrightarrow f(t+p) = f(t)$
$t > 0$ y $p > 0$

Teoremas

Primer teorema de traslación
Si $£\{f(t)\} = F(s)$
$\to £\{e^{at} f(t)\} = F(s-a),\ a \in R$

Existencia de la transformada
Sea *f*(*t*) de orden exponencial, $t > 0$.
Sea *f*(*t*) seccionalmente continua en $t \geq 0$.
$\to £\{f(t)\}$ existe para $s > \alpha$

Transformada de la derivada de una función
Si $£\{f(t)\} = F(s) \to £\{f'(t)\} = s£\{f(t)\} - f(0).$

Transformada de la integral de una función

$$£\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s} £\{f(t)\} = \frac{1}{s} F(s).$$

Derivada de la transformada
Si $£\{f(t)\} = F(s)$
$\to £\{tf(t)\} = -F'(s)$

Generalizando

$$£\left\{(-t)^n f(t)\right\} = F^{(n)}(s)$$

Integral de la transformada

$$£\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(\sigma)d\sigma$$

Segundo teorema de traslación

Si $£\{f(t)\} = F(s)$

$\rightarrow e^{-as}F(s) = £\{f(t-a)U(t-a)\}$

Transformada de una función periódica con periodo *p*

$$£\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sp}}\int_o^p e^{-st}F(t)dt$$

Teorema de convolución

Si $£\{f(t)\} = F(s)$ y $£\{g(t)\} = G(s)$,entonces,

$$£\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right\} = £\{f\}£\{g\} = F(s)G(s).$$

Método para encontrar transformadas inversas cuando en el denominador hay:

1. **Factores lineales**

   Sea $\dfrac{G(s)}{(s-a)(s+b)(s-c)} = F(s)$

   $$\rightarrow £^{-1}\{F(s)\} = Ae^{at} + Be^{-bt} + Ce^{ct}$$

   Donde $A = \dfrac{G(a)}{H'(a)}$, $B = \dfrac{G(-b)}{H'(-b)}$, $C = \dfrac{G(c)}{H'(C)}$,

2. **Factores lineales repetidos**

   Sea $F(s) = \dfrac{G(s)}{H(s)} = \dfrac{G(s)}{(s-a)^5}$, $Q(s) = \dfrac{G(s)}{H(s)}(s-a)^5$

   $$\rightarrow £^{-1}\{F(s)\} = e^{at}\left(A_5\frac{t^4}{4!} + A_4\frac{t^3}{3!} + A_3\frac{t^2}{2!} + A_2t + A_1\right)$$

   Donde $A_5 = \dfrac{Q(a)}{0!}$, $A_4 = \dfrac{Q'(a)}{1!}$, $A_3 = \dfrac{Q''(a)}{2!}$, $A_2 = \dfrac{Q'''(a)}{3!}$, $A_1 = \dfrac{Q^{\text{IV}}(a)}{4!}$

3. **Factores complejos**

   Para cada $a = \alpha + \beta i$: $Q(s) = \dfrac{G(s)}{s-\alpha+\beta i}$

   $$\rightarrow £^{-1}\left\{\frac{G(s)}{H(s)}\right\} = 2e^{\alpha t}(Q_1\cos\beta t - Q_2\operatorname{sen}\beta t)$$

4. **Factores complejos repetidos**

   Para el caso $m = 2$.

   $$y(t) = 2e^{\alpha t}\left[(Q_{11}+Q_{21})\cos\beta t - (Q_{11}+Q_{21})\operatorname{sen}\beta t\right]$$

   donde $Q(s)$ produce Q_{21} y Q_{22} y $Q'(s)$ produce Q_{11} y Q_{12}

Tabla de transformadas de Laplace	
$F(t)$	$\pounds\{f(t)\} = F(s)$
1. 1	$1/s$
2. t	$1/s^2$
3. $t^n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$ $t^n, \quad n > 0$	$n!/s^{n+1}$
4. e^{at}	$\Gamma(n)/s^{n+1}$
5. $\operatorname{sen} \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
6. $\cos \omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
7. $\operatorname{senh} at$	
8. $\cosh at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$
9. $t^n e^{at}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
10. $e^{at} \operatorname{sen} \omega t$	
11. $e^{at} \cos \omega t$	$\dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
12. $t \operatorname{sen} \omega t$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
13. $t \cos \omega t$	
14. $\operatorname{sen} \omega t - \omega t \cos \omega t$	$\dfrac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
15. $\operatorname{sen} \omega t + \omega t \cos \omega t$	
16. $\operatorname{sen} at \operatorname{senh} at$	$\dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
17. $e^{at} f(t)$	$\dfrac{2\omega s^3}{(s^2+\omega^2)^2}$
18. $(-t)^n f(t), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$	

19. $f^{(n)}(t), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$	$\dfrac{2\omega s^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
20. $\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\dfrac{2a^2 s}{s^4+4a^4}$
21. $f(t-a)U(t-a), \quad a > 0$	$F(s-a)$
22. $\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$s^{(n)}F(s) - s^{(n-1)}f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$ $\dfrac{F(s)}{s}$ $e^{-as}F(s)$ $F(s)G(s)$

Autoevaluación 7

1. Usar la definición para encontrar la transformada de Laplace de:

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \le t < 1 \\ 4-3t & t \ge 1 \end{cases}$$

2. Escoger la opción que contiene a $\pounds\left\{e^{-5t}\right\}$

a. $\dfrac{1}{(s+5)^2}$

b. $\dfrac{1}{(s+5)}$

c. $\dfrac{1}{s-5}$

d. $\dfrac{1}{(s-5)^2}$

3. Escoger la opción que contiene a $\pounds\left\{te^{-5t}\right\}$

a. $\dfrac{1}{(s+5)^2}$

b. $\dfrac{1}{(s+5)}$

c. $\dfrac{1}{s-5}$

d. $\dfrac{1}{(s-5)^2}$

4. Hallar $\pounds\left\{\cos\frac{1}{4}t\right\}$

5. Elegir la opción que contiene a $\pounds\left\{te^{-5t}\right\}$

a. $\dfrac{12s}{s^2+36}$

b. $\dfrac{s}{\left(s^2+36\right)^2}$

c. $\dfrac{12}{s^2+36}$

d. $\dfrac{12s}{\left(s^2+36\right)^2}$

6. Resolver $\pounds\left\{e^{-t}\cos 2t\right\}$

7. Hallar $\pounds\left\{\operatorname{sen} t\ U(t-\frac{\pi}{2})\right\}$

8. Elegir la opción que contiene a $\pounds^{-1}\left\{\dfrac{1}{9s-1}\right\}$

a. $\frac{1}{9}e^{t/9}$

b. $e^{t/9}$

c. $9e^{9t}$

d. $9e^{-9t}$

9. Hallar $\pounds^{-1}\left\{\dfrac{48}{s^5}\right\}$

10. Elegir la opción que contiene $\pounds^{-1}\left\{\dfrac{4}{s^2-4}\right\}$

a. $2\operatorname{sen} 2t$

b. $4\operatorname{sen} 2t$

c. $2\operatorname{senh} 2t$

d. $2\cosh 2t$

11. Hallar $\pounds^{-1}\left\{\dfrac{1}{\left(s-3\right)^3}\right\}$

12. Elegir la opción que contiene a: $\pounds^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2-2s+10}\right\}$

13. Resolver por transformada de Laplace:

$$2y''+y'-y=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=4$$

14. Elegir la opción que contiene la $Y(s)$ y la solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$y'''-3y'+2y=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=0,\ y''(0)=0$$

a. $Y(s)=\dfrac{s^2+4s+3}{\left(s+2\right)^2}\qquad y=-te^{-2t}$

b. $Y(s)=\dfrac{s^2-3}{\left(s+2\right)\left(s-1\right)}\qquad y=-\frac{1}{3}e^{-2t}-\frac{2}{3}e^{t}$

c. $Y(s)=\dfrac{s^2-3}{(s-1)^2(s+2)}$ $\quad y=e^t(\frac{8}{9}-\frac{2}{3}t)-\frac{1}{9}e^{-2t}$

d. $Y(s)=\dfrac{3s^2-3}{s^2-3s+2}$ $\quad y=2e^t+e^{-2t}$

15. Resolver $y'''-y''+y'-y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=y''(0)=0$

16. Elegir la opción que contenga un paso intermedio en el proceso de obtener la transformada de la función periódica:

$$f(t)=\begin{cases}0 & 0<t<1\\ t-1 & 1\le t\le 2 \quad \text{Periodo 3}\\ 1 & 2<t<3\end{cases}$$

a. $\dfrac{1}{1-e^{-s}}\displaystyle\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$

b. $\displaystyle\int_1^2 (t-1)e^{-st}dt+\int_2^3 f(t)dt$

c. $\dfrac{1}{s}\displaystyle\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$

d. $\dfrac{1}{1-e^{-3s}}\left[\displaystyle\int_1^2 (t-1)e^{-st}dt+\int_2^3 e^{-st}dt\right]$

17. Hallar $f(t)=\displaystyle\int_0^t e^{-2\tau}\cos(t-\tau)d\tau$

18. Usar el teorema de convolución para hallar:

$$£^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-a)}\right\}$$

Respuestas de la autoevaluación 7

1. $\dfrac{1}{s^2}(1-4e^{-s})$

2. *b*. La opción *a* es $£\{te^{-5t}\}$

La opción *c* es $£\{e^{5t}\}$

La opción *d* es la $£\{te^{5t}\}$

3. *a*. (vea el ejercicio 2).

4. $\dfrac{16s}{16s^2+1}$

5. *d*. El resto de las opciones están completas.

6. $\dfrac{s+1}{(s+1)^2+4}$

7. $\dfrac{se^{-\pi s/2}}{s^2+1}$

8. *a*.

9. $2t^4$

10. *c*. La opción *a* es $\pounds^{-1}\left\{\dfrac{4}{s^2+4}\right\}$

La opción *b* es $\pounds^{-1}\left\{\dfrac{8}{s^2+4}\right\}$

La opción *d* es $\pounds^{-1}\left\{\dfrac{2s}{s^2-4}\right\}$

11. $\dfrac{1}{2}t^2e^{3t}$

12. *a*. El resto de las opciones están incompletas.

13. $Y(s)=\dfrac{2s+9}{2(s+1)(s-\frac{1}{2})},\quad y=\dfrac{10}{3}e^{t/2}-\dfrac{7}{3}e^{-t}$

14. *c*. La opción toma $Q'(s)$ en vez de $Y(s)$

La opción *b* considera la $H(s)$ como $(s+2)(s-1)$, en vez de $(s+2)(s-1)^2$

La opción *d* toma como $G(s)$ a $H'(s)$

15. $y=\dfrac{1}{2}(e^t+\cos t-\operatorname{sen} t)$

16. *d*. Para las demás opciones conviene recordar que si $f(t)$ es periódica con periodo 3.

17. $\dfrac{1}{a^2}(e^{at}-at-1)$.

Pierre Simon, marqués de Laplace

Pierre Simon, marqués de Laplace (1749-1827)

En 1749 nació en el pueblito de Beaumont, en Auge, el hombre que algunos apodarían más tarde el "Newton francés". Sus habilidades matemáticas destacaron tanto en la escuela, que sus familiares y vecinos juntaron dinero para que estudiara en la ciudad de Caen. A los 18 años era maestro de matemáticas. Durante su vida tuvo dos temas predilectos: la astronomía y las probabilidades, y habría de hacerse famoso en ambas áreas del conocimiento.

En astronomía publicó una obra monumental en cinco volúmenes titulada: *Tratado de mecánica celeste,* en la cual demostró que un sistema planetario puede ser estable dentro las reglas de la mecánica newtoniana. El mismo Newton consideraba que para conservar su estabilidad, el sistema solar requería de la mano de Dios. En cuanto a la dificultad de los cálculos efectuados en este tratado, se relata el comentario que N. Bowditch tradujo al inglés con el siguiente comentario: "Nunca encuentro escrita la expresión: 'es evidente que…' sin sentirme seguro de que tengo varias horas de trabajo arduo por delante antes de cerciorarme del porqué es tan evidente".

En probabilidad, Laplace publicó un enorme volumen llamado *Teoría analítica de las probabilidades,* en el que afirmó que con el puro sentido común se puede entender todo lo relacionado con la probabilidad. La lectura del libro da, sin embargo, la impresión de que intenta demostrar lo contrario.

En sus obras tenía la desagradable costumbre de no mencionar los resultados que no le pertenecen. Hablamos, por ejemplo, de la ecuación de Laplace, sin que sea descubrimiento suyo. Se debe destacar en cambio, que utilizó y aplicó las transformaciones que llevan su nombre mejor que nadie antes de él. Por otra parte, la teoría de probabilidad le debe a él más, sin lugar a dudas, que a cualquier otro científico. Trabajó bastante las ecuaciones diferenciales, y es así como tenemos una ecuación de Laplace y el método de la transformada para resolver una o un sistema de éstas.

Su adaptación a los cambios de sistemas políticos es solamente comparable con la del camaleón respecto a los colores. Si Laplace fue capaz de sobrevivir a una buena cantidad de regímenes, se debe a la facilidad con la cual cambió de una edición a otra, una dedicatoria hecha a Napoleón por otra donde demostró que este último no podía, probabilísticamente, durar mucho.

Anécdota

Cierto día, Laplace presentó a Napoleón una edición de su *Sistême du Monde*. El emperador había oído comentar que la palabra "Dios" no estaba en el libro y como le gustaba hacer preguntas desconcertantes, lo recibió así: "Señor Laplace, me dicen que ha escrito usted este extenso volumen sobre el sistema del Universo sin siquiera mencionar a su Creador." Laplace era el más intransigente en lo referente a filosofía o a religión, por lo que respondió brusca y vehementemente: "No necesité esa hipótesis." La respuesta divirtió mucho a Napoleón y la relató a Lagrange. Éste exclamó a su vez: "¡Es una bella hipótesis! Explica muchísimas cosas."

Los números me ponen malo.

SHAKESPEARE (HAMLET).

Problema

—¿Cuántos hijos tienes y de qué edad? —pregunta Sabimuto a su amigo Kilosay.
—Tengo tres hijas. El producto de sus edades es 36 y su suma es el número de esa casa.
—¿Y qué más? —dice Sabimuto.
—¡Ah! De veras —responde Kilosay—, la mayor se llama Alicia.
A continuación, Sabimuto dio la respuesta exacta. ¿Cuál es?

Propiedades metafísicas del número 7

Resume en sí el mundo material y es causa operante en el moral. Es el principio viviente plasmado en sus obras. Simboliza la ascendencia de lo espiritual sobre lo material. Es síntesis en el pensamiento y congruencia en la mano de obra. Da inspiración para distinguir lo bueno de lo malo, guiando la rectitud de los pasos hacia lo correcto, propiciando la recta elección, la recta deliberación y la recta dirección en el camino.

Numeración árabe (aproximadamente 200 a. C.)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Solución al problema

$$36 = 1 \cdot 2^2 \cdot 3^2$$

Las posibles combinaciones de los tres factores son:

$1 \cdot 1 \cdot 36$	cuya suma es 38
$1 \cdot 2 \cdot 18$	cuya suma es 21
$1 \cdot 3 \cdot 12$	cuya suma es 16
$1 \cdot 4 \cdot 9$	cuya suma es 14
$1 \cdot 6 \cdot 6$	cuya suma es 13
$2 \cdot 2 \cdot 9$	cuya suma es 16
$2 \cdot 3 \cdot 6$	cuya suma es 14
$3 \cdot 3 \cdot 4$	cuya suma es 13

Sabimuto comprendió que necesitaba un dato más al ver que hay dos sumas iguales, 13; de ahí se infiere que el número de la casa es 13, ya que si hubiera sido cualquier otra suma podía identificarse unívocamente después de la primera pregunta.

Como $2+2+9=13$ y $1+6+6=13$, esto supone gemelas en ambos casos y sólo cuando las edades son 2, 2, 9 la *mayor* queda determinada.

PREGUNTA

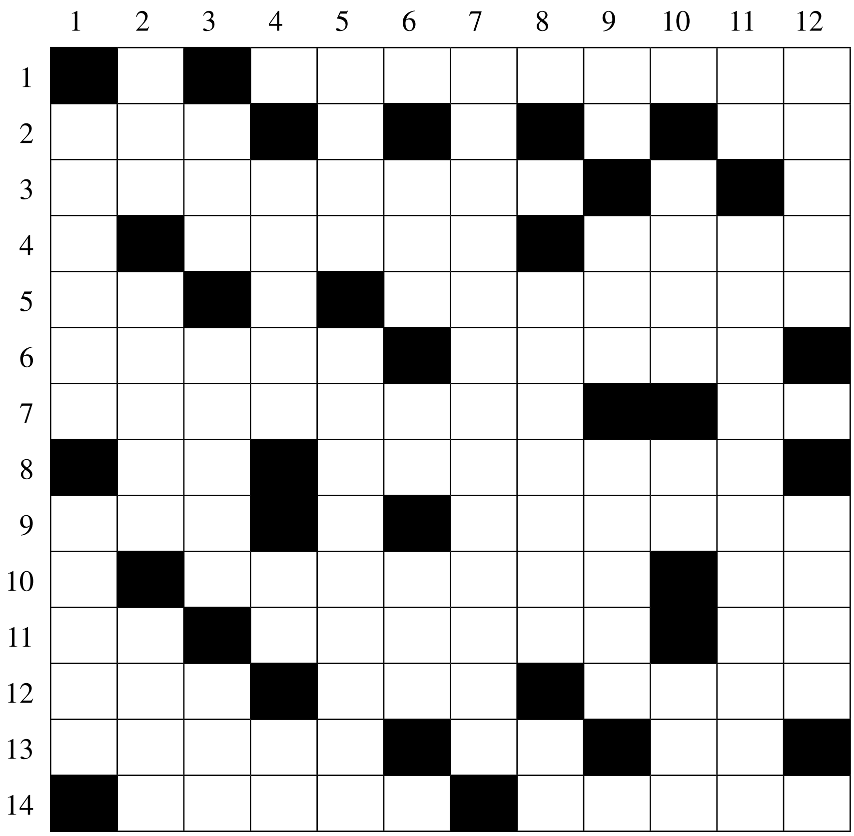
¿Cómo sería una proyección de la cuarta dimensión? Si sabemos cómo es el campo visual tridimensional proyectado (casi todos guardamos alguna fotografía). Si la dimensión se caracteriza por ciertas cualidades de vibración, ¿sería factible la existencia de la novena dimensión en el planeta Venus, por ejemplo?

HORIZONTALES

1. Vocal. Que conservan la unidad.
2. Diente de un peine. Consonante. Consonante. Vocal. Símbolo químico del sodio.
3. Símbolo de suma en cálculo. Consonante. Consonante.
4. Consonante. Son, ocupan un lugar. Ladrón.
5. Conjunción latina. Consonante. Peldaño, función discontinua.
6. Apto para algo. Ceñidor de seda.
7. Lo que se utiliza para hacer un cambio en las operaciones matemáticas. Seis en números romanos.
8. (Al revés) nota musical. Tiempo que tarda una cosa en volver a la posición inicial.
9. Habitante de Tierra del fuego (Argentina). Vocal. Cantidad que sirve de medida o tipo de comparación en determinados cálculos.
10. Consonante. Matemático francés (1749-1827). Ciudad de Caldea. Patria de Abraham.
11. Nota musical. Atadas. Símbolo químico del cobalto.
12. Ave semejante a la perdiz. Primeras letras de cráneo. Planta umbelífera.
13. Cosecha de la caña de azúcar. Afirmación. Vocales.
14. Aso ligeramente. Paga, acredita.

VERTICALES

1. Relativo a los pitecoideos (parecidos al mono). Estrecho que comunica al mar Omán con el golfo Pérsico.
2. Todavía. Pieza de corcho para tapar botellas. Cóleras, furias.
3. Hija de Zeus, diosa del mal. Palanca movida por el pie. Siglas acerca de los ovnis.
4. Vocal. Ser, hallarse. Contracción. Dios del sol en el antiguo Egipto.
5. Consonantes. Herramientas con mango de madera (femenino).
6. Vocal. Raspa la superficie. Preposición. Hogar, fogón. Vocal.
7. Operador usado por Laplace (plural).
8. Vocal. Consonante. Natural de Río de Janeiro. Vocales.
9. (Al revés) terminación de infinitivo. Primeras letras de la palabra cajón. Ciudad de Rusia. Símbolo químico del Boro.
10. Uno en números romanos. La más temible de las metamorfosis de la esposa de Siva. Primeras letras de dulce. Prefijo que significa nuevo.
11. Terminación de aumentativo. Teorema: $\pounds\{f(t)\} \cdot \pounds\{g(t)\} = F(s)G(s)$.
12. Sala grande. Vocal. Caudales, riquezas. Vocal.



8 Series de Fourier

Jean Baptiste Joseph Fourier
(1768-1830)

Introducción

Series trigonométricas y funciones periódicas

Fórmulas de Euler

Convergencia de las series de Fourier

Series de Fourier para las funciones pares e impares

Funciones de periodo arbitrario

Desarrollo de funciones no periódicas en series de Fourier

$$\ldots, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi^2}{6}, \frac{\pi^2}{8}, \frac{\pi^2}{12}, \ldots$$

...y adentro

del número, otro número y otro
dentro del otro, prolíferos,
fecundos, ...cayendo de
libros ...los números,
los números, los números

PABLO NERUDA (Fragmento)

Introducción

Hay números con resultados sorprendentes, como:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots$$

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots$$

¿Para qué cansar al lector con más números y números y números? En este capítulo se demuestran estos resultados y se confirma, una vez más, lo valioso que resulta el hallazgo de una manipulación adecuada de las series.

Jean Baptiste Joseph Fourier desarrolló una teoría sobre conducción de calor, para lo cual necesitó las series trigonométricas, que tienen unos coeficientes determinados ingeniosamente por él. Estas series tienen una gran aplicación en fenómenos de la naturaleza periódica, como vibraciones magnéticas, terremotos, corrientes, etcétera.

Series trigonométricas y funciones periódicas

Las series trigonométricas son de la forma:

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + a_2 \cos 2x + b_2 \operatorname{sen} 2x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx + \ldots$$

Donde a_i, b_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ son constantes reales llamadas coeficientes. Generalmente, estas series son periódicas con periodo 2π; aunque puede extenderse la teoría para cualquier periodo arbitrario.

Recordemos la definición de función periódica

Definición 8.1

Función periódica. Sea $f(t)$ definida para toda $t>0$ y $T>0$, f es periódica con periodo T

$$\leftrightarrow f(t+T)=f(t)$$

Teorema 1

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones periódicas con periodo T. $\rightarrow h(x)=af(x)+bg(x)$, $a, b \epsilon R$ también es periódica con periodo T.

DEMOSTRACIÓN:

Como $f(x)$ es periódica con periodo $T \rightarrow f(x+T)=f(x)$

Como $g(x)$ es periódica con periodo $T \rightarrow g(x+T)=g(x)$

$$\begin{aligned} \rightarrow h(x+T) &= af(x+T)+bg(x+T) \\ &= af(x)+bg(x) \\ &= h(x) \end{aligned}$$

Teorema 2

Si T es periodo de $f(x)$

$\rightarrow nT, n$ *entero*, también es periodo.

DEMOSTRACIÓN:

Si T es periodo de $f(x)$

$\rightarrow f(x+T)=f(x)$, pero $f(x+2T)=f(x+T)$ porque f es periódica con periodo T, entonces tenemos:

$$f(x)=f(x+T)=f(x+2T)=f(x+3T)=...=f(x+nT)$$

Para $n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, ...,\ y\ \ x \in R$

Obtención del mínimo periodo

La función sen x tiene periodos $2\pi, 4\pi, 6\pi, ...,$ ya que $\text{sen}(x+2\pi)=\text{sen}(x+4\pi)=\text{sen}(x+6\pi)=...=\text{sen}\, x$. Sin embargo, el menor de todos ellos es 2π.

En general, el mínimo periodo ocurrirá cuando:

$$T=\frac{\text{periodo natural de la función}}{n}$$

donde n es el coeficiente del ángulo.

EJEMPLO 1

Obtener el menor periodo de $f(x)=\cos 2x$

Como el periodo de la función coseno es 2π

$$\rightarrow \qquad T=\frac{2\pi}{2}=\pi$$

$$\therefore T=\pi, \text{ para } f(x)=\cos 2x$$

EJEMPLO 2

Hallar el menor periodo de las funciones:

a. $\cos \pi x$

b. $\operatorname{sen} 2\pi x$

c. $\operatorname{sen} \dfrac{2\pi n x}{k}$

d. $\tan x$

e. constante

f. $\tan \dfrac{x}{3}$

a. El periodo de la función coseno es 2π

$$\rightarrow T=\frac{2\pi}{\pi}=2$$

$$\therefore T=2 \text{ es el periodo de } f(x)=\cos \pi x$$

b. El periodo de la función seno es 2π

$$\rightarrow T=\frac{2\pi}{2\pi}=1 \quad \therefore T=1 \text{ es el periodo de } f(x)=\operatorname{sen} 2\pi x$$

c. $T=\dfrac{2\pi}{\dfrac{2\pi n}{k}}=\dfrac{k}{n}$

$$\therefore T=\frac{k}{n} \text{ es el periodo de } f(x)=\operatorname{sen}\frac{2\pi n x}{k}$$

d. La función $\tan x$ tiene periodo $T=\pi$

e. La función constante tiene cualquier número positivo como periodo; por tanto, no tiene periodo mínimo.

f. Como la función $\tan x$ tiene periodo $\pi \rightarrow T=\dfrac{\pi}{1/3}=3\pi$

EJEMPLO 3

Podemos convertir en periódica una función que de por sí no lo sea: $f(x)=e^{x}$ para $-\pi<x<\pi$ y $f(x)=f(x+2\pi)$

Su gráfica es:

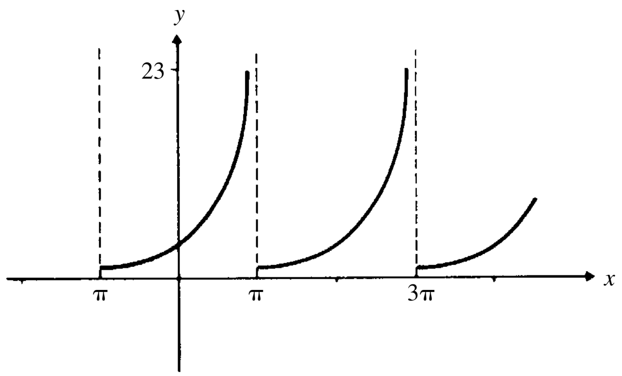


Figura 8-1.

Integrales que se utilizan frecuentemente:

$$\int \operatorname{sen} nx dx = -\frac{1}{n}\cos nx + c$$

$$\int \cos nx dx = \frac{1}{n}\operatorname{sen} nx + c$$

$$\int x \operatorname{sen} nx dx = -\frac{1}{n^2}\operatorname{sen} nx - \frac{x}{n}\cos nx + c$$

$$\int x \cos nx dx = \frac{1}{n^2}\cos nx + \frac{x}{n}\operatorname{sen} nx + c$$

$$\int x^2 \operatorname{sen} nx dx = \frac{2x}{n^2}\operatorname{sen} nx + \left(\frac{2}{n^3} - \frac{x^2}{n}\right)\cos nx + c$$

$$\int x^2 \cos nx dx = \frac{2x}{n^2}\cos nx + \left(\frac{x^2}{n} - \frac{2}{n^3}\right)\operatorname{sen} nx + c$$

$$\int \operatorname{sen} nx \cos nx dx = \frac{1}{2n}\operatorname{sen}^2 nx + c$$

$$\int e^{ax}\operatorname{sen} bx dx = \frac{e^{ax}(a\operatorname{sen} bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + c$$

$$\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx - b\operatorname{sen} bx)}{a^2+b^2} + c$$

$$\int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx dx = \frac{\operatorname{sen}(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\operatorname{sen}(m+n)x}{2(m+n)} + c$$

$$\int \operatorname{sen} mx \cos nx dx = -\frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} + c$$

$$\int \cos mx \cos nx dx = \frac{\operatorname{sen}(m-n)x}{2(m-n)} + \frac{\operatorname{sen}(m+n)x}{2(m+n)} + c$$

EJERCICIOS 8.1

1. De las siguientes funciones periódicas, hallar tres periodos que les correspondan:

a. $\cos x$ *c.* $\cos 2x$ *e.* $\operatorname{sen} \dfrac{x}{2}$

b. $\cot x$ *d.* $\operatorname{sen} 2x$ *f.* $\cos 3x$

Respuestas:

a. $2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$

b. *c.* *d.* $\pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$

e. $4\pi, 8\pi, 12\pi, \ldots$

f. $\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}, 2\pi, \ldots$

2. Encontrar el mínimo periodo de las siguientes funciones:

a. $\operatorname{sen} x$ *c.* $\tan x$ *e.* $\operatorname{sen} 2x$ *g.* $\operatorname{sen} 2\pi x$ *i.* $\operatorname{sen} 3\pi x$

b. $\cos x$ *d.* $\cot x$ *f.* $\cos 2x$ *h.* $\cos 2\pi x$ *j.* $\cos 4\pi x$

Respuestas:

a. *b.* 2π

c. *d.* *e.* *f.* π

g. *h.* 1

i. $\dfrac{2}{3}$

j. $\dfrac{1}{2}$

3. Graficar las siguientes funciones en el mismo sistema de coordenadas:

a. $\cos x, \cos x + \dfrac{1}{2}\cos 2x, \cos x + \dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{1}{3}\cos 3x$

b. $\operatorname{sen} x, \operatorname{sen} x + \dfrac{1}{3}\operatorname{sen} 3x, \operatorname{sen} x + \dfrac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + \dfrac{1}{5}\operatorname{sen} 5x$

Graficar las siguientes funciones:

4. $f(x) = \dfrac{x}{4}, -\pi < x < \pi, f(x+2\pi) = f(x)$

5. $f(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{2}, -\pi < x < \pi, f(x+2\pi) = f(x)$

6. $f(x) = e^{-x}, -\pi < x < \pi, f(x+2\pi) = f(x)$

7. $f(x) = |\operatorname{sen} x|, 0 < x < \pi, f(x+\pi) = f(x)$

8. $f(x) = \operatorname{senh} x, -\pi < x < \pi, f(x+2\pi) = f(x)$

9. $f(x) = \cosh x, 0 < x < \pi, f(x+\pi) = f(x)$

10. $f(x) = x^2, -\pi < x < \pi, f(x+2\pi) = f(x)$

11. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ x^2, & 0 < x < \pi \end{cases}$

12. $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sen} x, & 0<x<\pi\\ 0, & \pi<x<2\pi\end{cases}$

13. $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0<x<1\\ 2-x, & 1<x<2\end{cases}$

14. $f(x)=\begin{cases}\cos x, & 0<x<\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & \dfrac{\pi}{2}<x<\pi\end{cases}$

15. $f(x)=\begin{cases}e^x, & 0<x<1\\ e, & 1<x<2\end{cases}$

16. Demostrar que $h=af-bg$ donde a, b = constantes, tiene un periodo T si f y g tienen periodo T.

17. Probar que la función $f(x)=c$, donde c es una constante, es una función periódica con periodo T, para cualquier número positivo T.

Resolver las siguientes integrales **_Respuestas:_**

18. $\int_0^{3\pi/2}\cos nx dx$ $\quad\begin{cases}\dfrac{3\pi}{2} & n=0\\ 0 & n=2,4,6,8,10,\ldots\\ -\dfrac{1}{n} & n=1,5,9,13,\ldots\\ \dfrac{1}{n} & n=3,7,11,15,\ldots\end{cases}$

19. $\int_0^{\pi}\operatorname{sen} nx dx$ $\quad\begin{cases}0 & n=0,2,4,6,8,10,\ldots\\ \dfrac{2}{n} & n=1,3,5,7,9,\ldots\end{cases}$

20. $\int_0^{\pi}x\cos nx dx$ $\quad\begin{cases}\pi^2/2 & n=0\\ 0 & n=2,4,6,8,\ldots\\ -\dfrac{1}{n^2} & n=1,3,5,7,\ldots\end{cases}$

21. $\int_0^{\pi}x\operatorname{sen} nx dx$ $\quad\begin{cases}0 & n=0\\ \dfrac{\pi}{n} & n=1,3,5,\ldots\\ -\dfrac{\pi}{n} & n=2,4,6,\ldots\end{cases}$

22. $\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx dx$ $\quad \begin{cases} 0 & n=0 \\ \dfrac{2\pi}{n} & n=1,3,5,\ldots \\ -\dfrac{2\pi}{n} & n=2,4,6,\ldots \end{cases}$

23. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \operatorname{sen} nx dx$ $\quad \begin{cases} 0 & n=0 \\ \dfrac{2}{n^2} & n=1,5,\ldots \\ \dfrac{\pi}{n} & n=2,6,\ldots \\ -\dfrac{2}{n^2} & n=3,7,\ldots \\ -\dfrac{\pi}{n} & n=4,8,\ldots \end{cases}$

24. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \cos nx dx$ $\quad \begin{cases} 0 & n=0,2,4,6,8,\ldots \\ \dfrac{\pi}{n} & n=1,5,\ldots \\ -\dfrac{\pi}{n} & n=3,7,\ldots \end{cases}$

25. $\int_{0}^{\pi} x^2 \cos nx dx$ $\quad \begin{cases} \pi^3/2 & n=0 \\ -2\pi/n^2 & n=1,3,5,\ldots \\ 2\pi/n^2 & n=2,4,6,\ldots \end{cases}$

26. $\int_{0}^{\pi} x^2 \operatorname{sen} nx dx$ $\quad \begin{cases} 0 & n=0 \\ \dfrac{\pi^2}{n}-\dfrac{4}{n^3} & n=1,3,5,\ldots \\ -\dfrac{\pi^2}{n} & n=2,4,6,\ldots \end{cases}$

En los siguientes ejercicios elegir la opción correcta:

27. La función $\cos\dfrac{x}{2}$ tiene los tres periodos siguientes:

a. $2\pi, 4\pi, 6\pi$ *b.* $\dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}$

c. $\pi, 2\pi, \pi$ *d.* $4\pi, 8\pi, 12\pi$

28. El mínimo periodo de la función $\cos 3\pi x$ es:

a. 2/3 *b.* 2π *c.* π *d.* $\pi/3$

29. Elegir la gráfica que representa $f(x)=|\cos x|, f(x+\pi)=f(x)$

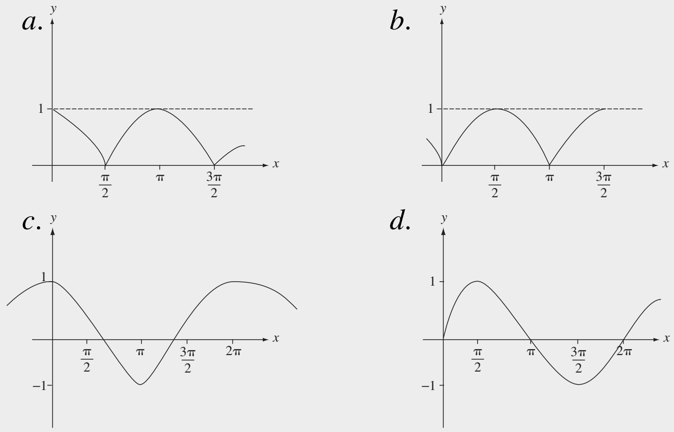


Figura 8-2.

30. La solución de la integral $\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx dx$ es:

a. $\begin{cases} \dfrac{\pi^2}{2} & n=0 \\ \dfrac{\pi}{n^2} & n=2, 4, 6, \ldots \\ -\dfrac{\pi}{n^2} & n=1, 3, 5, \ldots \end{cases}$ *b.* 0

c. $\begin{cases} 0 & n=0 \\ \dfrac{\pi}{n^2} & n=2, 4, 6, \ldots \\ -\dfrac{\pi}{n^2} & n=1, 3, 5, \ldots \end{cases}$ *d.* $\begin{cases} 0 & n=0 \\ \dfrac{\pi}{n} & n=1, 3, 5, \ldots \\ \dfrac{\pi}{n^2} & n=2, 4, 6, \ldots \end{cases}$

31. La solución de $\int_{0}^{\pi} e^x \cos nx dx$ es:

a. $\begin{cases} \dfrac{e^\pi-1}{n^2} & n=2, 4, 6, \ldots \\ -\dfrac{e^\pi-1}{n^2} & n=1, 3, 5, \ldots \end{cases}$ *b.* $\begin{cases} -\dfrac{1}{n^2} & n=2, 4, 6, \ldots \\ \dfrac{1}{n^2} & n=1, 3, 5, 7, \ldots \end{cases}$

c. $\begin{cases} \pi & n=0 \\ \dfrac{e^\pi-1}{n^2} & n=2, 4, 6, \ldots \\ -\dfrac{e^\pi-1}{n^2+1} & n=1, 3, 5, 7, \ldots \end{cases}$ *d.* $\begin{cases} \pi & n=0 \\ -\dfrac{1}{n^2+1} & n=2, 4, 6, \ldots \\ \dfrac{1}{n^2+1} & n=1, 3, 5, \ldots \end{cases}$

32. Completar la consecuencia lógica:
Si cada uno de los términos de una serie trigonométrica tiene periodo 2π, entonces,
a. Si la serie converge, su suma es función de la mitad del periodo, es decir, de π.
b. Si la serie converge, su suma es función del doble del periodo, es decir, de 4π.
c. Si la serie converge, su suma es función del periodo 2π.
d. Si la serie converge, su suma es función de la semisuma de los extremos del intervalo 2π, es decir, $\frac{2\pi-0}{2}=\pi$. O bien $\frac{4\pi-2}{2}=\pi$, etcétera.

Respuestas:
27. *d.* Se comprueba con la gráfica.
28. *a.*
29. *a.* La opción *b* representa $y=|\text{sen}\,x|$. La opción *c* es $y=\cos x$, y la *d* da la gráfica de $y=\text{sen}\,x$.
30. *b.* Porque $\frac{1}{n^2}\cos n\pi-\frac{1}{n^2}\cos n\pi=0$.
31. *c.* Porque tenemos $\frac{1}{n^2+1}\left(e^{\pi}\cos n\pi-1\right)$ para n = 1, 2, 3, …
32. *c.*

Gráficas de los ejercicios del 4 al 15:

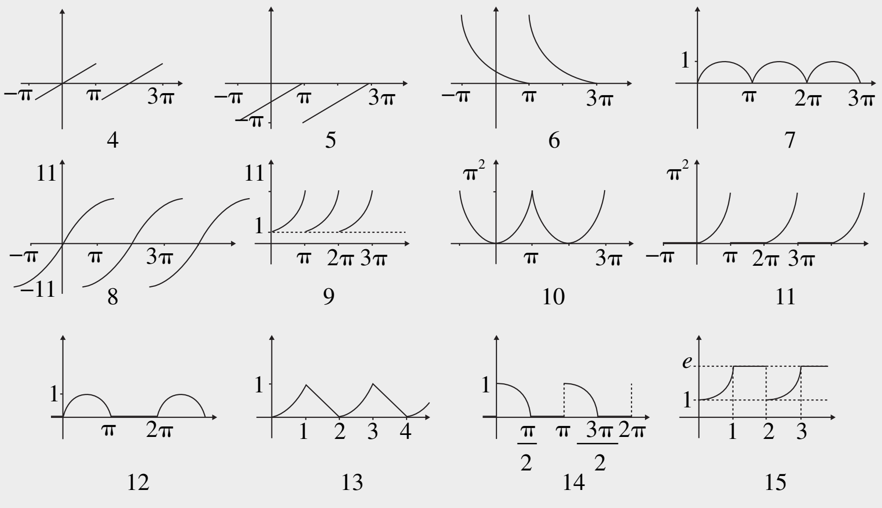


Figura 8-3.

Teorema 3

Las funciones $\cos\frac{n\pi x}{k}$ y $\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{k}$, $n=1, 2, 3, ..., k>0$ satisfacen las siguientes propiedades de *ortogonalidad* en el intervalo $-k \le x \le k$.

$$\int_{-k}^{k}\cos\frac{n\pi x}{k}\cos\frac{m\pi x}{k}\,dx=\begin{cases}0 \text{ si } n\neq m\\ k \text{ si } n=m\end{cases}$$

$$\int_{-k}^{k}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{k}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{k}\,dx=\begin{cases}0 \text{ si } n\neq m\\ k \text{ si } n=m\end{cases}$$

$$\int_{-k}^{k}\cos\frac{n\pi x}{k}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{k}\,dx=0,\ 0, \text{ para todas } n,\ m.$$

DEMOSTRACIÓN:

En la primera integral, sea $n=m$, entonces,

$$\int_{-k}^{k}\cos^2\frac{n\pi x}{k}\,dx=\int_{-k}^{k}\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{2n\pi x}{k}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[x+\frac{k}{2n\pi}\operatorname{sen}\frac{2n\pi x}{k}\right]\Bigg|_{-k}^{k}=\frac{1}{2}(2k)=k$$

Sea $n\neq m$. Usamos la identidad:

$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$$

$$\int_{-k}^{k}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{k}\cos\frac{m\pi x}{k}\,dx=$$

$$\int_{-k}^{k}\frac{1}{2}\left[\cos\frac{(n+m)\pi x}{k}+\cos\frac{(n-m)\pi x}{k}\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{k}{(n+m)\pi}\operatorname{sen}\frac{(n+m)\pi x}{k}+\frac{k}{(n-m)\pi}\operatorname{sen}\frac{(n-m)\pi x}{k}\right]\Bigg|_{-k}^{k}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2k}{(n+m)\pi}\operatorname{sen}(n+m)\pi+\frac{2k}{(n-m)\pi}\operatorname{sen}(n-m)\pi\right]=0$$

La demostración de la segunda integral es similar, usando las identidades siguientes:

Para $n=m\rightarrow\operatorname{sen}^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$.

Para $n\neq m\rightarrow\operatorname{sen} x\ \operatorname{sen} y=\dfrac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]$.

La demostración de la tercera integral es inmediata, por ser simétrica; de todas formas se va a desarrollar así:

Para $n = m$:

$$\int_{-k}^{k} \cos\frac{n\pi x}{k} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{k}\,dx = \frac{1}{2}\frac{k}{m\pi}\operatorname{sen}^2\frac{m\pi x}{k}\Big|_{-k}^{k} = 0$$

Para $n \neq m$ usamos: $\operatorname{sen} x \cos y = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x-y) + \operatorname{sen}(x+y)]$.

$$\int_{-k}^{k} \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}\frac{(m-n)\pi x}{k} + \operatorname{sen}\frac{(m+n)\pi x}{k}\right] dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{k}{(m-n)\pi}\cos\frac{(m-n)\pi x}{k} + \frac{k}{(m+n)\pi}\cos\frac{(m+n)\pi x}{k}\right]\Bigg|_{-k}^{k}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{k}{(m-n)\pi}\cos(m-n)\pi - \frac{k}{(m-n)\pi}\cos(m-n)\pi + \frac{k}{(m+n)\pi}\cos(m+n)\pi - \frac{k}{(m+n)\pi}\cos(m+n)\pi\right] = 0.$$

Fórmulas de Euler

Sea: $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$ una función periódica con periodo $T = 2\pi$. ¿Qué valores toman a_0, a_n, b_n para $n = 1, 2, 3, \ldots$? Calcularemos cada uno de ellos.

Obtención de a_0

Se integra la función desde $-\pi$ a π (su periodo):

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0 dx + \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \operatorname{sen} nx dx$$

para sustituir adecuadamente la sumatoria, añadimos: para $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_0 dx = a_0 x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 2a_0\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx dx = \frac{a_n}{n}\operatorname{sen} nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_n \operatorname{sen} nx dx = \frac{-b_n}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{-b_n}{n}(\cos n\pi - \cos n\pi) = 0$$

$$\rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2a_0\pi \qquad \therefore a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.$$

Obtención de $a_n \quad n=1,\ 2,\ 3\ ...$

Se multiplican los miembros de la función por $\cos nx$ y se integran de $-\pi$ a π

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \cos nx dx + \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos^2 nx dx$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi} b_n \text{sen } nx \cos nx dx, \quad n=1,\ 2,\ 3,\ ...$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_0 \cos nx dx = \frac{a_0}{n} \text{sen } nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos^2 nx dx = \frac{1}{2} a_n \int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos 2nx)dx$$

$$= \frac{a_n}{2}[x + \frac{1}{2n}\text{sen} 2nx]\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= a_n \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_n \text{sen } nx \cos nx dx = 0 \text{ (ver el teorema anterior)}$$

$$\rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx f(x)dx = a_n \pi$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad n=1,\ 2,\ 3,\ ...$$

Obtención de $b_n \quad n=1,\ 2,\ 3,\ ...$

Se multiplican ambos miembros por $\text{sen } nx$ y se integran de $-\pi$ a π

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\text{sen } nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_n \text{sen } nx dx + \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx \text{ sen } nx dx$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi} b_n \text{sen}^2 nx dx, \ n=1,\ 2,\ 3,\ ...$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_0 \text{sen } nx dx = -\frac{a_0}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx \text{ sen } nx dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_n \text{sen}^2 nx dx = \frac{1}{2} b_n \int_{-\pi}^{\pi} (1-\cos 2nx)dx$$

$$= \frac{b_n}{2}[x - \frac{1}{2n}\text{sen} 2nx]\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= b_n \pi$$

$$\rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\text{sen } nxdx = b_n\pi \therefore b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\text{sen } nxdx, n = 1,\ 2,\ 3,\ ...$$

Las fórmulas así definidas se llaman *fórmulas de Euler:*

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ ...$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\text{sen } nxdx, n = 1,\ 2,\ 3,\ ...$$

Definición 8.2

Serie de Fourier. La función:

$$f(x) = a_0 + a_1\cos x + b_1\text{sen } x + a_2\cos 2x + ...$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\text{sen } nx)$$

se llama *serie de Fourier* y los coeficientes obtenidos a partir de a_0, a_n, a_0, a_n y b_n (las fórmulas de Euler para $n = 1,\ 2,\ 3,\ ...$ se llaman *coeficientes de Fourier* de $f(x)$.

EJEMPLO 1

Hallar la serie de Fourier de la siguiente función periódica con periodo 2π y trazar la gráfica de las tres primeras sumas parciales.

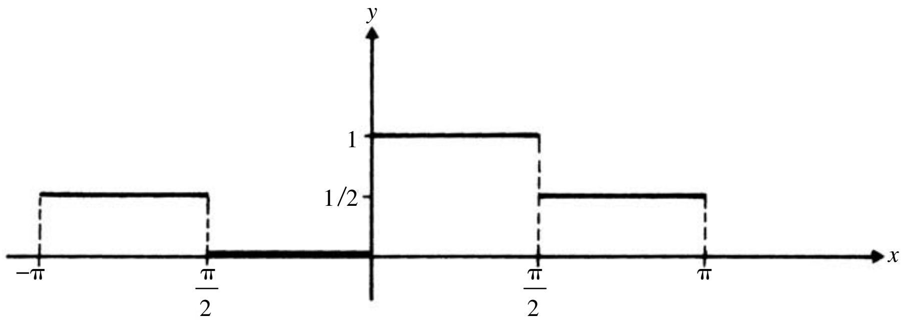


Figura 8-4.

Paso 1. Encontramos los coeficientes de Fourier, mediante las *fórmulas de Euler*.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\pi/2} \frac{1}{2}dx + \int_{-\pi/2}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi/2} dx + \int_{\pi/2}^{\pi}\frac{1}{2}dx\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x}{2}\Big|_{-\pi}^{-\pi/2} + x\Big|_0^{\pi/2} + \frac{x}{2}\Big|_{\pi/2}^{\pi} \right] = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore a_0 = \frac{1}{2}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\pi/2} \frac{1}{2}\cos nx dx + \int_{0}^{\pi/2} \cos nx dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{2}\cos nx dx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2n}\text{sen } nx\Big|_{-\pi}^{-\pi/2} + \frac{1}{n}\text{sen } nx\Big|_{0}^{\pi/2} + \frac{1}{2}\text{sen } nx\Big|_{\pi/2}^{\pi} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{2n}\text{sen}\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n}\text{sen}\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{2n}\text{sen}\frac{n\pi}{2} \right] = 0$$

$$\therefore a_n = 0.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\text{sen } nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\pi/2} \frac{1}{2}\text{sen } nx dx + \int_{0}^{\pi/2} \text{sen } nx dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{2}\text{sen } nx dx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{2n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{-\pi/2} - \frac{1}{n}\cos nx\Big|_{0}^{\pi/2} - \frac{1}{2n}\cos nx\Big|_{\pi/2}^{\pi} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{2n}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{2n}\cos n\pi - \frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\cos n\pi + \frac{1}{2n}\cos\frac{n\pi}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n} \right]$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left(1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{n\pi} & n = 1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots \\ \dfrac{2}{n\pi} & n = 2, 6, 10, \ldots \\ 0 & n = 4, 8, 12, \ldots \end{cases}$$

Paso 2. Sustituimos los *coeficientes de Fourier* en la serie:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen } nx$$

$$= a_0 + b_1\text{sen } x + b_2\text{sen } 2x + b_3\text{sen } 3x + \ldots$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\text{sen } x + \frac{2}{2\pi}\text{sen } 2x + \frac{1}{3\pi}\text{sen } 3x + 0 + \frac{1}{5\pi}\text{sen } 5x + \ldots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5x + \ldots \right).$$

Paso 3. Graficamos S_1, S_2 y S_3

$$s_1 = \frac{1}{2},\ \ s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{sen} x,\ \ s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{sen} x + \frac{1}{\pi}\operatorname{sen} 2x$$

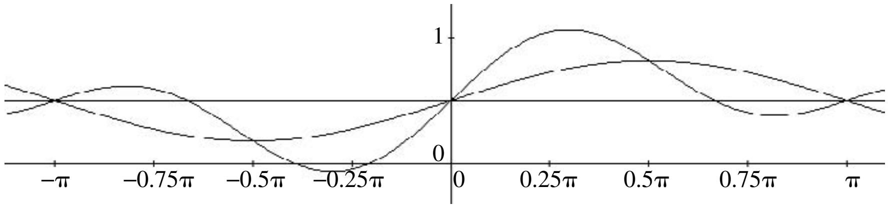


Figura 8-5.

x	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
s_2	$\frac{1}{2}$	0.28	0.2	0.3	$\frac{1}{2}$	0.72	0.8	0.72	$\frac{1}{2}$
s_3	$\frac{1}{2}$	0.6	0.2	0.02	$\frac{1}{2}$	1.04	0.8	0.4	$\frac{1}{2}$

Observamos que cada suma parcial se aproxima más a la función original y en el *infinito* coincide exactamente. Por ello, la serie (si es convergente) converge a $f(x)$.

EJEMPLO 2

Hallar la serie de Fourier de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^2}{2}, -\pi < x < \pi, T = 2\pi$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{2}\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{2}\cos nx dx, n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{2} \operatorname{sen} nx dx, n = 1,\ 2,\ 3,\ ...$$

$$a_0 = \frac{1}{4\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{12\pi}\left(\pi^3 - (-\pi)^3\right) = \frac{\pi^2}{6}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2x}{n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \left(\frac{x^2}{n} - \frac{2}{n^3}\right)\operatorname{sen} nx\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2\pi}{n^2}\cos n\pi + \frac{2\pi}{n^2}\cos n\pi\right] \text{ (vea página 433)}$$

$$= \frac{1}{n^2}\cos n\pi = \begin{cases} -\dfrac{2}{n^2} & n = 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ ... \\ \dfrac{2}{n^2} & n = 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ ... \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2x}{n^2}\operatorname{sen} nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \left(\frac{2}{n^3} - \frac{x^2}{n}\right)\cos n\pi\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\left(\frac{2}{n^3} - \frac{\pi^2}{n}\right)\cos n\pi - \left(\frac{2}{n^3} - \frac{\pi^2}{n}\right)\cos n\pi\right] = 0$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$= \frac{\pi^2}{6} + (-2)\cos x + \frac{2}{4}\cos 2x - \frac{2}{9}\cos 3x + ...$$

$$\therefore f(x) = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

EJEMPLO 3

Hallar la serie de Fourier correspondiente a la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < -\dfrac{\pi}{2} \text{ y } \dfrac{\pi}{2} < x < \pi \\ \cos x & -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

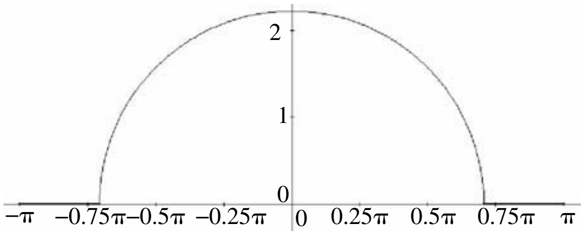


Figura 8-6.

$$T = 2\pi$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx;$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\text{sen } nxdx;$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\pi/2} 0dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos xdx + \int_{-\pi/2}^{\pi} 0dx\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\text{sen } x\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2\pi}[1-(-1)] = \frac{1}{\pi}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \cos nxdx$$

Como $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$

$$\rightarrow a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\cos(x-nx) + \cos(x+nx)]\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\cos(1-n)x + \cos(1+n)x]\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{1-n}\text{sen}\,(1-n)x + \frac{1}{1+n}\text{sen}\,(1+n)x\right]\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{1-n}\text{sen}\,(1-n)\frac{\pi}{2} + \frac{1}{1-n}\text{sen}\,(1-n)\frac{\pi}{2} + \frac{1}{1-n}\text{sen}\,(1+n)\frac{\pi}{2} + \frac{1}{1+n}\text{sen}\,(1+n)\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2}{1-n}\text{sen}\,(1-n)\frac{\pi}{2} + \frac{2}{1+n}\text{sen}\,(1+n)\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{1-n}\operatorname{sen}(1-n)\frac{\pi}{2}+\frac{1}{1+n}\operatorname{sen}(1+n)\frac{\pi}{2}\right],\ n\neq 1$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{1-n}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos n\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\, n\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{1+n}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos n\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\, n\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\cos n\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{1-n}+\frac{1}{1+n}\right)\right]$$

$$=\frac{-2}{\pi(n^2-1)}\cos n\frac{2}{\pi}=\begin{cases}\dfrac{+2}{\pi(n^2-1)} & n=2,\ 6,\ \ldots\\ 0 & n=3,\ \ldots\\ \dfrac{-2}{\pi(n^2-1)} & n=4,\ 8,\ \ldots\end{cases}$$

Para $n=1$ vemos:

$$a_1=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos 0x+\cos 2x)dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 2x)dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[x+\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x\right]\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

Ahora buscamos: $b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\operatorname{sen} nx dx$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{n-1}\cos(n-1)x-\frac{1}{n+1}\cos(n+1)x\right]\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}=0.$$

$$\to f(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\cos x+\frac{2}{3\pi}\cos 2x-\frac{2}{15\pi}\cos 4x+\frac{2}{35\pi}\cos 6x-\ldots$$

$$=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\cos x+\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{3}\cos 2x-\frac{1}{15}\cos 4x+\frac{1}{35}\cos 6x-\ldots\right).$$

EJEMPLO 4

Hallar la serie de Fourier de:

$$f(x)=x,\quad -\pi<x<\pi$$

y graficar las tres primeras sumas parciales.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{4\pi}\left(\pi^2 - (-\pi)^2\right) = 0.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx dx, n = 1,\ 2,\ 3,\ ...$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\cos nx + \frac{x}{n}\text{sen } nx\right]\bigg|_{-\pi}^{\pi} \quad \text{(vea página 433)}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\cos n\pi - \frac{1}{n^2}\cos n\pi + \frac{\pi}{n}\text{sen } n\pi - \frac{\pi}{n}\text{sen } n\pi\right] = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\text{sen } nx dx, \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ ...$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\text{sen } nx - \frac{x}{n}\cos nx\right]\bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n}\cos n\pi - \frac{\pi}{n}\cos n\pi\right]$$

$$= -\frac{2}{n}\cos n\pi = \begin{cases} \dfrac{2}{n} & n = 1,\ 3,\ 5,\ ... \\ -\dfrac{2}{n} & n = 2,\ 4,\ 6,\ ... \end{cases}$$

$$\therefore f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen } nx$$

$$= 2\left(\text{sen } x - \frac{1}{2}(\text{sen } 2x) + \frac{1}{3}(\text{sen } 3x) - \frac{1}{4}(\text{sen } 4x) + \ ...\right).$$

$$= 2\left(\text{sen } x - \frac{1}{2}\text{sen } 2x + \frac{1}{3}\text{sen } 3x - \frac{1}{4}\text{sen } 4x + \ ...\right).$$

Sean: $s_1 = 2\text{sen } x$

$$s_2 = 2\text{sen } x - \text{sen } 2x$$

$$s_3 = 2\text{sen } x - \text{sen } 2x + \frac{2}{3}\text{sen } 3x, \text{ entonces,}$$

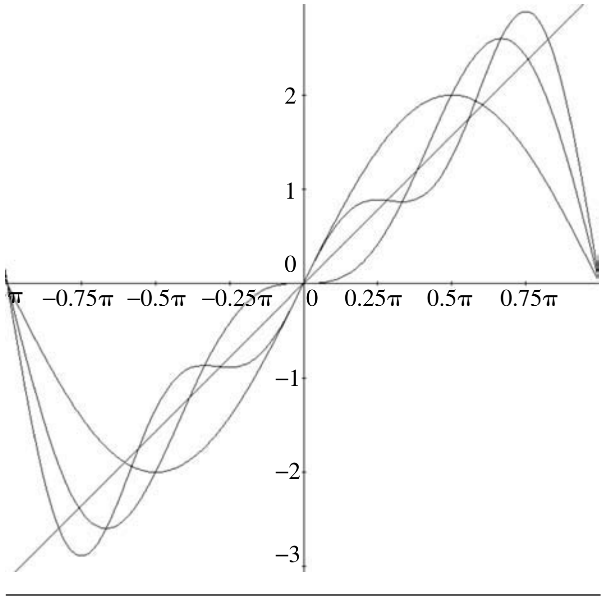
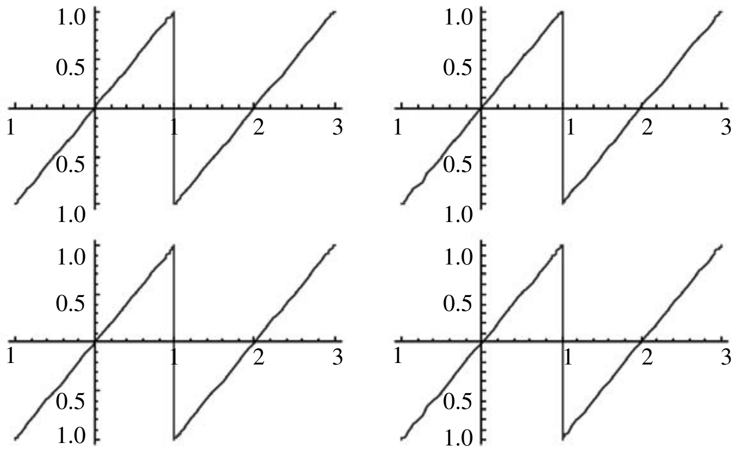


Figura 8-7.

x	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
s_1	0	–1.4	–2	–1.4	–1	0	1	1.4	2	1.4	0
s_2	0	–2.4	–2	–0.4	–0.134	0	0.134	0.4	2	2.4	0
s_3	0	–3	–1.33	–0.88	–0.8	0	0.81	1.83	1.33	2.87	0

Esta misma función en el intervalo (–1, 1), `Mathematica` la aproxima y grafica como:

```
<<Calculus `FourierTransform`
Clear[f]
f[x_]=x;
fstable=Table[FourierTrigSeries[f[x],{x,-
1,1},n],{n,2,8,2}];
   TableForm[fstable]
                  fstable
g[x_]:=x/;-1≤x≤1
g[x_]:=g[x-2]/;x>1
plotfourier[i_]:=Plot[{fstable[[i]],g[x]},
   {x,-1,3},
   PlotStyle→{GrayLevel[0],GrayLevel[.2]},
   DisplayFunction→Identity];
toshow=Partition[Table[plotfourier[i],
    {i,1,4}],2];
Show[GraphicsArray[toshow]]
```



Convergencia de las series de Fourier

Teorema 4

Sea f una función periódica, con periodo 2π y sean $f(x)$ y $f'(x)$ seccionalmente continuas en el intervalo $(-\pi, \pi)$

Entonces, la serie de *Fourier* converge a:

a. $f(x)$ si x es un punto de continuidad.

b. $\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\right)$ si x es un punto de discontinuidad.

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que $f(x)$ tiene primera y segunda derivadas continuas.

$$\text{Tomando } a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

Integrando:

$$a_n = \cancelto{0}{\frac{f(x)\operatorname{sen} nx}{n\pi}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\operatorname{sen} nx dx$$

Integrando de nuevo:

$$a_n = \frac{f'(x)\cos nx}{n^2\pi}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos nx dx$$

El primer término se anula, gracias a la periodicidad de $f'(x)$. Como $f''(x)$ es continua en el intervalo de integración, tenemos: $|f''(x)| < M$ donde M es una constante apropiada.

Además, $|\cos nx| \leq 1$

$$\to a_n = \frac{1}{n^2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos nx dx\right| < \frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx = \frac{2M}{n^2}, \text{ para toda } n$$

De la misma manera: $|b_n| < \dfrac{2M}{n^2}$

Podemos concluir que el valor absoluto de cada término de la *serie de Fourier* correspondiente a $f(x)$ es a lo sumo igual al correspondiente término de la serie:

$$|a_0| + 2M\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\,...\right) + 2M\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\,...\right)$$

$$= |a_0| + 4M\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\,...\right)$$

que es convergente. Por lo tanto, la *serie de Fourier* converge.

EJEMPLO 1

Vimos en el ejemplo 1 que la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & -\pi < x < -\dfrac{\pi}{2} \\ 0 & -\dfrac{\pi}{2} < x < 0 \\ 1 & 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

convergía a $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\left(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \dfrac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + \,...\right)$, siendo x un punto de continuidad.

Pero, ¿qué sucede en $x = -\dfrac{\pi}{2}, x = 0$ y $x = \dfrac{\pi}{2}$?

Veamos para $x = \dfrac{\pi}{2}$.

$$\lim_{x\to -\pi/2^+} 0 = 0 \text{ y } \lim_{x\to -\pi/2^-} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \to \frac{0+1/2}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \text{ en } x = -\frac{\pi}{2}, \text{ converge a } \frac{1}{4}$$

Para $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} 1 = 1 \text{ y } \lim_{x\to 0^-} 0 = 0 \to \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ en $x = 0$, converge a $\dfrac{1}{2}$

Para $x = \dfrac{\pi}{2}$:

$$\lim_{x \to \pi/2^{+}} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ y } \lim_{x \to \pi/2^{-}} 1 = 1 \to \frac{1/2 + 1}{2} = \frac{3}{4}$$

$\therefore$ en $x = \dfrac{\pi}{2}$, converge a $\dfrac{3}{4}$.

EJEMPLO 2

La función del ejemplo 2: $f(x) = \dfrac{x^2}{2}, -\pi < x < \pi$ converge en todos los puntos y su suma es igual a:

$$\frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx \text{ donde } |\cos nx| \leq 1$$

Por el teorema anterior y tomando $x = \pi$:

$$\left| \frac{\pi^2}{6} + 2\left(-\frac{\cos \pi}{1} + \frac{\cos 2\pi}{2^2} - \frac{\cos 3\pi}{3^2} + \frac{\cos 4\pi}{4^2} - \frac{\cos 5\pi}{5^2} + \ldots \right) \right|$$

$$\leq \frac{\pi^2}{6} + 2\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots \right)$$

entonces,

$$\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{6} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{3\pi^2 - \pi^2}{6} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{\pi^2}{3} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\therefore \ \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

donde queda probada la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

EJEMPLO 3

La función del ejemplo 3 converge en todos los puntos y su suma es igual a:

$$\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\cos x+\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{3}\cos 2x-\frac{1}{15}\cos 4x+\frac{1}{35}\cos 6x+\ ...\right)$$

EJEMPLO 4

En el ejemplo 4, la función $f(x)=x, -\pi<x<\pi$ converge a:

$$2\left(\operatorname{sen} x-\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x+\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x-\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x+\ ...\right)$$

para x como punto de continuidad.
En los puntos de discontinuidad, π, 3π, 5π, ..., etc., tenemos:
Para $x=\pi$:

$$\lim_{x\to\pi^+}(-\pi)=-\pi \ \text{ y } \ \lim_{x\to\pi^-}(\pi)=\pi\to\frac{-\pi+\pi}{2}=0$$

En dichos puntos la función converge a *cero.*
Tomemos en la serie $x=\dfrac{\pi}{2}$:

$$\to x=2\left(1-0-\frac{1}{3}-0+\frac{1}{5}-0-\frac{1}{7}+\ ...\right)$$

$$\frac{\pi}{2}=2\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ ...\right)$$

$$\therefore \frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1},$$

en donde se vuelve a demostrar la convergencia de una serie conocida.

EJEMPLO 5

Usando el desarrollo de *series de Fourier* de la función $f(x)=x^2$, calcular la suma de la serie

$$\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ ...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

$$f(x)=x^2, -\pi<x<\pi$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left.\frac{2x}{n^2}\cos nx\right|_{-\pi}^{\pi} + \left.\cancelto{0}{\left(\frac{x^2}{n} - \frac{2}{n^3}\right)\operatorname{sen} nx}\right|_{-\pi}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{4}{n^2}\cos n\pi = \begin{cases} -\dfrac{4}{n^2} & n = 1,\ 3,\ 5,\ ... \\ \dfrac{4}{n^2} & n = 2,\ 4,\ 6,\ ... \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \operatorname{sen} nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left.\frac{2x}{n^2}\operatorname{sen} nx\right|_{-\pi}^{\pi} + \left.\left(\frac{2}{n^3} - \frac{x^2}{n}\right)\cos nx\right|_{-\pi}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{2}{n^3} - \frac{\pi^2}{n}\right)\cos n\pi - \left(\frac{2}{n^3} - \frac{(-\pi)^2}{n}\right)\cos n\pi\right] = 0$$

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{9}\cos 3x - \frac{1}{16}\cos 4x + ...\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx.$$

Tomemos $x = 0 \rightarrow x^2 = \dfrac{\pi^2}{3} - 4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

$$0 = \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

EJEMPLO 6

Igualmente el lector puede encontrar:

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ...$$

usando: $f(x)=|x|, -1<x<1$

o bien:

llamando $s=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\ldots$

y $\quad s_1=1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\ldots$

Tenemos: $s=s_1+\frac{1}{25}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+\ldots=s_1+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots\right)$

$$=s_1+\frac{1}{4}s$$

Por tanto, $s_1=s-\frac{1}{4}s=\frac{3}{4}s$

En el ejemplo 2 vimos que: $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$

$$\rightarrow s_1=\frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6}$$

$$s_1=\frac{\pi^2}{8}$$

$$\therefore \frac{\pi^2}{8}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots$$

EJERCICIOS 8.2

Hallar la *serie de Fourier* de las siguientes funciones:

1. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0\\ 2, & 0<x<\pi\end{cases}$

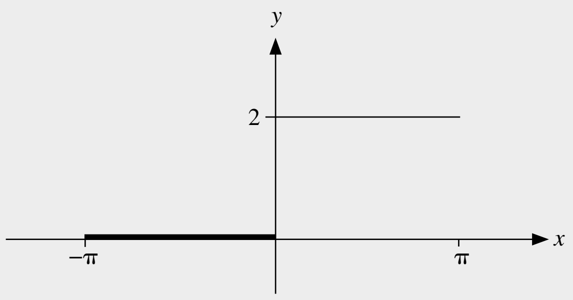


Figura 8-8.

Respuesta: $f(x)=1+\frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen}x+\frac{1}{3}\operatorname{sen}3x+\frac{1}{5}\operatorname{sen}5x+\ldots\right).$

2.

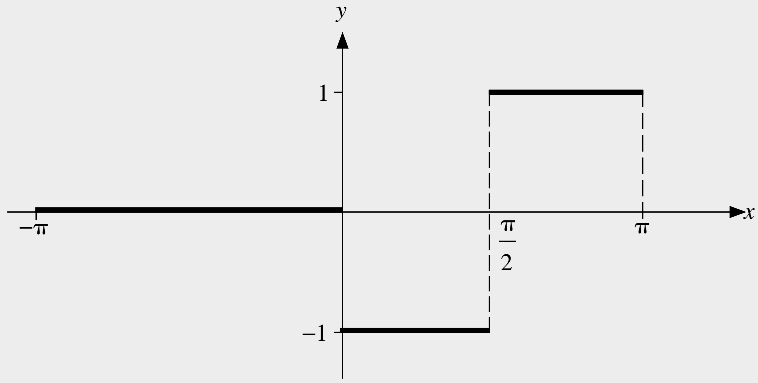


Figura 8-9.

Respuesta: $f(x) = -\frac{2}{\pi}\left(\cos x + \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3}\cos 3x - \frac{1}{5}\cos 5x - \ldots\right).$

3.

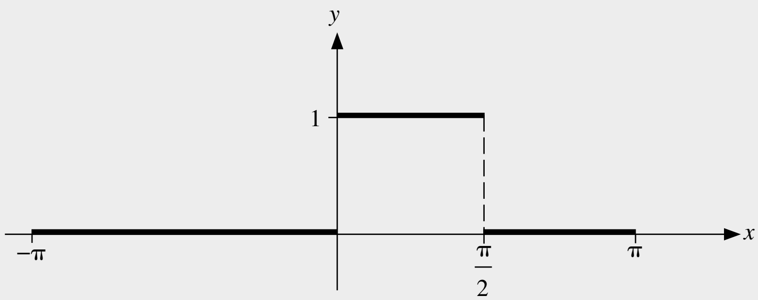


Figura 8-10.

Respuesta: $f(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}\left(\cos x + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{3}\cos 3x + \ldots\right).$

4.

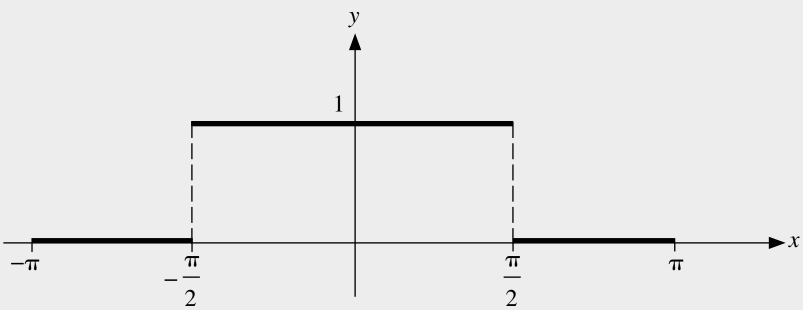


Figura 8-11.

Respuesta: $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{7}\cos 7x + \ldots\right).$

5.

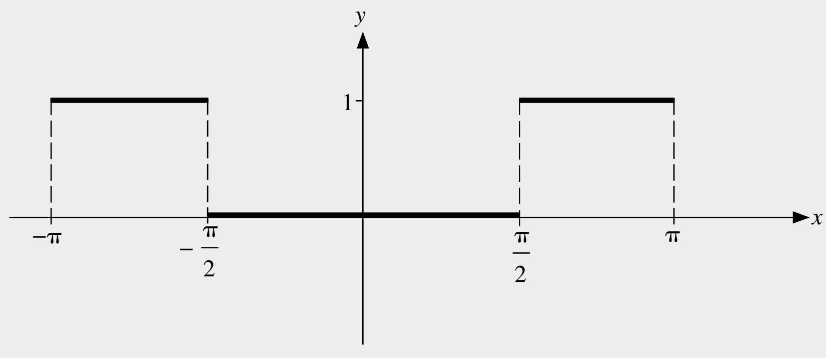


Figura 8-12.

Respuesta: $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(-\cos x+\frac{1}{3}\cos 3x-\frac{1}{5}\cos 5x+\frac{1}{7}\cos 7x-\ldots\right).$

6.

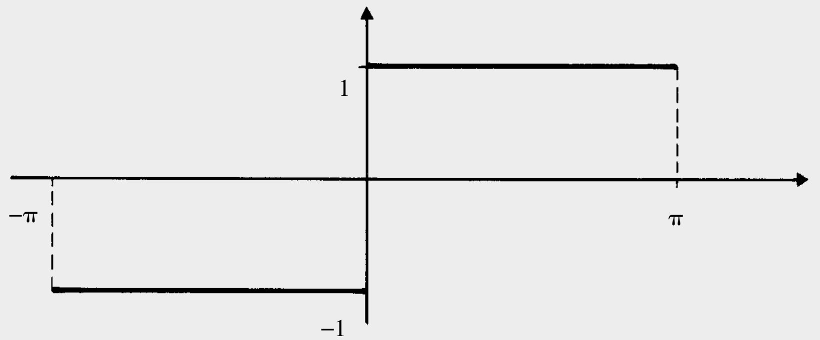


Figura 8-13.

Respuesta: $f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen} x+\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x+\frac{1}{5}\operatorname{sen} 5x+\ldots\right).$

7. $f(x)=x^2, -\pi<x<\pi$

Respuesta: $f(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\left(-\cos x+\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{9}\cos 3x+\ldots\right).$

8. $f(x)=\begin{cases} x & -\pi<x<0 \\ 1 & 0<x<\pi \end{cases}$

Respuesta:
$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{9}\cos 3x+\frac{1}{25}\cos 5x+\ldots\right)$$
$$+\frac{2+\pi}{\pi}\left(\operatorname{sen} x+\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x+\frac{1}{5}\operatorname{sen} 5x+\ldots\right)$$
$$+\left(-\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x-\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x-\frac{1}{6}\operatorname{sen} 6x-\ldots\right)$$

9. $f(x)=\begin{cases}1 & -\pi<x<0\\ -x & 0<x<\pi\end{cases}$

Respuesta: $f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{\pi}\left(\cos x+\dfrac{1}{9}\cos 3x+\dfrac{1}{25}\cos 5x+\ldots\right)$

$$+\left(-\frac{2-\pi}{\pi}\right)\left(\operatorname{sen} x+\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x+\frac{1}{5}\operatorname{sen} 5x+\ldots\right)$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x+\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x+\frac{1}{6}\operatorname{sen} 6x+\ldots$$

10. $f(x)=\begin{cases}-x & -\pi<x<0\\ 0 & 0<x<\pi\end{cases}$

Respuesta: $f(x)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{2}{\pi}\left(\cos x+\dfrac{1}{9}\cos 3x+\dfrac{1}{25}\cos 5x+\ldots\right)$

$$+\left(-\operatorname{sen} x+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x-\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x+\ldots\right)$$

11. $f(x)=\begin{cases}1 & -\pi<x<0\\ -2 & 0<x<\pi\end{cases}$

Respuesta: $f(x)=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{6}{\pi}\left(\operatorname{sen} x+\dfrac{1}{3}\operatorname{sen} 3x+\dfrac{1}{5}\operatorname{sen} 5x+\ldots\right)$

12. $f(x)=\begin{cases}0 & -\pi<x<0\\ \operatorname{sen} 2x & 0<x<\pi\end{cases}$

Respuesta: $f(x)=-\dfrac{4}{\pi}\left(-\dfrac{1}{3}\cos x+\dfrac{1}{5}\cos 3x+\dfrac{1}{21}\cos 5x+\dfrac{1}{45}\cos 7x+\ldots\right)$

13. $f(x)=\begin{cases}0 & -\pi<x<0\\ \operatorname{sen} x & 0<x<\pi\end{cases}$

Respuesta: $f(x)=\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{1}{2}\operatorname{sen} x-\dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{1}{3}\cos 2x+\dfrac{1}{15}\cos 4x+\dfrac{1}{35}\cos 6x+\ldots\right)$

14. $f(x)=\begin{cases}0 & -\pi<x<0\\ \cos 2x & 0<x<\pi\end{cases}$

Respuesta: $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\left(-\dfrac{1}{3}\operatorname{sen} x+\dfrac{3}{5}\operatorname{sen} 3x+\dfrac{5}{21}\operatorname{sen} 5x+\ldots\right)$

15. $f(x)=\cos 2x, -\pi<x<\pi$

Respuesta: $f(x)=\cos 2x$

16. $f(x)=\cos 2x, 0<x<\pi$

Respuesta: $f(x)=\frac{4}{\pi}\left(-\frac{1}{3}\operatorname{sen} x+\frac{3}{5}\operatorname{sen} 3x+\frac{5}{21}\operatorname{sen} 5x+\frac{7}{45}\operatorname{sen} 7x+\ldots\right)$

Sugerencia: duplicar los coeficientes de Fourier.

17. $f(x)=\cos\frac{x}{2}, -\pi<x<\pi$

Respuesta: $f(x)=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{3}\cos x-\frac{1}{15}\cos 2x+\frac{1}{35}\cos 3x-\frac{1}{63}\cos 4x+\ldots\right)$

18. $f(x)=\operatorname{sen}^2 x, -\pi<x<\pi$

Respuesta: $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$

19. $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<\pi\\ -1 & -\pi<x<0\end{cases}$

Respuesta: $f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen} x+\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x+\frac{1}{5}\operatorname{sen} 5x+\frac{1}{7}\operatorname{sen} 7x+\ldots\right)$

20. $f(x)=x, 0<x<2\pi$

Respuesta: $f(x)=\pi-2\left(\operatorname{sen} x+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x+\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x+\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x+\ldots\right)$

21. $f(x)=|x|, -\pi<x<\pi$

Respuesta: $f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{9}\cos 3x+\frac{1}{25}\cos 5x+\frac{1}{49}\cos 7x+\ldots\right)$

22. $f(x)=|\operatorname{sen} x|, -\pi<x<\pi$

Respuesta: $f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{3}\cos 2x+\frac{1}{15}\cos 4x+\frac{1}{35}\cos 6x+\ldots\right)$

23. $f(x)=\begin{cases}\cos x & 0<x<\pi\\ -\cos x & -\pi<x<0\end{cases}$

Respuesta: $f(x)=\frac{8}{\pi}\left(\frac{1}{3}\operatorname{sen} 2x+\frac{2}{15}\operatorname{sen} 4x+\frac{3}{35}\operatorname{sen} 6x+\ldots\right)$

24. $f(x)=\begin{cases}-x & -\pi<x<0\\ x & 0<x<\pi\end{cases}$

Respuesta: ver ejercicio 21.

25. $f(x)=\cos x, 0<x<\pi$

Respuesta: $f(x)=\frac{8}{\pi}\left(\frac{1}{3}\operatorname{sen} 2x+\frac{2}{15}\operatorname{sen} 4x+\frac{3}{35}\operatorname{sen} 6x+\ldots\right)$

En los siguientes ejercicios elegir la opción correcta:

26. La serie de Fourier de la función

$$f(x)=\begin{cases}1 & -\pi<x<0\\ -1 & 0<x<\pi\end{cases}$$

Está dada por:

a. $-\frac{8}{\pi}\left(\operatorname{sen}x+\frac{1}{3}\operatorname{sen}3x+\frac{1}{5}\operatorname{sen}5x+\ldots\right)$

b. $\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{5}\cos 5x+\ldots\right)$

c. $-\frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen}x+\frac{1}{3}\operatorname{sen}3x+\frac{1}{5}\operatorname{sen}5x+\ldots\right)$

d. $\frac{8}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{5}\cos 5x+\ldots\right)$

27. Los coeficientes de la serie de Fourier correspondientes a la función:

$$f(x)=\begin{cases}0 & -\pi<x<0\\ x & 0<x<\pi\end{cases}$$

a. $a_0=\frac{\pi}{4},\ a_n=0,\ b_n=\frac{1}{n},\ n=1,3,5,\ldots$

b. $a_0=\frac{\pi}{4},\ a_n=\frac{-2}{\pi n^2},\ n=1,3,5,\ldots,\ b_n=0$

c. $a_0=\frac{\pi}{4},\ a_n=\frac{-2}{\pi n^2},\ n=1,3,5,\ldots,\ b_n=\begin{cases}1/n & n=1,3,5,\ldots\\ -1/n & n=2,4,6,\ldots\end{cases}$

d. $a_0=\frac{\pi}{2},\ a_n=0,\ b_n=-\frac{1}{n},\ n=2,4,6,\ldots$

28. Dada la función $f(x)=2\cos^2 x,\ -\pi<x<\pi$, sólo una de las opciones es totalmente verdadera:

a. $a_0=1,\ a_n=n,\ n=2,4,6,\ldots,\ f(x)=1+\cos 2x$

b. $a_0=0,\ a_2=0,\ f(x)=1+\frac{2}{\pi}\left(\operatorname{sen}x+\frac{1}{3}\operatorname{sen}3x+\ldots\right)$

c. $b_n=0,\ a_0=1,\ f(x)=1+\frac{2}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3}\cos 3x+\ldots\right)$

d. $a_2=1,\ a_n=0,\ f(x)=1+\cos 2x$

29. La serie de Fourier de la función

$f(x) = \operatorname{sen} 2x,\ 0 < x < \pi$ está dada por:

a. $\frac{4}{\pi}\left(-\frac{1}{3}\operatorname{sen} x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{21}\operatorname{sen} 5x + \ldots\right)$

b. $-\frac{8}{\pi}\left(-\frac{1}{3}\cos x + \frac{1}{5}\cos 3x + \frac{1}{21}\cos 5x + \ldots\right)$

c. $-\frac{4}{\pi}\left(-\frac{1}{3}\cos x + \frac{1}{5}\cos 3x + \frac{1}{21}\cos 5x + \ldots\right)$

d. $\frac{8}{\pi}\left(\operatorname{sen} x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5x + \ldots\right)$

30. Los coeficientes de la serie de Fourier de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, $0 < x < \pi$, son:

a. $a_0 = \frac{2}{\pi},\ a_n = \frac{-4}{\pi(n^2-1)},\ n = 2, 4, 6, \ldots,\ b_n = 0$

b. $a_0 = \frac{\pi}{2},\ a_n = 0,\ b_n = \frac{-2}{\pi(n^2-1)},\ n = 2, 4, 6, \ldots,$

c. $a_0 = \frac{1}{\pi},\ a_n = \frac{-2}{\pi(n^2-1)},\ n = 2, 4, 6, \ldots,\ b_n = 0$

d. $a_0 = \frac{1}{\pi},\ a_n = 0,\ b_n = \frac{-4}{\pi(n^2-1)},\ n = 1, 3, 5, \ldots,$

Respuestas:

26. *c*. Porque $a_0 = 0,\ a_n = 0,\ b_n = \frac{-4}{n\pi},\ n = 1, 3, 5, 7, \ldots$

27. *c*.

28. *d*. Porque $a_n = b_n = 0$ y $a_0 = 1 = a_2$. Entonces, $f(x) = 1 + \cos 2x$

29. *b*. Porque $a_0 = b_n = 0,\ a_n = \frac{-8}{\pi(n^2-4)},\ n = 1, 3, 5, 7, \ldots$

30. *a*.

Definición 8.3

Función par.

$f(x)$ es función *par* en el intervalo $[a, b] \leftrightarrow$ para toda x en el intervalo:

$$f(-x) = f(x).$$

EJEMPLO 1

$f(x)=\cos x,\ -\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$

$f(-x)=\cos(-x)=\cos x=f(x)$

$\therefore$ la función $\cos x$ es función *par*.

EJEMPLO 2

$f(x)=x^2,\ -1\leq x\leq 1$

$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$

$\therefore$ la función x^2 es *par*.

Definición 8.4

Función impar.

$f(x)$ es función *impar* en el intervalo $[a,b]\leftrightarrow$ si para toda x en el intervalo:

$$f(-x)=-f(x).$$

EJEMPLO 1

$f(x)=\operatorname{sen} x,\ -\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$

$f(-x)=\operatorname{sen}(-x)=-\operatorname{sen} x=-f(x)$

$\therefore$ la función sen x es función *impar*.

EJEMPLO 2

$f(x)=x^3-x.$

$f(-x)=(-x)^3-(-x)=-x^3+x=-\left(x^3-x\right)=-f(x)$

$\therefore$ la función x^3-x es función *impar*.

Hay funciones que no son *pares* ni *impares* (el hecho de que una función no sea *par*, no implica que sea *impar*). Una función *par* es simétrica respecto al eje *y*, y una función *impar* es simétrica respecto al origen.

EJEMPLO 3

$f(x)=x^2+x.$

$f(-x)=(-x)^2+(-x)=x^2-x\neq-f(x)$

$\therefore$ la función x^2+x no es par ni tampoco impar.

Teorema 5

La *suma* de funciones *pares* es una función *par*.
La *suma* de funciones *impares* es una función *impar*.

DEMOSTRACIÓN: se deja al lector.

Teorema 6

$f(x)$ función *par* y $g(x)$ función *par*.
$\rightarrow f(x)g(x)$ es función *par*.

DEMOSTRACIÓN:

Sea: $h(x) = f(x)g(x)$

Tomemos: $h(-x) = f(-x)g(-x)$

$= f(x)g(x)$, porque ambas son *pares*

$= h(x)$

$\therefore h(-x) = h(x)$

Teorema 7

$f(x)$ función *impar* $g(x)$ función *impar*.
$\rightarrow f(x)g(x)$ es función *par*.

DEMOSTRACIÓN:

Sea $h(x) = f(x)g(x)$

Tomemos: $h(-x) = f(-x)g(-x)$

$= [-f(x)][-g(x)]$, porque son impares.

$= f(x)g(x)$, por la ley de los signos.

$= h(x)$

$\therefore h(-x) = h(x)$

Teorema 8

$f(x)$ función *par* y $g(x)$ función *impar*
$\rightarrow f(x)g(x)$ es función *impar*.

DEMOSTRACIÓN:

Sea: $h(x) = f(x)g(x)$

Tomemos: $h(-x) = f(-x)g(-x)$

$= f(x)[-g(x)]$

$= -f(x)g(x)$

$= -h(x)$

$\therefore h(-x) = -h(x)$

EJEMPLO 4

Representar la siguiente función como la suma de una función *par* y de una función *impar*.

$$f(x)=\frac{x}{1-x}$$

$$\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1+x}{1+x}=\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^2}$$

Sean: $f_1(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$ y $f_2(x)=\dfrac{x^2}{1-x^2}$

$$f_1(-x)=-\frac{x}{1-x^2}=-f_1(x) \text{ es } \textit{impar,}$$

$$f_2(-x)=\frac{(-x)^2}{1-x^2}=f_2(x) \text{ es } \textit{par.}$$

NOTA: Para una función *par*, se cumple que:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

Para una función *impar* se cumple que:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$$

EJERCICIOS 8.3

En los siguientes ejercicios, encontrar las funciones que son pares, las que son impares y las que no son ni una cosa ni otra.

	Respuestas:
1. $f(x)=x^3-x^5$	*Impar*.
2. $f(x)=x^4-x^2$	*Par*.
3. $f(x)=x^n, n=1,\ 2,\ 3$	Si $n=2k$, *par*. Si $n=2k+1$, *impar*.
4. $f(x)=\lvert x\rvert$	*Par*.
5. $f(x)=x\operatorname{sen}x$	*Par*.
6. $f(x)=x^2\operatorname{sen}x$	*Impar*.
7. $f(x)=x^n\operatorname{sen}x, n=1,\ 2,\ 3,\ ...$	Si *n par,* $f(x)$ es *impar*. Si *n impar,* $f(x)$ es *par*.
8. $f(x)=x^n\cos x, n=1,\ 2,\ 3,\ ...$	Si *n par,* $f(x)$ es *par*. Si *n impar,* $f(x)$ es *impar*.
9. $f(x)=x-x^4$	Ni *par,* ni *impar*.
10. $f(x)=e^x$	Ni *par,* ni *impar*.
11. $f(x)=\ln x$	Ni *par,* ni *impar*.

12. $f(x) = \text{sen}^2 x$ *Par*.

13. $f(x) = \cos^2 x$ *Par*.

14. $f(x) = x\,|\,x\,|$ *Impar*.

15. $f(x) = |\cos x|$ *Par*.

16. $f(x) = \text{senh}\, x$ *Impar*.

17. $f(x) = \cosh x$ *Par*.

18. $f(x) = \begin{cases} -3, & -1 < x < 0 \\ 3, & 0 < x < 1 \end{cases}$ *Impar*.

Suponiendo que las siguientes funciones son periódicas, con periodo 2π; hallar si son *pares* o *impares* o ninguna de las dos cosas.

Respuestas:

19. $f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}$ *Par*.

20. $f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x < 0 \\ 0, & 0 < x < \pi \end{cases}$ Ni *par,* ni *impar*.

21. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}$ Ni *par,* ni *impar*.

22. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ x, & \pi/2 < x < 3\pi/2 \end{cases}$ *Impar*.

23. $f(x) = \begin{cases} x, & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < x < 3\pi/2 \end{cases}$ *Impar*.

Representar las siguientes funciones como la suma de una función par y una función impar.

24. $\dfrac{1}{1-x}$ $\dfrac{1}{1-x^2} + \dfrac{x}{1-x^2}$

25. $\dfrac{1+x}{1-x}$ $\dfrac{1+x^2}{1-x^2} + \dfrac{2x}{1-x^2}$

26. $x^2(10+x)$ $10x^2 + x^3$

27. $\sqrt[3]{x}\,(x+x^2)$ $x^{4/3} + x^{7/3}$

28. e^x $\cosh x + \text{senh}\, x$

29. Si $f(x)$ es *par*, probar que $|f(x)|$ es *par*.

30. Si $f(x)$ es *impar*, probar que $|f(x)|$ es *impar*.

En los siguientes ejercicios, elegir la opción que da la respuesta exacta:

31. Dada la función $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases}$ con periodo 2π, diremos:

a. Es función *impar* porque $f(-x) = -f(x)$

b. Es función *par* porque $f(-x) = f(x)$

c. Es función *impar* porque $f(-x) = f(x)$

d. Es función *par* porque $f(-x) = -f(x)$

32. Dada la función $f(x)=\begin{cases}-x^2, & -\pi<x<0\\ x^2, & 0<x<\pi\end{cases}$

a. Es función *par* porque es simétrica al eje *y*
b. Es función *impar* porque $f(-x)=-f(x)$
c. Es función *par* porque $f(-x)=f(x)$
d. Es función *impar* porque el intervalo de $-\pi$ a 0 es equivalente al intervalo π a $\frac{3\pi}{2}$

33. Dada la función $f(x)=6x-x^2$, diremos:

a. Es función *par* porque $f(-x)=f(x)$
b. Es función *impar* porque $f(-x)=f(x)$
c. No es función *par*, ni es función *impar*.
d. Es función *impar* porque es simétrica respecto al *origen*.

34. Dada la función $f(x)=e^{|x|}$, $-\pi<x<\pi$ con periodo 2π, diremos:

a. No es función *par* ni función *impar*.
b. Es función *impar* porque $f(-x)=-f(x)$
c. Es función *impar* porque $f(-x)=f(x)$
d. Es función *par* porque es simétrica respecto al eje *y*.

35. Dada la función $f(x)=x$, $0<x<2\pi$ con periodo 2π, diremos:

a. Es función *par* porque $f(-x)=f(x)$ en el intervalo dado.
b. No es función *par* ni función *impar*.
c. Es función *par* porque es simétrica al *origen*.
d. Es función *impar* porque $f(-x)=-f(x)$ en el intervalo dado.

36. Dada la función $f(x)=e^x$, $-\pi<x<\pi$ con periodo 2π, diremos:

a. Es función *par* porque $f(-x)=f(x)$
b. Es función *impar* porque $f(-x)=-f(x)$
c. No es función *par*, ni función *impar*.
d. Es función *impar* porque $f(-x)=f(x)$

37. Dada la función $f(x)=x^2$, $-\pi<x<\pi$ con periodo 2π, diremos:

a. Es función *impar* porque es simétrica al *origen*.
b. Es función *impar* porque $f(-x)=f(x)$
c. Es función *par* porque es simétrica al eje *y*
d. No es función *par* ni función *impar*.

38. La representación de la función e^{-x} como la suma de una función *par* y de una función *impar* es:

a. $\cosh x+1$
b. $\operatorname{senh} x+1$
c. No puede hallarse a causa del exponente negativo.
d. $\cosh(-x)+\operatorname{senh}(-x)$

Respuestas:
31. *a*. **32.** *b*. **33.** *c*. **34.** *d*. **35.** *b*. **36.** *a*. **37.** *c*. **38.** *d*.

Series de Fourier para las funciones pares e impares

Funciones pares

Teorema 9

Sea $f(x)$ una función *par*, periódica con periodo 2π
$\rightarrow f(x)$ tiene una representación en *series de Fourier cosenoidal*; es decir:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

con coeficientes:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx,\ a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ b_n = 0$$

Veamos qué pasa en la formulación de los *coeficientes de Fourier* cuando la función es *par*.

$a.\ \ a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$

Como $f(x)$ es *par* $\rightarrow a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\left(2\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)dx\right) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)dx$

$b.\ \ a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx$

Como $f(x)$ es *par* y $\cos nx$ también lo es, su producto es una función *par*.

$$\rightarrow a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx$$

$c.\ \ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\text{sen } nxdx$

Como $f(x)$ es *par* y $\text{sen } nx$ es *impar*, el producto es una función *impar*, y su integral de $-\pi$ a π vale cero, $\rightarrow b_n = 0$.

Funciones impares

Teorema 10

Sea $f(x)$ una función *impar*, periódica con periodo 2π
$\rightarrow f(x)$ tiene una representación en *series de Fourier senoidal*; es decir:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen } nx,$$

con coeficientes:

$$a_0 = 0,\ a_n = 0,\ b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\text{sen}\, nx dx,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Se deja al lector verificarlo como en el caso anterior.

Observación: Algunos *coeficientes de Fourier* pueden ser *cero* sin tratarse de funciones *pares* o *impares*.

EJEMPLO 1

Hallar la *serie de Fourier* de la función:

$f(x) = \pi^2 - x^2,\ -\pi < x < \pi$ con periodo 2π

1. Veamos si la función es *par* o *impar*

$f(-x) = \pi^2 - (-x)^2 = f(x),\ -\pi < x < \pi \ \therefore$ es *par.*

2. Sus coeficientes son:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\pi^2 - x^2\right)dx,\ a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\pi^2 - x^2\right)\cos nx dx$$

$$b_n = 0 \qquad\qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Desarrollando:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left[\pi^2 x - \frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi}\right] = \frac{1}{\pi}\left(\pi^3 - \frac{\pi^3}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi^2.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\pi^2\cos nx dx - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\cancelto{0}{\frac{2}{n}\text{sen}\, nx\Big|_0^{\pi}}\right) - \frac{2}{\pi}\left[\frac{2x}{n^2}\cos nx + \cancelto{0}{\left(\frac{x^2}{n} - \frac{2}{n^3}\right)\text{sen}\, nx}\Big|_0^{\pi}\right]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4}{n^2}\cos n\pi = \dfrac{4}{n^2} & n = 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots \\ -\dfrac{4}{n^2}\cos n\pi = -\dfrac{4}{n^2} & n = 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots \end{cases}$$

3. Y la serie correspondiente da:

$$\pi^2 - x^2 = \frac{2}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx.$$

EJEMPLO 2

Hallar la *serie de Fourier* de la función (ejemplo 4 de la página 447):

$f(x) = x, \; -\pi < x < \pi$, con periodo 2π

1. ¿Es *par* o *impar*?

$f(-x) = -x = -f(x), \; -\pi < x < \pi, \rightarrow$ es *impar.*

2. Con coeficientes:

$$a_0 = 0, \; a_n = 0, \; b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx dx, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} nx dx,$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\cancelto{0}{\frac{1}{n^2}\operatorname{sen} nx} - \frac{x}{n}\cos nx \Big|_0^{\pi}\right]$$

$$= -\frac{2}{\pi}\cos nx = \begin{cases} 2/n, & n = 1, 3, 5, \ldots \\ -2/n, & n = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$$

3. Y su serie es:

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen} nx.$$

Llegamos al mismo resultado de una forma mucho más rápida.

EJEMPLO 3

Hallar la *serie de Fourier* de la función (ejemplo 3 de la página 445):

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < -\pi/2 \\ \cos x, & -\pi/2 < x < \pi/2 \text{ con periodo } 2\pi \\ 0, & \pi/2 < x < \pi \end{cases}$$

1. $f(-x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < -\pi/2 \\ \cos(-x), & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < x < \pi \end{cases}$

Como $f(-x) = f(x)$ es función par $\rightarrow b_n = 0$

2. $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos x dx = \frac{1}{\pi}\operatorname{sen} x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{\pi}$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos x \cos nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{1-n}\operatorname{sen}(1-n)x + \frac{1}{1+n}\operatorname{sen}(1+n)x\right]_0^{\pi/2}$$

(vea página 446)

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{1-n}\operatorname{sen}(1-n)\frac{\pi}{2} + \frac{1}{1+n}\operatorname{sen}(1+n)\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{1-n}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos n\frac{\pi}{2} + \frac{1}{1+n}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos n\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{1-n}\cos n\frac{\pi}{2} + \frac{1}{1+n}\cos n\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{1-n^2}\cos n\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{-2}{\pi\left(n^2-1\right)}\cos n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} \dfrac{-2}{\pi\left(n^2-1\right)} & n = 2,\ 6,\ \ldots \\ 0 & n = 3,\ 5,\ 7,\ \ldots \\ \dfrac{-2}{\pi\left(n^2-1\right)} & n = 4,\ 8,\ \ldots \end{cases}$$

Para a_1 tenemos:

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos^2 x dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\Big|_0^{\pi/2}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

3. La serie es:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos x + \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}\cos nx$$

Igual que el anterior, pero obtenida más rápidamente.

EJERCICIOS 8.4

Dadas las siguientes funciones periódicas, con periodo 2π, hallar su *serie de Fourier* correspondiente.

1. $f(x)=x^2, \quad -\pi<x<\pi$

Respuesta: $x^2=\dfrac{\pi^3}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$

2. $f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi<x<0\\ 1 & 0<x<\pi\end{cases}$

Respuesta: $f(x)=\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\ \text{sen}\ nx$

3. $f(x)=x^3, \quad -\pi<x<\pi$

Respuesta: $x^3=2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^3}\left(n^2\pi^2-6\right)\ \text{sen}\ nx$

4. $f(x)=x, \quad -\pi<x<\pi$

Respuesta: $x=2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\text{sen}\ nx$

5. $f(x)=|x|, \quad -\pi<x<\pi$

Respuesta: $|x|=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)}\cos\ (2n-1)x.$

6. $f(x)=|\text{sen}\,x|, \quad -\pi<x<\pi$

Respuesta: $|\text{sen}\,x|=\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{1}{3}\cos 2x+\dfrac{1}{15}\cos 4x+\dfrac{1}{35}\cos 6x+\ldots\right).$

7. $f(x)=\begin{cases}-x^2, & -\pi<x<0\\ x^2, & 0<x<\pi\end{cases}$

Respuesta:

$$f(x)=\left(2\pi-\frac{8}{\pi}\right)\text{sen}\,x-\pi\text{sen}\,2x+\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{8}{27\pi}\right)\text{sen}\,3x-\frac{\pi}{2}\text{sen}\,4x+\ldots$$

8. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0\\ 3, & 0<x<\pi\end{cases}$

Respuesta: $f(x)=\dfrac{12}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)}\ \text{sen}\,(2n-1)\ x$

9. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0\\ x, & 0<x<\pi\end{cases}$

Respuesta: No es par ni *impar* (vea ejercicio 27 de la página 460).

10. $f(x)=2x-x^2, \quad 0<x<2\pi$

Respuesta: No es *par* ni *impar*

$$f(x) = -\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos\ nx + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \text{sen } nx$$

11. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 2\pi/3 \\ 0, & 2\pi/3 < x < 4\pi/3 \\ -1 & 4\pi/3 < x < 2\pi \end{cases}$

Respuesta: $f(x) = \frac{3}{\pi}\left(\text{sen } x + \frac{1}{2}\text{sen } 2x + \frac{1}{4}\text{sen } 4x + \frac{1}{5}\text{sen } 5x + \frac{1}{7}\text{sen } 7x \ ... \right).$

12. $f(x) = \begin{cases} -x & -\pi < x < 0 \\ x & 0 < x < \pi \end{cases}$

Respuesta: $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \cos(2n-1)\ x$

13. $f(x) = \text{senh}\, x, \quad -\pi < x < \pi$

Respuesta: $\text{senh } x = \frac{2\text{senh}\, x}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1} \text{sen } nx.$

14. $f(x) = \cos^2 x, \quad -\pi < x < \pi$

Respuesta: $\cos^2 x = \frac{1}{2} - \frac{8}{3\pi}\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{2}{3\pi}\cos 3x - \frac{8}{105\pi}\cos 5x + ...$

En los siguientes ejercicios, elegir la opción correcta:

15. Los *coeficientes de Fourier* de la función con periodo 2π:

$$f(x) = \text{sen}\, 2x, \qquad -\pi < x < \pi \ \text{ son:}$$

a. $a_0 = -\frac{1}{2\pi}, \ a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \text{sen}\, 2x \cos nx dx, \ b_n = 0,$

b. $a_0 = -\frac{1}{\pi}, \ a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \text{sen}\, 2x \cos nx dx, \ b_n = 0,$

c. $a_0 = a_n = 0, \ b_n = \frac{8}{\pi\left(4-n^2\right)} \text{sen } n\frac{\pi}{2},$

d. $a_0 = 0, \ a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \text{sen}\, 2x \cos nx dx, \ b_n = 0,$

16. *La función* $f(x) = x\,\text{sen}\, x, \ -\pi < x < \pi$ es periódica con periodo 2π, entonces,

a. Es función *par* $\rightarrow \ a_0 = a_n = 0, \ \ b_n = \frac{2}{1-n^2}\text{sen } n\pi$

b. Es función *impar* $\rightarrow \ a_0 = a_n = 0, \ \ b_n = \frac{2}{1-n^2}\cos n\pi$

c. Es función *par* $\rightarrow \ a_0 = 1, \ a_n = \frac{2}{1-n^2}\cos n\pi,$

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad b_n = 0$$

d. Es función *impar* $\rightarrow$ $a_0 = 0,\ a_1 = -\dfrac{1}{2},\ a_n = \dfrac{2}{1-n^2}\operatorname{sen} n\pi$

$$b_n = 0$$

17. La serie de Fourier de $f(x) = \cosh x,\ -\pi < x < \pi$ periódica, con periodo 2π, es:

a. $\dfrac{1}{\pi}\operatorname{senh}\pi + \dfrac{2\operatorname{senh}\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}\cos nx$

b. $\dfrac{1}{\pi}\operatorname{senh}\pi + \dfrac{2\operatorname{senh}\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}\operatorname{sen} nx$

c. $\dfrac{2\operatorname{senh}\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}\operatorname{sen} nx$

d. $\dfrac{2\operatorname{senh}\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}\cos nx$

18. La serie de Fourier de $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ 2, & 0 < x < \pi \end{cases}$ con periodo 2π es:

$$\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}\operatorname{sen}(2n-1)x$$

Y la suma en $x(0)$ ya no es esta serie sino el siguiente valor:

a. 0 *c.* 2

b. 1 *d.* a_0

19. La serie de Fourier correspondiente a la función:

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < x < 3\pi/2 \end{cases}$$

con periodo 2π viene dada por:

a. $\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)}\operatorname{sen}(2n-1)x$

b. $2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{n}\operatorname{sen} nx$

c. $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\operatorname{sen} x + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x - \dfrac{2}{9\pi}\operatorname{sen} 3x - \dfrac{1}{4}\operatorname{sen} 4x + \dfrac{2}{25\pi}\operatorname{sen} 5x + \dfrac{1}{6}\operatorname{sen} 6x + \ldots$

d. $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\cos x + \dfrac{1}{2}\cos 2x - \dfrac{2}{9\pi}\cos 3x - \dfrac{1}{4}\cos 4x + \dfrac{2}{25\pi}\cos 5x + \dfrac{1}{6}\cos 6x + \ldots$

20. La función $f(x)=\frac{x^2}{4}, \quad -\pi<x<\pi$ con periodo 2π, satisface la opción:

a. $f(x)=\frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\operatorname{sen} nx$

b. $f(x)=\frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$

c. $a_0=0, \quad a_n=0 \quad b_n=\frac{1}{n^2}\operatorname{sen} n$

d. $a_0=\frac{\pi^2}{12}, \quad a_n=\frac{1}{n^2}\cos n, \; b_n=0 \qquad n=1, 2, 3, \ldots$

Respuestas:

15. *c*. Por ser función *impar*. La opción *a* supone que la función es *par* y hay un error en a_0. La opción *b* y *d* similarmente.

16. *c*. Es función *par*. Teniendo en cuenta que debe buscarse en la integral el término a_1 que en la fórmula final no está definido. Las demás opciones mezclan los conceptos.

17. *a*. Es función par.

18. *b*. Puesto que $\frac{\lim\limits_{x\to0^+} f(x)+\lim\limits_{x\to0^-} f(x)}{2}=\frac{2+0}{2}=1$

19. *c*. Es una función *impar*. La opción *a* toma los límites de la integral de b_n de $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$. La opción *b* toma de 0 a π (en vez de 0 a $\frac{\pi}{2}$). La opción *d* supone que la función es *par*.

20. *b*. y *d*. Es función *par*.

Funciones de periodo arbitrario

Una función periódica $f(x)$ con periodo T también puede tener un desarrollo en *series de Fourier*. Para poder utilizar las *fórmulas de Euler* aplicables a funciones periódicas con periodo 2π introducimos el siguiente cambio de variable:

$$t=\frac{T}{2\pi}x \quad \to \quad x=\frac{2\pi}{T}t$$

Entonces, la función $f\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ es una función periódica de t, con periodo 2π.

La serie de Fourier correspondiente será:

$$f\left(-\frac{T}{2\pi}x\right)=a_0+\sum a_n\cos nt+b_n\operatorname{sen} nt,$$

Con coeficientes:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)\cos nxdx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)\text{sen } nxdx$$

Como $x = \frac{2\pi}{T}t \rightarrow dx = \frac{2\pi}{T}dt$

Cuando $x = -\pi \rightarrow t = -T/2$

$x = -\pi \rightarrow t = T/2$

Por lo tanto, los coeficientes son:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\frac{2n\pi}{T}tdt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\text{sen}\frac{2n\pi}{T}tdt, \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ ...$$

Y la serie es:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_0 \cos\frac{2n\pi}{T}t + b_n\ \text{sen}\frac{2n\pi}{T}t.$$

El intervalo de integración de los coeficientes puede reemplazarse por cualquier intervalo de longitud *T*; por ejemplo, $0 \le t \le T$, $\frac{T}{2} \le t \le \frac{3T}{2}$, etcétera.

EJEMPLO 1

Desarrollar en *series de Fourier* la función periódica $f(x) = |x|$, definida en $-1 < x < 1$ con periodo $T = 2$.

Como es función par $\rightarrow$ $b_n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x)dx = \int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_n = 2\int_0^1 x\cos n\pi xdx$$

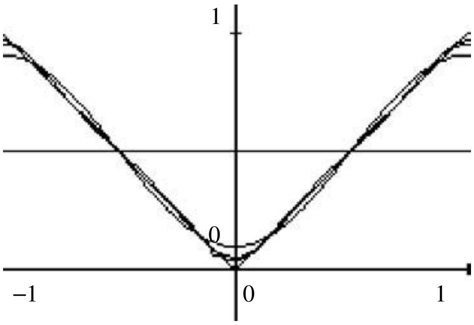
$$= 2\left[\frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x + \frac{x}{n\pi}\text{sen } n\pi\right]\Bigg|_0^1$$

$$= 2\left[\frac{1}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) + \frac{1}{n\pi}\text{sen } n\pi\right]$$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} \dfrac{-4}{n^2\pi^2}, & n = 1, 3, 5, \ldots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$$

$$\therefore \qquad |x| = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)\pi x$$

Los sucesivos ajustes hasta $n = 3$ se ven en la siguiente gráfica:



EJEMPLO 2

Hallar la serie de Fourier de:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 2 \\ 0, & -2 < x < 0 \end{cases} \qquad T = 4$$

$$a_0 = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{1}{4}\int_0^2 dx = \frac{1}{4}x\Big|_0^2 = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_0^2 \cos\frac{n\pi}{2}x dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}x\Big|_0^2$$

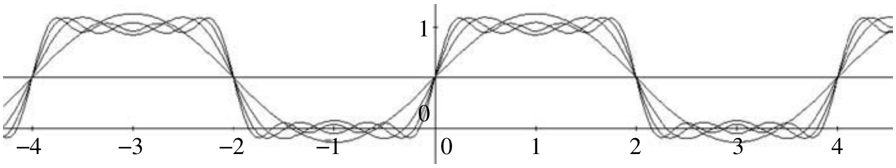
$$= \frac{2}{n\pi}\operatorname{sen} n\pi = 0$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_0^2 \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}x dx = -\frac{1}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}x\Big|_0^2$$

$$= -\frac{1}{n\pi}(\cos n\pi - 1) = \frac{1}{n\pi}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} \dfrac{2}{n\pi} & n = 1, 3, 5, \ldots \\ 0 & n = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi}{2}x$$

La siguiente gráfica muestra los ajustes con $n = 5$:



EJEMPLO 3

Hallar la *serie de Fourier* de la función de onda cuadrada:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < -1 \\ k, & -1 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < 2, \end{cases} \qquad T = 4$$

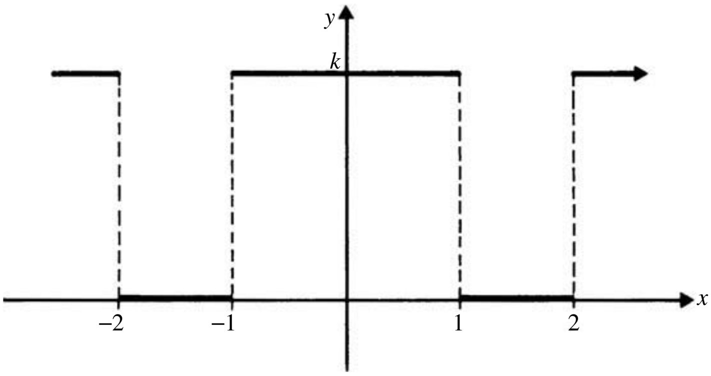


Figura 8-14

Es función *par* $\rightarrow \quad b_n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)dx = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 kdx + \int_1^2 0dx\right]$$

$$= \frac{1}{2} kx\Big|_0^1 = \frac{k}{2}$$

$$a_n = \int_0^1 k\cos\frac{n\pi}{2}xdx = \frac{2k}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}x\Big|_0^1$$

$$= \frac{2k}{n\pi}\operatorname{sen} n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} \dfrac{2k}{n\pi}, & n = 1, 5, 9, \ldots \\ 0 & n = 2, 4, 6, 8, \ldots \\ -\dfrac{2k}{n\pi} & n = 3, 7, 11, \ldots \end{cases}$$

$$\therefore f(x) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cos\frac{(2n+1)\pi}{2}x$$

EJERCICIOS 8.5

Hallar la *serie de Fourier* de las funciones periódicas con periodo T.

1. $f(x)=\begin{cases}0, & -1<x<1\\ 1, & 1<x<3\end{cases} \qquad T=4$

Respuesta: $f(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\cos\frac{(2n+1)}{2}\pi x$

2. $f(x)=\begin{cases}1, & -1<x<1\\ 0, & 1<x<3\end{cases} \qquad T=4$

Respuesta: $f(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n+1}\cos\frac{2n+1}{2}\pi x$

3. $f(x)=\begin{cases}-1, & -1<x<0\\ 1, & 0<x<1\end{cases} \qquad T=2$

Respuesta: $f(x)=\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi}{2n+1}x$

4. $f(x)=x, \quad 0<x<l \qquad T=1$

Respuesta: $x=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}\frac{2n\pi}{l}x$

5. $f(x)=4x-x^2, \quad 0<x<4 \qquad T=4$

Respuesta: $4x-x^2=\dfrac{-16}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}x$

6. $f(x)=x^2, \quad -1<x<1 \qquad T=2$

Respuesta: $x^2=\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^2}\cos n\pi x$

7. $f(x)=\begin{cases}1, & -1<x<0\\ x, & 0<x<0\end{cases} \qquad T=2$

Respuesta: $f(x)=\dfrac{3}{4}-\dfrac{2}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\pi x}{(2n+1)^2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} n\pi x}{n}$

8. $f(x)=\begin{cases}1, & -3<x<0\\ 1+x, & 0<x<3\end{cases} \qquad T=6$

Respuesta: $f(x)=\dfrac{7}{4}+3\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}-1}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{3}x-\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}x.$

9. $f(x)=\begin{cases}0, & -2<x<0\\ x, & 0<x<1\\ 1, & 1<x<2\end{cases} \qquad T=4$

Respuesta: $a_0=\dfrac{3}{8},\ a_n=\begin{cases}-\dfrac{2}{n^2\pi^2}, & n=1,3,5,7,\ldots\\ -\dfrac{4}{n^2\pi^2}, & n=2,6,\ldots\\ 0, & n=4,8,\ldots\end{cases}$

$$b_n=\begin{cases}\dfrac{2+n\pi}{n^2\pi^2}, & n=1,5,9,\ldots\\ -\dfrac{1}{n\pi}, & n=2,4,6,8,10,\ldots\\ -\dfrac{2+n\pi}{n^2\pi^2}, & n=3,7,11,\ldots\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{3}{8}-\frac{2}{\pi^2}\cos\frac{\pi}{2}x-\frac{1}{\pi^2}\cos\pi x-\frac{2}{9\pi^2}\cos\frac{3\pi}{2}x-\frac{2}{25\pi^2}\cos\frac{5\pi}{2}x-\ldots$$
$$+\frac{2+\pi}{\pi^2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x-\frac{1}{2\pi}\operatorname{sen}\pi x+\frac{3\pi-2}{9\pi^2}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}x-\frac{1}{4\pi}\operatorname{sen}2\pi+\ldots$$

10. $f(x)=\begin{cases}x, & 0<x<1\\ 2-x, & 1<x<2\end{cases} \qquad T=2$

Respuesta: $f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)\pi x$

11. $f(x)=2x, \quad 0<x<1, \quad T=1$

Respuesta: $2x=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}2n\pi x$

12. $f(x)=\begin{cases}1, & -1<x<0\\ -x, & 0<x<1\end{cases} \qquad T=2$

Respuesta: $f(x)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{sen}n\pi x.$

13. $f(x)=\begin{cases}x, & -1<x<0\\ 0, & 0<x<1\end{cases} \qquad T=2$

Respuesta: $f(x)=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi x}{(2n-1)^2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\operatorname{sen}n\pi x}{n}.$

14. $f(x)=\begin{cases} x+1, & -2<x<0 \\ 0, & 0<x<2 \end{cases} \qquad T=4$

Respuesta: $a_0=\dfrac{1}{2},\ a_n=\begin{cases} \dfrac{4}{n^2\pi^2} & n=1,3,5,\ldots \\ 0 & n=2,4,6,\ldots \end{cases} \quad b_n=\begin{cases} \dfrac{4}{n\pi} & n=1,3,5,\ldots \\ -\dfrac{2}{n\pi} & n=2,4,6,\ldots \end{cases}$

15. $f(x)=\begin{cases} 0 & -3<x<0 \\ (3-x)^2, & 0<x<3 \end{cases} \qquad T=6$

Respuesta: $f(x)=\dfrac{3}{2}+\dfrac{18}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\cos\dfrac{n\pi}{3}x+\dfrac{9}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-\dfrac{4}{(2n-1)^2\pi^2}}{2n-1}$

$$\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi}{3}x+\frac{9}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\operatorname{sen}\frac{2n\pi}{3}x$$

En los siguientes ejercicios elegir la opción correcta:

16. La *serie de Fourier* de la función

$f(x)=x^3, \quad -1<x<1$ con periodo $T=2$, viene dada por:

a. $x^3=\dfrac{1}{8}+\dfrac{2}{\pi^3}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^3}(n^2\pi^2-6)\cos n\pi x$

b. $x^3=\dfrac{1}{8}-\dfrac{2}{\pi^3}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n+1}{n^3}(n^2\pi^2-6)\ \operatorname{sen} n\pi x$

c. $x^3=\dfrac{2}{\pi^3}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^3}(n^2\pi^2-6)\ \operatorname{sen} n\pi x$

d. $x^3=\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{\pi^3}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^3}(n^2\pi^2-6)\cos(n\pi/2)\,x$

17. ¿Cuál es *la serie de Fourier* de la función

$f(x)=x^3, \quad -k<x<k$ con periodo $2k$?

a. $x^3=\dfrac{k^4}{4}+\dfrac{2k^3}{\pi^3}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^3}(n^2\pi^2-6)\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{k}x$

b. $x^3=\dfrac{k^4}{4}+\dfrac{2k^3}{\pi^3}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^3}(n^2\pi^2-6)\cos\dfrac{n\pi}{k}x$

c. $x^3=\dfrac{2k^3}{\pi^3}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^3}(n^2\pi^2-6)\cos\dfrac{n\pi}{k}x$

d. $x^3=\dfrac{2k^3}{\pi^3}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^3}(n^2\pi^2-6)\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{k}x$

18. La *serie de Fourier* de la función

$$f(x)=\begin{cases}0, & -2<x<0\\ x, & 0<x<2\end{cases} \qquad T=4, \text{ es:}$$

a. $f(x)=-\dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(n\pi/2)x}{(2n-1)^2}$

b. $f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(n\pi/2)x}{(2n-1)^2}+\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}(n\pi/2)x$

c. $f(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}(n\pi/2)x$

d. $f(x)=-\dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(n\pi/2)x}{(2n-1)^2}+\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}(n\pi/2)x$

19. Los *coeficientes de Fourier* correspondientes a la función: $f(x)=e^x, \quad -1<x<1,\ T=2,$ son:

a. $a_0=\dfrac{1}{2}(e-1),\ a_n=\dfrac{\cos n\pi}{1+n^2\pi^2}\quad b_n=\dfrac{2n\pi}{1+n^2\pi^2}\cos n\pi$

b. $a_0=e-1\quad a_n=\dfrac{\cos n\pi}{1+n^2\pi^2}\quad b_n=\dfrac{2n\pi}{1+n^2\pi^2}\cos n\pi$

c. $a_0=\operatorname{senh}1,\ a_n=\dfrac{2\operatorname{senh}1}{1+n^2\pi^2}\cos n\pi\quad b_n=\dfrac{2n\pi\operatorname{senh}1}{1+n^2\pi^2}\cos n\pi$

d. $a_0=\cosh 1,\ a_n=\dfrac{2\cosh 1}{1+n^2\pi^2}\operatorname{sen} n\pi\quad b_n=\dfrac{2n\pi\cosh 1}{1+n^2\pi^2}\operatorname{sen} n\pi$

20. Dada la función $f(x)=\begin{cases}0, & -2<x<0\\ x, & 0<x<2\end{cases} \qquad T=4.$

Sus correspondientes *coeficientes de Fourier* son:

a. $a_0=\dfrac{4}{3},\ a_n=\dfrac{8}{n^2\pi^2}\cos n\pi\quad b_n=\dfrac{8}{n^3\pi^3}(\operatorname{sen} n\pi-1)$

b. $a_0=\dfrac{2}{3},\ a_n=\dfrac{8}{n^2\pi^2}\cos n\pi\quad b_n=\dfrac{8}{n^3\pi^3}(\cos n\pi-1)-\dfrac{4}{n\pi}\cos n\pi$

c. $a_0=\dfrac{4}{3},\ a_n=\dfrac{16}{n^2\pi^2}\cos n\pi\quad b_n=\dfrac{8}{n^3\pi^3}(\cos n\pi-1)+\dfrac{4}{n\pi}\cos n\pi$

d. $a_0=\dfrac{2}{3},\ a_n=\dfrac{16}{n^2\pi^2}\cos n\pi\quad b_n=\dfrac{16}{n^3\pi^3}(\cos n\pi-1)-\dfrac{8}{n\pi}\cos n\pi$

Respuestas:

16. *c*. *como es función impar* $a_0 = a_n = 0$, el error:

$a_0 = 1/8$ o $a_0 = 1/4$ proviene de la integración desde 0 hasta 1 y debe ser senoidal.

17. *d*. Es función *impar* $\to a_0 = a_n = 0$ y $b_n = \frac{2}{k}\int_0^k x^3 \operatorname{sen}\frac{n\pi}{k}x\,dx$

18. *b*. $a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_n = \frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1), \; b_n = -\frac{2}{n\pi}\cos n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

19. *c*. $a_0 = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{3}\right) = \operatorname{senh} 1$

20. *b*.

Desarrollo de funciones no periódicas en series de Fourier

Anticipamos, mediante ejemplos y ejercicios, el hecho de que funciones no periódicas pueden tomarse como tales, considerándolas seccionalmente continuas. Podemos obtener el desarrollo de una función, por ejemplo, $f(x) = x^3$, en una *serie de Fourier cosenoidal*, o bien, en una *serie de Fourier senoidal*. Esto significa que dicha función fue considerada como *par* en el primer caso, e *impar* en el segundo. Tomaremos intervalos iguales y definiremos la función de manera que sea *par* o *impar*.

$$f(x) = x^3 \quad -l < x < l \qquad\qquad f(x) = x^2 \quad -l < x < l$$

$$f(-x) = -f(x) \qquad\qquad f(-x) = -f(x)$$

Impar *Par*

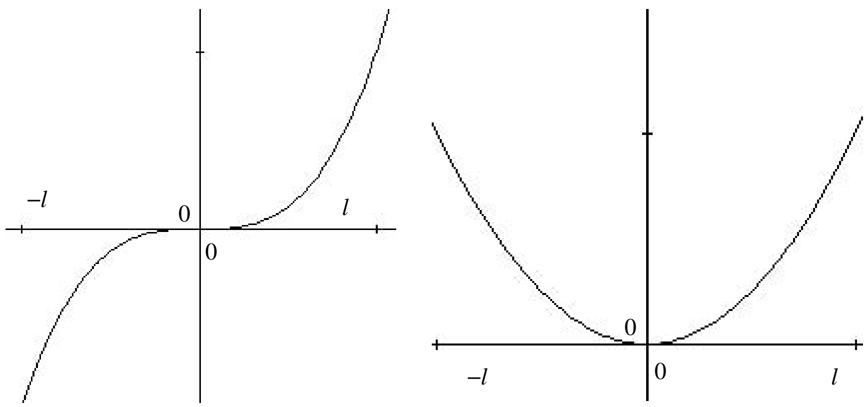


Figura 8-15.

En la figura 8.16 expandemos la función *impar* (a).

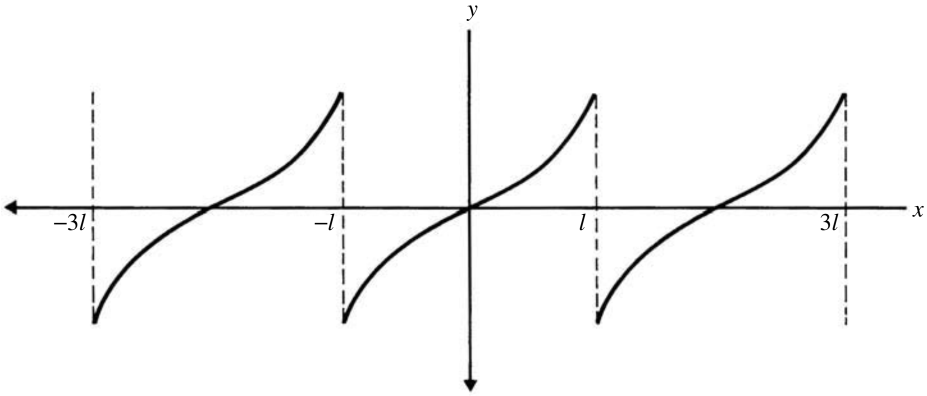


Figura 8-16.

Y ya podemos obtener su desarrollo en *series de Fourier* de tipo *senoidal*.
En la figura 8.17 expandemos la función *par* (b).

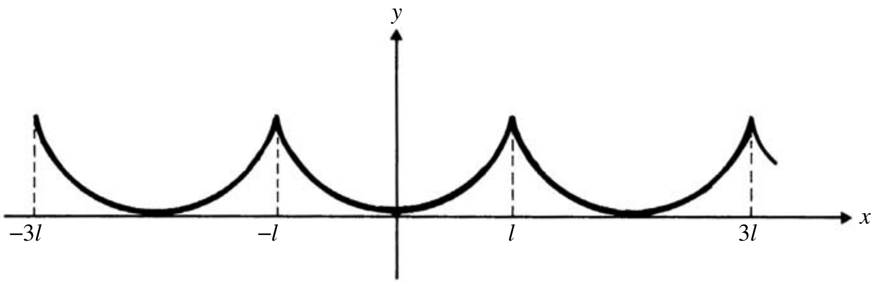


Figura 8-17.

La *serie de Fourier* correspondiente será *cosenoidal*.

EJEMPLO 1

Desarrollar la función $f(x) = x$, en el intervalo $0 < x < \pi$ en una serie de cosenos.
Expandiendo esta función de forma *par*, y considerando el periodo 2π, tenemos:

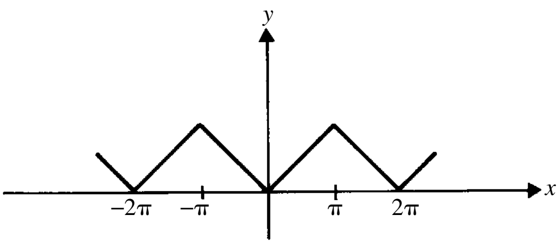


Figura 8-18.

$$f(x) = |x|, \qquad -\pi < x < \pi$$

$$\rightarrow \quad a_o = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx = \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} -\dfrac{4}{n^2\pi}, & n = 1, 3, \ldots \\ 0 & n = 2, 4, \ldots \end{cases}$$

$$b_n = 0$$

$$\therefore f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

EJEMPLO 2

Desarrollar la función $f(x) = x$, en el intervalo $0 < x < \pi$ en una serie de senos.
Expandiendo esta función de forma *impar*, obtenemos:

$$f(x) = x \qquad -\pi < x < \pi$$

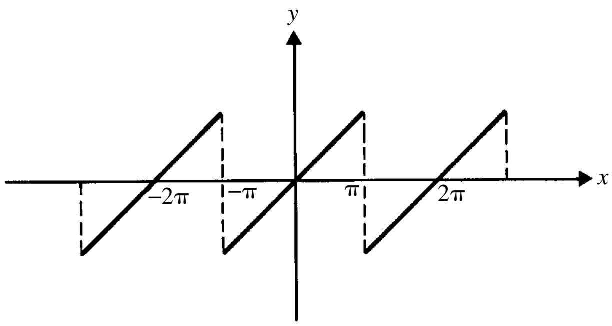


Figura 8-19.

$$\rightarrow a_0 = 0$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \text{ sen } nx dx = -\frac{2}{\pi}\cos n\pi = \begin{cases} \dfrac{2}{n}, & n = 1, 3, 5, \ldots \\ -\dfrac{2}{n}, & n = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$$

$$\therefore f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\text{sen } nx$$

EJERCICIOS 8.6

Desarrollar las siguientes funciones en una *serie de Fourier senoidal* y *cosenoidal*, según se indique.

1. $f(x)=x^2$, para $0<x<\pi$ en una serie *senoidal*.

Respuesta: $x^2=\dfrac{2}{\pi}\sum(-1)^{n+1}\left[\dfrac{\pi^2}{n}+\dfrac{2}{n^3}\left((-1)^n-1\right)\right]\text{sen } nx$

2. $f(x)=x^2$, para $0<x<\pi$ en una serie *cosenoidal*.

Respuesta: $x^2=\dfrac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$

3. $f(x)=\begin{cases}0, & 0<x<\dfrac{1}{2}\\ x-\dfrac{1}{2}, & \dfrac{1}{2}<x<1\end{cases}$ para $0<x<1$ en una serie *senoidal*.

Respuesta: $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n\pi}-\dfrac{2\text{sen}\left(n\pi/2\right)}{n^2\pi^2}\text{sen } n\pi x$

4. $f(x)=\begin{cases}0, & 0<x<\dfrac{1}{2}\\ x-\dfrac{1}{2}, & \dfrac{1}{2}<x<1\end{cases}$ para $0<x<1$ en una serie *cosenoidal*.

Respuesta: $f(x)=\dfrac{1}{8}+\dfrac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\cos n\pi-\cos n\dfrac{\pi}{2}\right)\cos n\pi x$

5. $f(x)=\begin{cases}0, & 0<x<1\\ 1, & 1<x<2\end{cases}$ para $0<x<2$ en una serie *cosenoidal*.

Respuesta: $f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\cos(2n-1)\dfrac{\pi}{2}x$

6. $f(x)=\begin{cases}0, & 0<x<1\\ 1, & 1<x<2\end{cases}$ para $0<x<2$ en una serie *senoidal*.

Respuesta: $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos n\dfrac{\pi}{2}-\cos n\pi\right)\text{sen } n\dfrac{\pi}{2}x$

7. $f(x)=\begin{cases}x, & 0<x<1\\ 1, & 1<x<2\end{cases}$ para $0<x<2$ en una serie *senoidal*.

Respuesta: $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{4}{n^2\pi^2}\text{sen } n\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2}{n\pi}\cos n\pi\right)\text{sen } n\dfrac{\pi}{2}x$

8. $f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<1 \\ 1, & 1<x<2 \end{cases}$ para $0<x<2$ en una serie *cosenoidal*.

Respuesta: $f(x)=\dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cos n\frac{\pi}{2}-1\right)\cos n\frac{\pi}{2}x.$

9. $f(x)=\operatorname{senh} x$ para $0<x<1$ en una serie de *senos*.

Respuesta: $f(x)=2\pi(\operatorname{senh} 1)\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{1+n^2\pi^2}\operatorname{sen} n\pi x.$

10. $f(x)=\operatorname{senh} x$ para $0<x<1$ en una serie de *cosenos*.

Respuesta: $f(x)=(\cosh 1-1)+2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cosh 1-1}{1+n^2\pi^2}\cos n\pi x.$

11. $f(x)=3$ para $0<x<\dfrac{1}{2}$ en una serie de *cosenos*.

Respuesta: $f(x)=3$

12. $f(x)=3$ para $0<x<\dfrac{1}{2}$ en una serie de *senos*.

Respuesta: $3=\dfrac{12}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\operatorname{sen}2(2n+1)\pi x$

13. $f(x)=e^x$ para $0<x<1$ en una serie de *cosenos*.

Respuesta: $(e-1)+2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n e-1}{1+n^2\pi^2}\cos n\pi x$

14. $f(x)=e^{-x}$ para $0<x<1$ en una serie de *senos*.

Respuesta: $f(x)=2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n+1}e^{-1}n}{1+n^2\pi^2}\operatorname{sen} n\pi x$

15. $f(x)=x(\pi-x)$ para $0<x<\pi$ en una serie *senoidal*.

Respuesta: $x(\pi-x)=\dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\operatorname{sen}(2n+1)x$

16. $f(x)=x\operatorname{sen} x$ para $0<x<\pi$ en una serie *cosenoidal*.

Respuesta: Vea ejercicio 16 de la página 472.

Elegir la opción que contiene la serie correspondiente a cada una de las funciones dadas a continuación:

17. $f(x)=1-x$ para $0<x<1$ en una serie *senoidal*.

a. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{sen} n\pi x$

b. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\operatorname{sen}(2n+1)\pi x$

c. $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(1-2\cos n\pi)\text{ sen } n\pi x$

d. $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\text{sen } n\pi x$

18. $f(x)=1-x$ para $0<x<1$ en una serie *cosenoidal*.

a. $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos n\pi x$

b. $\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)\pi x$

c. $\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)\pi x$

d. $\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos n\pi x$

19. $f(x)=e^x$ para $0<x<1$ en una serie *senoidal*.

a. $(e-1)+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n+1}en\pi}{1+n^2\pi^2}\text{ sen } n\pi$

b. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{1+n^2\pi^2}(-1+en\pi\cos n\pi)\text{sen } n\pi x$

c. $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n+1}en\pi}{1+n^2\pi^2}\text{ sen } n\pi x$

d. $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\text{sen } n\pi x$

20. $f(x)=\cosh x$ para $0<x<1$ en una serie *cosenoidal*.

a. $\text{senh } 1+2(\text{senh } 1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2\pi^2}\cos n\pi x$

b. $2(\text{senh } 1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2\pi^2}\cos n\pi x$

c. $2\sum_{n=1}^{\infty}\cosh\ 1\ \cos n\pi x$

d. $\text{senh } 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2\pi^2}\cos n\pi x$

21. $f(x)=\begin{cases}-x+\frac{1}{2}, & 0<x<\frac{1}{2}\\ 0, & \frac{1}{2}<x<1\end{cases}$ para $0<x<1$ en una serie *senoidal*.

a. $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2}\left(1-\cos n\frac{\pi}{2}\right)\cos n\pi x$

b. $\frac{1}{8}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\left(1-\frac{2}{n\pi}\operatorname{sen} n\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen} n\pi x$

c. $\frac{1}{8}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2}\left(1-\cos n\frac{\pi}{2}\right)\cos n\pi x$

d. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\left(1-\frac{2}{n\pi}\operatorname{sen} n\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen} n\pi x$

22. $f(x)=\begin{cases}-x+\frac{1}{2}, & 0<x<\frac{1}{2}\\ 0, & \frac{1}{2}<x<1\end{cases}$ para $0<x<1$ en una serie *cosenoidal*.

a. $\frac{1}{8}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\left(1-\frac{2}{n\pi}\operatorname{sen} n\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen} n\pi x$

b. $\frac{1}{8}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2}\left(1-\cos n\frac{\pi}{2}\right)\cos n\pi x$

c. $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2}\left(1-\cos n\frac{\pi}{2}\right)\cos n\pi x$

d. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\left(1-\frac{2}{n\pi}\operatorname{sen} n\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen} n\pi x$

Respuestas:

17. *d*. La opción *a* supone que $a_0=\frac{1}{2}$ siendo que la función se redefine para que sea *impar*:

$$f(x)=\begin{cases}-(x+1), & -1<x<0\\ 1-x, & 0<x<1\end{cases}$$

y automáticamente: $a_0=a_n=0$ La opción *b* da valores de: $a_0=\frac{1}{2}$, $a_n=\frac{4}{n^2\pi^2}$, *n impar* y $b_n=0$ (como si fuera *par*). La opción *c* tiene un error en el cálculo de b_n que debe ser: $b_n=\frac{2}{n\pi}$ $n=1, 2, 3, \ldots$

18. *b*. La opción *a* supone $a_0=a_n=0$, pero la función debe considerarse *par*. La opción *c* no contiene a a_0. La opción *d* considera a b_n pero le añade el error de acompañar a dicho coeficiente la función coseno.

19. *c*. La opción *a* contiene a $a_0 = e - 1$ pero como la función se redefine:

$$f(x) = \begin{cases} -e^{-x}, & -1 < x < 0 \\ e^{x}, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

para que sea impar $\rightarrow a_0 = a_n = 0$. La opción *b* tiene un error de integración. La *d* supone $b_n = 2\int_0^1 \text{sen } n\pi x \, dx$ en vez de b_n $= 2\int_0^1 e^x \text{sen } n\pi x dx$.

20. *d*. La opción *b* olvidó $a_0 = \text{senh}\,1$. La opción *c* confunde el hecho de que $a_n = 2\int_0^1 \cosh x \cos n\pi x dx$. La opción *d* olvidó un factor en el segundo término.

21. *d*. Como ha de ser función impar $\rightarrow a_0 = a_n = 0$ y

$$b_n = 2\int_0^1 f(x)\text{sen } n\pi x dx = \frac{1}{n\pi}\left(1 - \frac{2}{n\pi}\text{sen } n\frac{\pi}{2}\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

La opción *a* contiene a a_n indebidamente (para $f(x)$ par). La opción *c* es exactamente la representación de la función como si fuera *par*.

22. *b*. Ver el porqué de los errores en el ejercicio anterior.

Resumen

Definiciones

Función periódica

$f(t+T) = f(t)$ periodo *T*.

Serie de Fourier

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \text{sen } nx)$$

Fórmulas de Euler

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\text{sen } nx dx$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$

Función par

$f(-x) = f(x)$

Función impar

$f(-x) = -f(x)$

Teoremas

1. *f* y *g* son periódicas con periodo $T \rightarrow h = af + bg$ periódica con periodo *T*.
2. Si *T* es periodo de $f \rightarrow nT$ también, *n* entero:

$$\text{mínimo periodo} = \frac{\text{periodo natural de la función}}{n}, \; n \text{ coeficiente del ángulo.}$$

3. Las funciones $\cos\frac{n\pi x}{k}$ y $\text{sen}\frac{n\pi x}{k}$, $n = 1, 2, 3, \ldots \; k > 0$ son *ortogonales*.
4. Convergencia de una *serie de Fourier*.

   a. $f(x)$ si *x* es un punto de continuidad.

   b. $\frac{1}{2}\left[\lim_{x \to x^+_0} f(x) + \lim_{x \to x^-_0} f(x)\right]$ si *x* es un punto de discontinuidad.

   Operaciones de funciones pares e impares:

5. *Par* + *par* = *par*

   Impar + *impar* = *impar*
6. (*Par*) (*par*) = *par*
7. (*Par*) (*impar*) = *impar*
8. (*Impar*) (*impar*) = *par*
9. $f(x)$ *par* con periodo $2\pi \rightarrow f(x)$ se representa por una serie *cosenoidal*, con $b_n = 0$.
10. $f(x)$ *impar* con periodo $2\pi \rightarrow f(x)$ se representa por una serie *senoidal*, con $a_0 = a_n = 0$

Donde: $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\text{sen } nx dx$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

Para *T* periodo arbitrario:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\frac{2n\pi}{T}dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\text{sen}\frac{2n\pi}{T}dt \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2n\pi}{T}t + b_n \cos\frac{2n\pi}{T}t$$

Autoevaluación 8

1. Elegir la opción que da el mínimo periodo de la función:

$$\tan\frac{x}{2}$$

a. 2π *c.* $\pi/2$
b. π *d.* $\pi/4$

2. Graficar en el mismo sistema de coordenadas las siguientes funciones:

$$\operatorname{sen} x,\ \operatorname{sen} x+\frac{1}{3}\operatorname{sen}3x,\ \operatorname{sen} x+\frac{1}{3}\operatorname{sen}3x+\frac{1}{5}\operatorname{sen}5x.$$

3. Hallar la *serie de Fourier* de la siguiente función que tiene periodo 2π

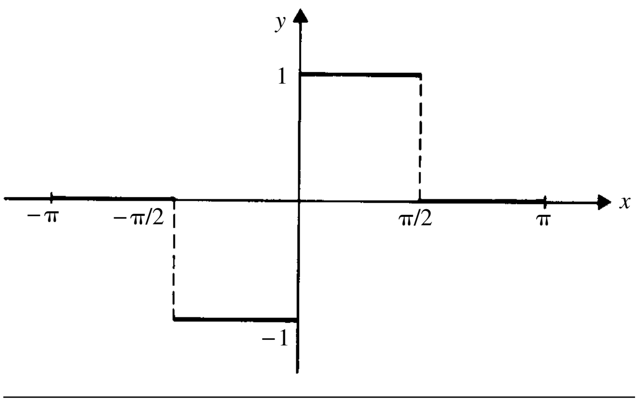


Figura 8-20.

4. Seleccionar la opción que contiene los coeficientes de la *serie de Fourier* correspondientes a la función: $6\cos^2 x$.

a. $a_n=\dfrac{12}{\pi(4-n^2)}\operatorname{sen} n\pi,\ a_0=0,\ b_n=0$

b. $a_0=0,\ a_n=\dfrac{12}{\pi(4-n^2)}\operatorname{sen} n\pi,\ b_n=3$

c. $a_0=3,\ a_2=3,\ a_1=a_3=a_4\ ....=0,\ b_n=0$

d. $a_0=3,\ a_n=0,\ b_n=\dfrac{12}{\pi(4-n^2)}\cos n\pi$

5. Hallar la *serie de Fourier* de:

$$f(x)=x(\pi-x)(\pi+x),\ -\pi<x<\pi$$

6. Elegir la opción que contiene una función *par*:

a. $\ln\ x$ *c.* $e^{|x|}$
b. $x|x|$ *d.* x^3-x^2

7. Establecer si la función $f(x)=x\operatorname{senh} x$ es *par* o *impar*.

8. Elegir la opción que contiene el tipo de función y los coeficientes de Fourier de la función: $f(x)=\begin{cases}1, & -\pi<x<-\pi/2\\ 2, & -\pi/2<x<\pi/2\\ 3, & \pi/2<x<\pi\end{cases}$ periódica con periodo 2π

a. *Par*, $a_0=\dfrac{3}{2},\ a_n=\dfrac{2}{n\pi}\operatorname{sen} n\dfrac{\pi}{2},\ n=1, 2, 3, \ldots,\ b_n=0$

b. Ni *par* ni *impar*, $a_0=\dfrac{3}{2},\ a_n=\dfrac{2}{n\pi}\cos n\dfrac{\pi}{2},\ b_n=\dfrac{2}{n\pi}\operatorname{sen} n\dfrac{\pi}{2},\ n=1, 2, 3, \ldots$

c. *Par*, $a_0=0,\ a_n=0,\ b_n=\dfrac{2}{n\pi}\operatorname{sen} n\dfrac{\pi}{2},\ n=1, 2, 3, \ldots$

d. *Impar*, $a_0=\dfrac{3}{2},\ a_n=0,\ b_n=\dfrac{2}{n\pi}\operatorname{sen} n\dfrac{\pi}{2},\ n=1, 2, 3, \ldots$

9. Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases}x, & -\pi/2<x<\pi/2\\ \pi-x, & \pi/2<x<3\pi/2\end{cases}\qquad T=2\pi$$

a. Ver si es *par* o *impar*.
b. Encontrar su *serie de Fourier*.

10. Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0<x<\pi\\ \pi-x, & \pi<x<2\pi\end{cases}\qquad T=2\pi$$

Elegir la opción que contiene:

a. La función redefinida en $-\pi<x<\pi$
b. Su *serie de Fourier*.

A. *a*. $f(x)=\begin{cases}-x-\pi, & -\pi<x<0\\ x, & 0<x<\pi\end{cases}$ Ni *par* ni *impar*.

b. $-\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)x+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\operatorname{sen}(2n+1)x$

B. *a*. $f(x)=\begin{cases}-x+\pi, & -\pi<x<0\\ x, & 0<x<\pi\end{cases}$ *Impar*

b. $2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\operatorname{sen}(2n+1)x$

C. *a*. $f(x)=\begin{cases}-x+\pi, & -\pi<x<0\\ x, & 0<x<\pi\end{cases}$ *Par*

b. $-\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)x$

D. *a.* $f(x)=\begin{cases} -x-\pi, & -\pi<x\leq 0 \\ x, & 0<x<\pi \end{cases}$ *Impar*

b. $2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\operatorname{sen}(2n+1)x$

11. ¿Cuál es la *serie de Fourier* de la siguiente función?:

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<2 \\ 4-x, & 2<x<4 \end{cases} \qquad \text{con periodo } T=4$$

12. Seleccionar la opción que contiene los *coeficientes de Fourier* de la función:

$$f(x)=\begin{cases} 1, & -1<x<0 \\ -1, & 0<x<1 \end{cases} \qquad \text{con periodo } T=2$$

a. $a_0=-1,\ a_n=-\frac{4}{n\pi},\ n\ impar,\ b_n=0$

b. $a_0=0,\ a_n=-\frac{4}{n\pi},\ n\ impar,\ b_n=0$

c. $a_0=-1,\ a_n=0,\ b_n=-\frac{4}{n\pi},\ n\ impar.$

d. $a_0=0,\ a_n=0,\ b_n=\frac{2}{n\pi}(\cos n\pi-1),\ n=1,\ 2,\ 3,\ ...$

13. Hallar la *serie de Fourier* de la función:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & -1<x<0 \\ e^{-x}, & 0<x<1 \end{cases} \qquad \text{con periodo } T=2$$

14. Elegir la opción que contiene la *serie de Fourier cosenoidal* de la función:

$$f(x)=x(\pi-x),\ 0<x<\pi.$$

a. $\frac{2}{6}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)x$

b. $\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos 2nx$

c. $\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\cos 2nx$

d. $\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\cos(2n+1)x$

15. Obtener la *serie de Fourier senoidal* de la siguiente función:

$$f(x)=(x-1)^2,\ 0<x<1$$

Respuestas de la autoevaluación 8

1. *a*. Porque el periodo natural de la función es π, entonces, $\dfrac{\pi}{1/2}=2\pi.$

2. Conviene observar que cada término añadido a la serie trigonométrica aproxima más a una determinada función.

3. $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos n\dfrac{\pi}{2}\right)\left(\dfrac{1}{n}\right)$ sen nx

4. *c*. Además $f(x)=3(1+\cos 2x)$ (la *serie de Fourier* es la identidad: $\cos^2 A=\dfrac{\cos 2A+1}{2}$).

5. $f(x)=12\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^3}$ sen nx.

6. *c*. *Par* $\leftrightarrow f(-x)=f(x)$ entonces, $e^{|-x|}=e^{|x|}$ es *par*. La opción *a* tiene una función no definida para $x<0$.

La opción *b* sería $f(-x)=(-x)|-x|=-x|x|=-f(x)$ función *impar*.

La opción *d*: $f(-x)=(x)^3-(-x)^2=-x^3-x^2$ no es *par* ni *impar*.

7. $f(-x)=(-x)$ senh $(-x)=(-x)(-\text{senh}\,x)=x\,\text{senh}\,x=f(x)$ es *par*.

8. *a*. Las otras opciones asignan equivocados los coeficientes a las funciones *pares* o *impares*.

9. *a*. *Impar*.

b. $f(x)=\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\text{sen}(2n+1)x$

10. *a*. Porque $a_0=0,\ \ a_n=\dfrac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1),\ \ n=1,2,3,\ldots\ \ b_n=\dfrac{1}{n}(1-\cos n\pi),$

$n=1, 2, 3, \ldots$ y redefinida así no es *par* ni *impar*.

11. $f(x)=1-\dfrac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)\dfrac{\pi}{2}x$

12. *d*. Además, $f(x)=-\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}\text{sen}(2n+1)\pi x$

13. $f(x)=\dfrac{1}{2}(1-e^{-1})+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left[1+(-1)^{n+1}e^{-1}\right]}{1+n^2\pi^2}(\cos n\pi x+n\pi\,\text{sen}\,n\pi x)$

14. *b*. Redefiniendo para que sea *par*

$$f(x)=\begin{cases}-x(\pi+x), & -\pi<x<0\\ x(\pi-x), & 0<x<\pi\end{cases}\qquad T=2$$

$$a_0=\frac{\pi^2}{6},\ \ a_n=-\frac{4}{n^2},\ n\text{ par},\ b_n=0$$

15. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{4}{n^3\pi^3}(\cos n\pi-1)+\dfrac{2}{n\pi}\right]$sen $n\pi x$.

Jean Baptiste Joseph Fourier

De joven, Jean Baptiste Joseph Fourier fue educado por los monjes benedictinos y se sintió atraído por el sacerdocio. Sin embargo, su interés por las matemáticas lo condujo a ser profesor de esa materia en la academia militar.

Fue amigo de Napoleón y en 1798 lo acompañó a Egipto. Durante la ocupación francesa, Napoleón lo nombró gobernador de ese país. De regreso a Francia, ocupó puestos administrativos que le permitieron proseguir sus estudios personales; fue entonces cuando hizo público su famoso teorema de Fourier, en el que afirma que toda función periódica puede ser representada por una superposición de funciones sinusoidales, llamadas series de Fourier. A raíz de este descubrimiento, de mucho impacto, Napoleón le otorgó el título de Barón.

Fourier estaba convencido de que el calor era excelente para el ser humano, y se relata que vivía en un departamento muy caliente vestido siempre con abrigo… Esto lo llevó a publicar, en 1822, su obra más famosa: *La teoría analítica del calor*, donde se origina el análisis dimensional. Kelvin descubrirá ese texto como un gran poema matemático. A los 62 años Fourier murió en París demostrando así que vivir en un lugar sobrecalentado no proporciona una longevidad fuera de lo común.

Jean Baptiste Joseph Fourier
(1768-1830)

Un matemático que no tenga algo de poeta no será nunca un matemático completo.

WEIERSTRASS

$$1=\sqrt{1}=\sqrt{(-1)(-1)}=ii=i^2=-1 \ \ (?)$$

El origen de los números se parece al nacimiento del mito. El hombre empieza a contar y a dominar la naturaleza.

Galileo afirmó que la naturaleza está "escrita en lengua matemática". El arte, la belleza de la verdad, la armonía y la proporción se fusionan en la matemática. Es en sí misma fondo y forma, herramienta y meta, búsqueda y hallazgo, coronamiento y base, intuición y empirismo.

Estamos en el momento en el que la matemática occidental penetra en los mundos simbólicos del espacio, amplifica y espiritualiza la teoría de las funciones y de los invariantes (ciertas propiedades del espacio, inalterables a pesar de pertenecer a las transformaciones).

PARADOJA

Hagamos: $\ln(-1)=x$

Entonces, $\ln(-1)^2=2\ln(-1)=2x$

Además, $\ln(-1)^2=\ln(1)=0$

Concluimos: $2x=0$

$\therefore \ln(-1)=0.$ (?)

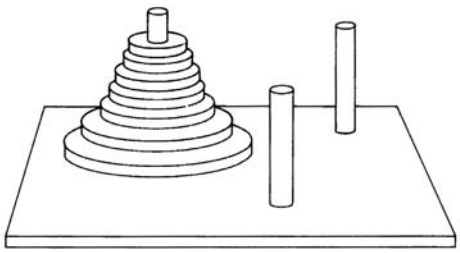
Propiedades metafísicas del número 8

Representa el principio de la evolución y la involución, de la luz y la oscuridad, de lo elemental y lo trascendental. Pitágoras lo llamó armonía del Universo, inspiración divina, justicia. Simboliza la moderación, la evidencia de lo verdadero, la equidad y la ecuanimidad.

Numeración romana (aproximadamente 200 a. C.)

1	5	10	50	100	500	1 000	10 000
I	**V**	**X**	**L**	**C**	**D**	**M**	**CCIƆƆ**

La torre de Brahma



En el templo de Benarés se guardaba la bandeja de cobre en la que están insertadas tres agujas de diamante, más finas que el cuerpo de una abeja. En el momento de la Creación, Dios puso **64** discos de oro puro en una de las agujas, ordenados de mayor (el que está sobre la bandeja) a menor. Es la torre de Brahma. Los sacerdotes del templo, días tras día, mueven los discos haciéndolos pasar de una aguja a otra, siguiendo las leyes fijas e inmutables de Brahma: el sacerdote en turno no debe mover más de un disco a la vez y no puede ponerlo encima de uno de menor tamaño. El día en que los **64** discos hayan sido trasladados de la aguja en la que Dios los puso a crear el mundo a otra aguja, ese día la torre, el templo y todos los brahamanes se derrumbarán, quedando reducidos a ceniza y el mundo desaparecerá.

El número de traslados necesarios para que se cumpla la profecía es:

$$2^{64} - 1$$

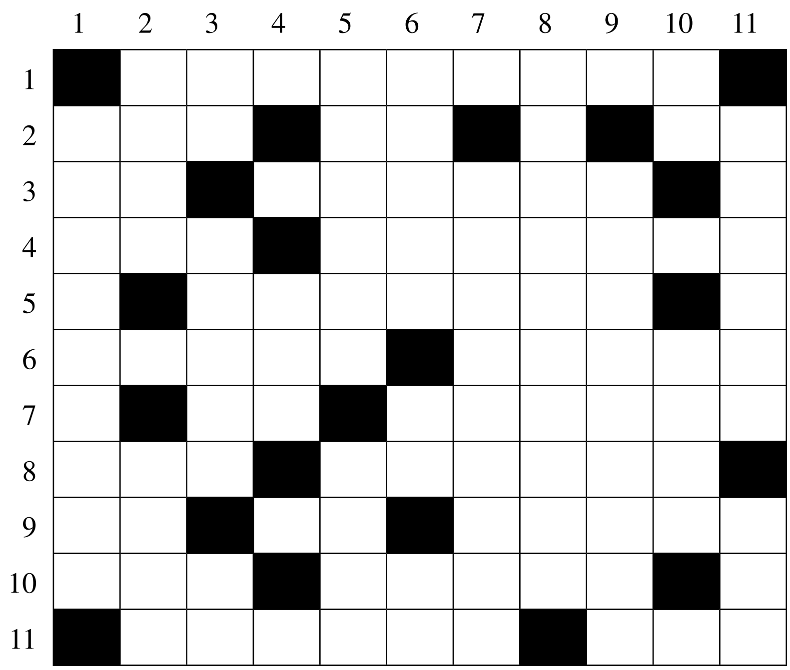
Suponiendo que los sacerdotes realicen un cambio por segundo y trabajen las **24** horas del día, durante los **365** días del año, tardarían **58 454 204 609** siglos, más unos **6** años, si no se equivocan…

HORIZONTALES

1. Atascarán, enredarán.
2. Tonto, idiota. Interjección para animal. Vocal. Noventa y nueve.
3. Nota musical. República de África. Cincuenta.
4. Astilla resinosa que se usa para iluminar. Bizcocho, pasta de harina y azúcar.
5. Símbolo del oxígeno. Físico-matemático francés (1768-1830). Cinco.
6. Explicación de un texto oscuro o difícil. Ser fantástico con figura de enano.
7. Vocal. Símbolo del sodio. Aguas sólidas.
8. Nave. Admiraciones, asombros.
9. Símbolo del aluminio. Dirigirse. Trajes de los magistrados.
10. Pase la vista por el escrito. Volcán de Costa Rica. Uno en número romano.
11. Escapáis, marcháis. Todavía.

VERTICALES

1. Perpendicular.
2. Baje, desmonte, descienda. Consonante. Símbolo de los números cardinales transfinitos.
3. Interjección (se usa repetida). Afónico, ronco. símbolo de oro.
4. Vocal.Vocal. Se atreve. Una de las rayas del espectro solar, según Fraünhofer en la región de añil.
5. Idioma. Parte delantera de las naves.
6. Recipiente donde se pisa la uva. Tiene. Letras de la palabra risa.
7. Símbolo del argón. Óxido de hierro muy duro (en plural).
8. Saturemos, atiborremos, abarrotemos.
9. Vocal. Parte de la física que estudia las variaciones de la atmósfera.
10. Conjunción copulativa. Consonante. Río de Europa (es parte de la frontera de Francia, Bélgica y Holanda). Símbolo de unión en la teoría de conjuntos.
11. Piezas de hierro largas y delgadas con cabeza y punta. Preposición que indica carencia.



9 Métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales

Niels Henrik Abel
(1802-1829)

Método de Euler

A veces no es posible obtener la solución de una ecuación diferencial, pero sí se puede encontrar una aproximación satisfactoria. Estas aproximaciones se hallan usando métodos numéricos, de los cuales se van a mencionar los más utilizados.

Método de Euler

Considera aproximar la solución de la ecuación:

$$y' = f(x, y), \quad \text{con} \quad y(x_0) = y_0,\ x_0 \le x \le x_n.$$

Para ello, la curva solución que pasa por el punto (x_0, y_0), se sustituye por segmentos de recta que son tangentes a la curva en uno de sus puntos frontera.

La solución aproximada en $x = b$, se encuentra dividiendo el segmento (x_0, x_n) en n partes iguales de longitud h, de tal forma que $h = x_{i+1} - x_i$ para $i = 0, 1, \ldots, n$. El valor aproximado de la solución buscada en los puntos x_i se designará por y_i. Se puede encontrar un punto

$$(x_1, y_1) = (x_0 + h, y_1)$$

y así sucesivamente para (x_2, y_2), (x_3, y_3), etcétera.

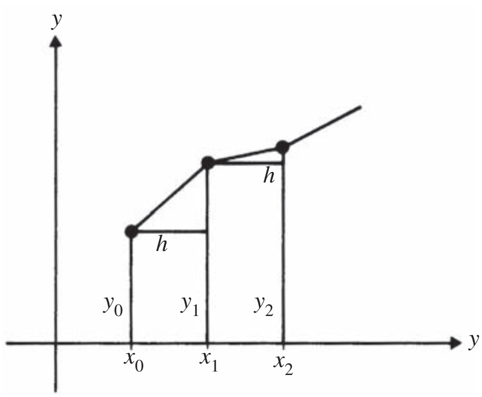


Figura 1-9.

De la ecuación de la recta tenemos:

$$\frac{y_1 - y_0}{(x_0 + h_0) - x} = y_0' \quad \text{o} \quad y_1 = y_0 + hy_0'$$

$$\text{donde } y_0' = f(x_0, y_0)$$

En forma análoga:

$$y_2 = y_1 + hy_1', \quad \text{donde} \quad y_1' = f(x_1, y_1)$$

$$y_3 = y_2 + hy_2', \quad \text{donde} \quad y_2' = f(x_2, y_2)$$

Y en general:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hy_n', \quad \text{donde} \quad y_n' = f(x_n, y_n) \\ \text{y } x_n = x_0 + nh \end{cases}$$

EJEMPLO 1

Dado el problema con valor inicial:

$$y' = x - y + 1, \quad \text{para: } y(0) = 1 \text{ y } 0 \le x \le 1,$$

mediante el método de Euler obtener una aproximación de la solución con:

$$h = 0.1 \quad \text{y} \quad N = 10.$$

Sea $f(x, y) = x - y + 1$, donde $f(x_n, y_n) = x_n - y_n + 1$

entonces,

$$y_{n+1} = y_n + h(x_n - y_n + 1)$$

Para $h = 0.1$ y $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + (0.1)(x_0 - y_0 + 1) \\ &= 1 + (0.1)(0 - 1 + 1) \\ &= 1 && \text{para } x = 0.1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + (0.1)(x_1 - y_1 + 1) \\ &= 1 + (0.1)(0.1 - 1 + 1) \\ &= 1 + 0.01 \\ &= 1.01 && \text{para } x_2 = 0.2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_3 &= y_2 + (0.1)(x_2 - y_2 + 1) \\ &= 1.01 + (0.1)(0.2 - 1.01 + 1) \\ &= 1.029 && \text{para } x_3 = 0.3, \end{aligned}$$

etcétera.

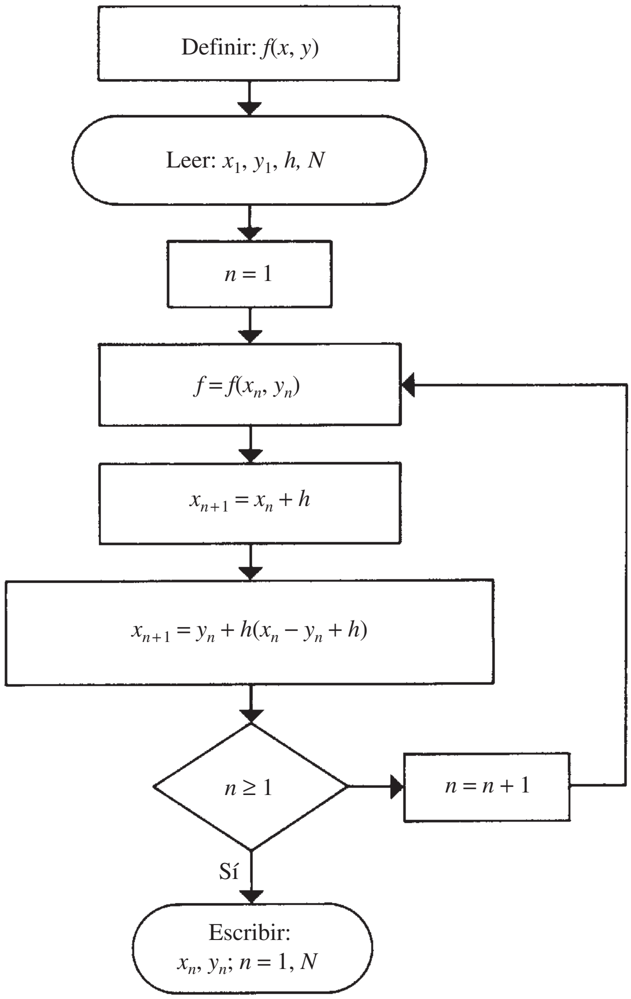
Veamos todos los resultados en la siguiente tabla:

x_n	y_n	*Valor real*	*Error*	*Porcentaje de error relativo*
0.0	1.00000	1.00000	0.00000	0.00
0.1	1.00000	1.00483	0.00483	0.48
0.2	1.01000	1.01873	0.00873	0.85
0.3	1.02900	1.04081	0.01181	1.13
0.4	1.05610	1.07032	0.01422	1.33
0.5	1.09049	1.10653	0.01604	1.45
0.6	1.13144	1.14881	0.01737	1.51
0.7	1.17829	1.19658	0.01829	1.53
0.8	1.23046	1.24932	0.01886	1.51
0.9	1.28742	1.30656	0.01915	1.46
1.0	1.34867	1.36788	0.01921	1.40

Donde el error relativo porcentual $= \left|\dfrac{\text{Error}}{\text{valor verdadero}}\right| \times 100.$

Aunque el error es relativamente pequeño, usando otros métodos se puede reducir al mínimo.

Algoritmo computacional para resolver el ejemplo 1.



Define la función dada

Lee los valores iniciales $x_1 = 0$ y $y_1 = 1$, el valor del incremento $h = 0.1$ y el número de divisiones del intervalo, $N = 0$

Inicializa el contador. Evalúa la función.

Incrementa la variable independiente.

Calcula el siguiente valor.

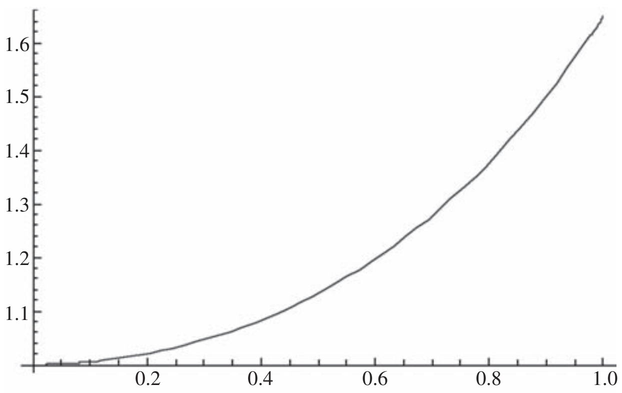
Pregunta si llegó al último valor del intervalo.

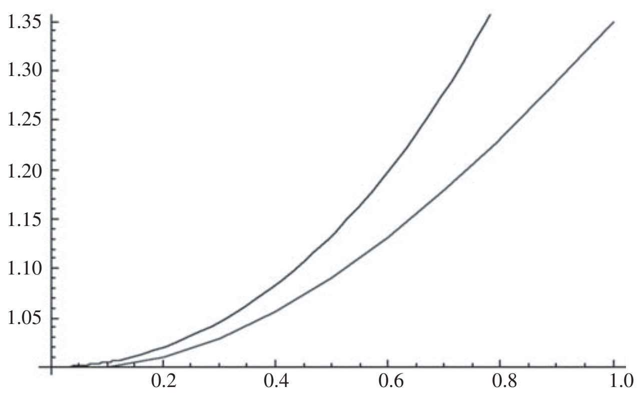
Da los resultados.

`Mathematica` ejecuta el algoritmo como:

```
Clear[f,x,y,h]
f[x_,y_]=x-y+1;
h=.1;
y[0]=1;
x[n_]=n h;
y[n_]:=y[n]=y[n-1]+h f[x[n-1],y[n-1]]
ytable = Table[y[i],{i,0,10}]
{1,1,1.01,1.029,1.0561,1.09049,1.13144,1.1783,1.23047,
1.28742,1.34868}
```

```
intpts1=Table[{x[i-1],ytable[[i]]},{i,1,Lenght[ytable]}]
{{0,1},{0.1,1},{0.2,1.01},{0.3,1.029},{0.4,1.0561},{0.5,1.09
049},{0.6,1.13144},{0.7,1.1783},{0.8,1.23047},{0.9,1.28742},
{1.,1.34868}}
plot1=ListPlot[intpts1,PlotJoined→True,DisplayFunction→>Identity];
exactplot=Plot[Exp[(x^2)/2],{x,0,1},PlotStyle→GrayLevel[.2],
DisplayFunction→Identity]
Show[plot1,exactplot,DisplayFunction→$DisplayFunction]
```





Método de Euler mejorado

Aplica la siguiente fórmula llamada también fórmula de Heun:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n) + hf(x_n, y_n)\right]$$

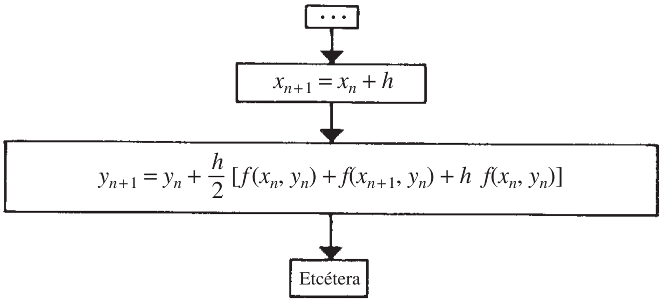
La parte $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$ *predice* un valor de $y(x_1)$

y $y_1 + y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_0 + hf(x_0, y_0)\right]$ *corrige* la estimación anterior.

EJEMPLO 2

Establecer el algoritmo que aproxima la solución de la ecuación del ejemplo 1 por el método de Euler mejorado.

Básicamente se usa el mismo diagrama de flujo, sustituyendo la instrucción que calcula el valor de y_{n+1}.



Método de Taylor

El desarrollo de una función en serie de Taylor es:

$$y(x) = y(a) + y'(a)\frac{(x-a)}{1!} + y''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} y^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$

donde $y(x)$ tiene derivadas de todos los órdenes y converge en $|x-a| < R$.

El algoritmo apropiado para calcular una aproximación de y_{n+1} de orden p es:

$$y_{n+1} = y_n' + y_n h + y_n''\frac{h^2}{2!} + y_n'''\frac{h^3}{3!} + \ldots + y_n^{(p)}\frac{h^p}{p!}$$

EJEMPLO 1

Aplicar el método de Taylor de orden tres a la ecuación:

$$y' = x - y + 1,\ y(0) = 1, \quad 0 \le x \le 1,\ h = 0.1, \quad N = 10$$

Como $y' = x - y + 1$, entonces, $y'' = 1 - y' = 1 - x + y - 1$

$$= -x + y$$

Por consiguiente:

$$\begin{aligned} y_0' &= x_0 - y_0 + 1 \\ &= 0 - 1 + 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

y luego,

$$\begin{aligned} y'' &= -x_0 + y_0 \\ &= -0 + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + y_0'(0.1) + y_0''\frac{(0.1)^2}{2} \\ &= 1 + 0(0.1) + 1(0.005) \\ &= 1.005 \end{aligned}$$

Los sucesivos resultados se muestran en la siguiente tabla:

x_n	y_n	*Valor real*	*Error*	*Porcentaje de error relativo*
0.0	1.00000	1.00000	0.00000	0.00
0.1	1.00500	1.00483	0.00017	0.02
0.2	1.01902	1.01873	0.00029	0.03
0.3	1.04112	1.04081	0.00031	0.03
0.4	1.07071	1.07032	0.00039	0.04
0.5	1.10699	1.10653	0.00046	0.04
0.6	1.14932	1.14881	0.00051	0.04
0.7	1.19713	1.19658	0.00055	0.05
0.8	1.24990	1.24932	0.00058	0.05
0.9	1.30715	1.30656	0.00059	0.05
1.0	1.36847	1.36778	0.00059	0.04

Tomando más términos de la serie se obtienen mejores aproximaciones. Este método se ajusta más al valor real que el de Euler.

Método de Runge-Kutta

Es uno de los procedimientos más exactos, sobre todo de cuarto orden. El método procura coincidir con un desarrollo de Taylor hasta el término h^4. De hecho, el método de Euler es una aproximación de Runge-Kutta de primer orden.

Para encontrar la solución aproximada del problema con valor inicial:

$$y' = f(x, y) \quad \text{con} \quad y(x_0) = y_0,$$

se usa la siguiente fórmula:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

$$\begin{aligned} \text{donde } k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) \\ k_3 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right) \\ k_4 &= hf\left(x_n + h, y_n + k_3\right) \end{aligned}$$

EJEMPLO 1

Mediante el método de Runge-Kutta obtener la solución aproximada de:

$$y' = x - y + 1, \qquad y(0) = 1, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

con $h = 0.1$ y $N = 9$

Tomando $n = 0$, se obtienen primero los valores de k_1, k_2, k_3 y k_4.

$$\begin{aligned} k_1 &= (0.1) f(x_0, y_0) \\ &= (0.1)(x_0 - y_0 + 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= (0.1) f\left[x_0 + \frac{1}{2}(0.1), y_0 + \frac{1}{2}(0)\right] \\ &= (0.1)\left(x_0 + \frac{1}{2}(0.1) - y_0 + 1\right) \\ &= 0.005 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3 &= (0.1) f\left(x_0 + \frac{1}{2}(0.1), y_0 + \frac{1}{2}(0.005)\right) \\ &= (0.1)(x_0 + \frac{1}{2}(0.1) - y_0 - \frac{1}{2}(0.005) + 1) \\ &= 0.00475 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_4 &= (0.1) f(x_0 + (0.1), y_0 + 0.00475) \\ &= (0.1)(x_0 + 0.1 - y_0 - 0.00475 + 1) \\ &= 0.009525 \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \\ &= 1 + \frac{1}{6}(0. + 0.01 + 0.0095 + 0.009525) \\ &= 1.0048375 \end{aligned}$$

Se observa que este valor coincide con el real hasta la quinta cifra decimal. Tomando $n = 1, 2, \ldots 10$, se obtienen los demás valores, como se ve en la siguiente tabla:

x_n	y_n	*Valor real*	*Error*	*Porcentaje de error relativo*
0.0	1.00000	1.00000	0.00000	0.00
0.1	1.00483	1.00483	0.00000	0.00
0.2	1.01873	1.01873	0.00000	0.00
0.3	1.04081	1.04081	0.00000	0.00
0.4	1.07032	1.07032	0.00000	0.00
0.5	1.10653	1.10653	0.00000	0.00
0.6	1.14881	1.14881	0.00000	0.00
0.7	1.19658	1.19658	0.00000	0.00
0.8	1.24932	1.24932	0.00000	0.00
0.9	1.30656	1.30656	0.00000	0.00
1.0	1.36787	1.36788	0.00001	0.007

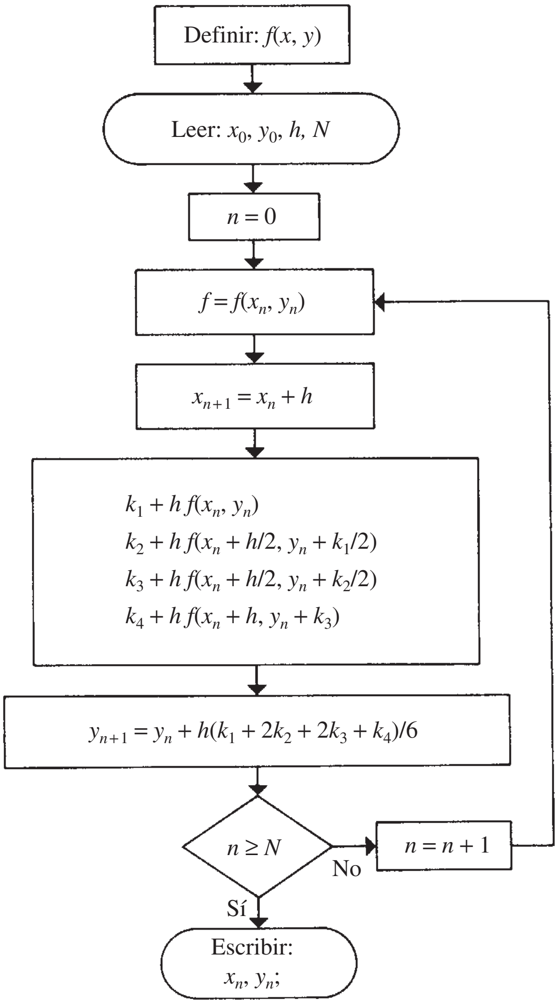
Si tomáramos ocho cifras decimales, el error ya es apreciable, pero no significativo. Sea, por ejemplo, $n = 7$, entonces, $y_8 = 1.24932896$ es el valor exacto en la solución $y = x + e^{-x}$, para $x = 0.8$. Utilizando el método de Runge-Kutta, se obtiene: $y_8 = 1.24932928$, con error $= 0.00000128$ y 0.00010245% de error relativo. Esto muestra la eficacia del método.

Comparación de los métodos utilizados para la solución aproximada de:

$$y' = x - y + 1,\quad y(0) = 1,\quad 0 \le x \le 1,\qquad h = 0.1$$

x_n	*Euler*	*Taylor*	*Runge-Kutta*	*Valor real*
0.0	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
0.1	1.00000	1.00500	1.00483	1.00483
0.2	1.01000	1.01902	1.01873	1.01873
0.3	1.02900	1.04112	1.04081	1.04081
0.4	1.05610	1.07071	1.07032	1.07032
0.5	1.09049	1.10699	1.10653	1.10653
0.6	1.13144	1.14932	1.14881	1.14881
0.7	1.17829	1.19713	1.19658	1.19658
0.8	1.23046	1.24990	1.24932	1.24932
0.9	1.28742	1.30715	1.30656	1.30656
1.0	1.34867	1.36847	1.36787	1.36788

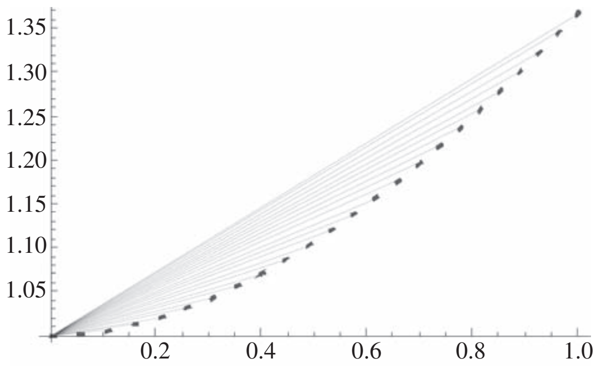
Algoritmo computacional para resolver el ejemplo 1.



Este algoritmo se muestra en una primera aproximación con `Mathematica` como:

```
Clear[f,x,yrk,h]
f[x_,y_]:=x-y+1
h=.1;
yrk[0]=1;

x[n_]:=n  h
yrk[n_]:=Module[{k1,k2},
  k1=h  f[x[n-1],yrk[n-1]];
  k2=h  f[x[n-1]+h,yrk[n-1]+k1];
  yrk[n]=yrk[n-1]+(1/2)(k1+k2)]

rktable1 = Table[yrk[i],{i,0,10}]

{1,1.005,1.01902,1.04122,1.0708,1.10708,1.1494,
1.19721,1.24998,1.30723,1.36854}
```

```
rkpts1=Table[{x[i-1],rktable1[[i]],[]{i,1,Lenght[rktable1]}]

{{0,1},{0.1,1.005},{0.2,1.01902},{0.3,1.04122},{0.4,1.0708},{0.5,
1.10708},{0.6,1.1494},{0.7,1.19721},{0.8,1.24998},{0.9,1.30723},
{1.,1.36854}}

Clear[plot5]
plot5=ListPlot[rkpts1,PlotJoined→True,
   PlotStyle→Dashing[{.01,.04}],
   DisplayFunction→Identity];

Show[plot1,plot5,exactplot,[]DisplayFunction→$DisplayFunction]
```



Resumen

Métodos numéricos

Para resolver $y' = f(x, y)$, con $y(x_0) = y_0, x_0 \le x \le x_n$ y $h = \dfrac{x_n - x_0}{n}$

Método de Euler

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

Método de Euler mejorado

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1})y_n + hf(x_n, y_n)\right]$$

Método de Taylor

$$y_{n+1} = y_n + y_n' \ h + y_n'' \frac{h^2}{2!} + y_n''' \frac{h^3}{3!} + \ldots + y_n^{(p)} \frac{h^p}{p!}$$

Método de Runge-Kutta

$$y_{n+1} = y_n + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$$

donde

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$
$$k_2 = hf(x_n + h/2, y_n + k_1/2)$$
$$k_3 = hf(x_n + h/2, y_n + k_2/2)$$
$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$$

Autoevaluación 9

1. Obtener una aproximación por el método de Euler, con cinco cifras decimales de la solución de las ecuaciones:
   a. $y' = 2xy$, $y(1) = 1$, $h = 0.1$, $N = 5$
   b. $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$, $h = 0.1$, $N = 5$
2. Utilizar el método de Euler mejorado para obtener la solución aproximada de las ecuaciones del ejercicio 1.
3. Hallar la aproximación de la solución de las ecuaciones del ejercicio 1 mediante el método de Taylor, tomando tres términos del desarrollo.
4. Usar el método de Runge-Kutta para:
   a. $y' = 2xy$, $y(1) = 1$, $h = 0.1$, $N = 5$
   b. $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$, $h = 0.1$, $N = 5$
   c. $y' = (x + y - 1)^2$, $y(0) = 2$, $h = 0.1$, $N = 5$, con cuatro cifras decimales.

Respuestas de la autoevaluación 9

1. *a*, **2.** *a*, **3.** *a*, **4.** *a*.

$$y' = 2xy,\ y(1) = 1$$

x_n	*Euler*	*Euler mejorado*	*Taylor*	*Runge-Kutta*	*Valor real*
1.0	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
1.1	1.20000	1.23200	1.23000	1.23367	1.23368
1.2	1.46400	1.54788	1.54267	1.55270	1.55271
1.3	1.81536	1.98314	1.97277	1.99371	1.99372
1.4	2.28735	2.59077	2.57210	2.61169	2.61170
1.5	2.92781	3.45091	3.48520	3.49030	3.49034

1. *b*, **2.** *b*, **3.** *b*, **4.** *b*,

$$y' = 1 + y^2,\ y(0) = 0$$

x_n	*Euler*	*Euler mejorado*	*Taylor*	*Runge-Kutta*	*Valor real*
0.0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.1	0.10000	0.10050	0.10000	0.10033	0.10033
0.2	0.20100	0.20304	0.20201	0.20270	0.20271
0.3	0.30504	0.30982	0.30819	0.30933	0.30934
0.4	0.41434	0.42342	0.42106	0.42280	0.42280
0.5	0.53151	0.54704	0.54375	0.54629	0.54630

4. *c*.

$$y' = (x + y - 1)^2,\ y(0) = 2$$

x_n	*Runge-Kutta*	*Valor real*
0.0	2.0000	2.000000
0.1	2.1230	2.123048
0.2	2.3085	2.308498
0.3	2.5958	2.595765
0.4	3.0649	3.064963
0.5	3.9078	3.908223

Niels Henrik Abel

El más célebre de los matemáticos escandinavos: Niels Henrik Abel, fue hijo del pastor de un pueblito noruego. Al enterarse de su predisposición para las matemáticas, sus profesores le aconsejaron, cuando apenas tenía 16 años, la lectura de los grandes libros, incluyendo las *disquisitiones,* de Gauss.

Durante estas lecturas, Abel se dio cuenta que el teorema del binomio está demostrado solamente en el caso de unos exponentes racionales y lo extiende al caso general. A los 18 años, su padre murió y Abel quedó como responsable de la familia. En esta época buscó la solución de la ecuación de grado cinco y, por un momento, creyó haberla encontrado. Pero se dio cuenta de su error y en 1824 publicó una memoria titulada: *Sobre la resolución algebraica de las ecuaciones*, en la cual demostró que no existe tal solución expresable en función de los coeficientes; de esta forma terminó con el problema.

Convencido de la importancia de sus trabajos, Abel visitó a Gauss en Alemania. Desafortunadamente, al enterarse este último de que el joven le quería presentar algo relacionado con la ecuación de grado cinco se enojó y se negó a recibirlo (cabe comentar aquí que Gauss con frecuencia recibía soluciones, todas equivocadas desde luego). Poco más tarde, buscó atraer la atención de los matemáticos parisienses como Cauchy y Legendre, pero sin éxito.

Debido a su pobreza, sus condiciones de vida eran pésimas y Abel murió en 1829 de tuberculosis. Un manuscrito con Cauchy reapareció en 1841 y resultó contener trabajos de la mayor importancia sobre las funciones elípticas. De esta manera, el nombre de Abel empezó a pronunciarse, y a modo de arrepentimiento hacia el noruego que murió pobre y desconocido, la matemática perpetúa su existencia a través de expresiones como el teorema de Abel, las funciones de Abel, los grupos abelianos, etcétera.

Niels Henrik Abel
(1802-1829)

Sistema, poeta, sistema
Empieza por contar las piedras,
luego contarás las estrellas.

LEÓN FELIPE

Paradoja

La regla de los signos nos impone la siguiente igualdad

$$(-1)/1 = 1/(-1).$$

Entonces, afirmamos que la razón del menor de dos números al mayor de ellos es igual a la razón del mayor al menor. (?)

Anécdota

Leibniz vio en París la máquina de calcular de Pascal y diseñó otra mucho más perfecta. Sin embargo, ningún mecánico pudo montar con la debida pulcritud un aparato tan complicado, a pesar de que el mismo Leibniz invirtió nada menos que 24 mil táleros en el proyecto.

Propiedades metafísicas del número 10

Representa el principio de la periodicidad, el de causa y efecto, el de nutrición y renovación, el de lo infinito en potencia. Pitágoras lo llama: mundo, cielo, destino, eternidad, alfabeto y aritmética, porque comprende todos los sonidos y todos los números. Es el principio viviente en su progresión. Representa lo trascendente en el pensamiento y la dedicación en la mano de obra.

Numeración binaria. Siglo XVII d. C.

La base es 2 y los elementos son 0 y 1.

Ejemplo: el número decimal 3478 en base dos es el número:

110110010110

¿Cómo se obtuvo?

Dividiendo sucesivamente 3478 entre 2 y anotando los residuos desde el último al primero.

El número binario 1010101 en base decimal es 85

3478	2										
14	1739	2									
07	13	869	2								
18	19	06	434	2							
0	1	09	03	217	2						
		1	14	017	108	2					
				1	08	54	2				
					0	14	27	2			
						0	07	13	2		
							1	1	6	2	
									0	3	2
										1	1

$3478_{\text{dos}} = 110110010110$

Escribir 1010101 en numeración decimal.

$2^0 = 1$

$2^1 = 2$

$2^2 = 4$

$2^3 = 8$

$2^4 = 16$

$2^5 = 32$

$2^6 = 64$

$$(1\times 2^6)+0+(1\times 2^4)+0+(1\times 2^2)+0+(1\times 2^0) =$$
$$64 \quad + \quad 16 \quad + \quad 4 \quad + \quad 1 \quad = 85$$

Comprobación:

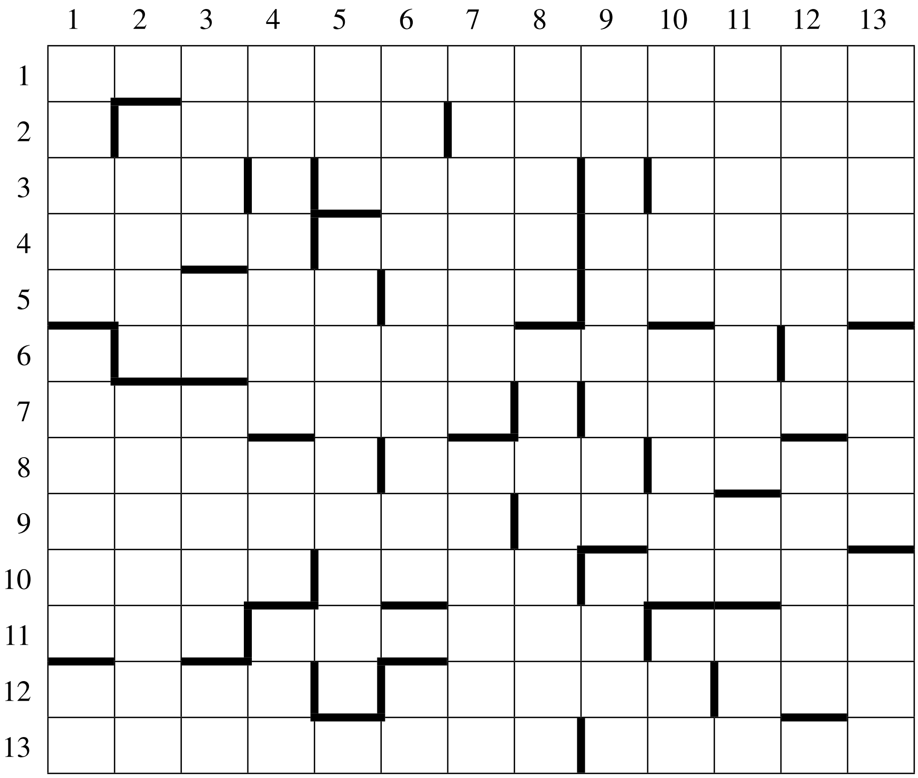
85	2					
05	42	2				
1	02	21	2			
	0	1	10	2		
			0	5	2	
				1	2	2
					0	1

HORIZONTALES

1. Ecuación diferencial parcial, lineal en el mayor orden de las derivadas que aparecen en dicha ecuación.
2. Cincuenta. Aparato primitivo de cálculo. Socorreré, auxiliaré.
3. Coge. Consonante. Resonancias, repeticiones. Uno. Gran duque de Moscovia.
4. Solitaria, única. Adulación, halago. Salgo, emprendo un viaje.
5. Endereza, atiesa. Enfermedad, perjuicio. Aproximan, trasladan.
6. Símbolo del fósforo. Medida, equilibrio, comparación. Símbolo químico del molibdeno.
7. Goma elástica, vulcanizada, negra y dura para hacer aislantes. Símbolo del oxígeno. Ofuscar, tapar, perder la vista.
8. (Al revés) mamíferos rumiantes. Ecuaciones cuya expresión matemática es $z_{xx} = z_{tt}$. Cercado, valla.
9. Suprimirá. Lengua de tierra que une dos continentes (plural).
10. Puñal, barniz. Hermosa.
11. Habitante de la Tierra del Fuego. Loro, cotorra. Sino, destino, suerte.
12. Suerte, sino, fatalidad. Símbolo del azufre. Vate. Dios escandinavo.
13. Éster de la glicerina y del ácido valérico, existe en el aceite de delfín. Pequeño de estatura.

VERTICALES

1. Aula, asignatura. Gravoso, onoroso. Letras de ave.
2. Vocal. (Al revés) de forma natural del lenguaje. Calma, tranquilidad.
3. Matemático noruego (1802-1829). Encaminarse. Gusano. Símbolo del aluminio.
4. Conserva, desecación. Onda en el agua. Preposición inseparable que indica prioridad.
5. Hielo en inglés. Urbes, metrópolis, riquezas. Consonante.
6. Tren. Consonante. Letra griega que representa una constante de los círculos.
7. Línea isobárica. País, patria.
8. Relativo a la nariz. Familia de algas en los mares cálidos.
9. Dícese de la ecuación de Laplace $z_{xx} + z_{yy} = 0$, en plural. Lancha, canoa.
10. Preparar, arreglar. Uno de los puntos cardinales. Tienen.
11. Matemático francés (1763-1813), autor de: *Mecánica analítica*. Mil cincuenta. Lía, anuda.
12. Interrogación, figura retórica. Dosel, carpa, lona. Símbolo del nitrógeno.
13. Especie de sera. Uno de los palos de la baraja española. Antiguamente: adoro.



Bibliografía

Ayres, F. *Ecuaciones diferenciales*. Serie Schaum, McGraw-Hill, 1969.

Boyce, DiPrima. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. 3a. edición, Limusa, 1980.

Bronson, R. *Ecuaciones diferenciales modernas*. Serie Schaum, McGraw-Hill, 1976.

Cantú, L. L. *Electricidad y magnetismo para estudiantes de ciencias e ingeniería*. 2a. reimpresión, Limusa, 1980.

Counrant, R., Robbins, H. *¿Qué es la matemática?* 5a. edición, Aguilar, 1971.

De Guzmán, M. *Ecuaciones diferenciales ordinarias. Teoría de estabilidad y control.* Alhambra, 1980.

Demidovich, B. *Problemas y ejercicios de análisis matemático*, 6a. edición, Paraninfo, 1978.

Derrick/Grossman. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*. Fondo Educativo Interamericano, 1984.

Dettman, J. W. *Introducción al álgebra lineal y a las ecuaciones diferenciales*. McGraw-Hill, 1975.

Draper, J., Klingman, J. *Mathematical Analysis*. 2a. edición, Harper & Row, 1972.

Finizio y Ladas. *An introduction to differential equations, with difference equations. Four series, and partial differential equations*. Wadsworth, Inc., 1982.

Iglesias, J. *La arcana de los números*. 7a. edición, Kier, 1978.

Karlson, P. *La magia de los números*, 2a. edición, Labor, 1966.

Kells, L. M. *Ecuaciones diferenciales elementales*. 5a. edición, McGraw-Hill, 1976.

Kiseliov, A., Kransnov, M., Makarenko, G. *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias*. Mir, 1968.

Kreider, Kuller, Ostberg. *Ecuaciones diferenciales*. 5a. edición, Interamericana, 1977.

Kreysing, E. *Advanced engineering mathematics,* 4a. edición, Jonh Wiley Sons, 1979.

Newman J. R. *Sigma. El mundo de las matemáticas.* Seis tomos. 8a. edición, Grijalbo, 1980.

Piskunov, N. *Cálculo diferencial e integral*. Tomo II. 5a. edición, Mir, 1980.

Poincaré, H. *Filosofía de la ciencia*. Conacyt, 1981.

Rainville, E., Bendient, Ph. *Ecuaciones diferenciales*. 5a. edición, Interamericana, 1977.

Simmons, F. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*. McGraw-Hill, 1977.

Sokolnikoff, I. S. , Redheffer, R. M. *Mathematics of physics and modern engineering*. McGraw-Hill, 1958.

Spiegel, M. R. *Applied differential equations*. 3a. edición, Prentice-Hall, 1981.

——— *Transformadas de Laplace*. Serie Schaum. McGraw-Hill, 1971.

Wylie, C. R. *Differential equations*. McGraw-Hill, 1979.

Zill, D. *A first course in differential equations with applications*, 2a. edición, PWS Wadsworth, 1982.

Índice analítico