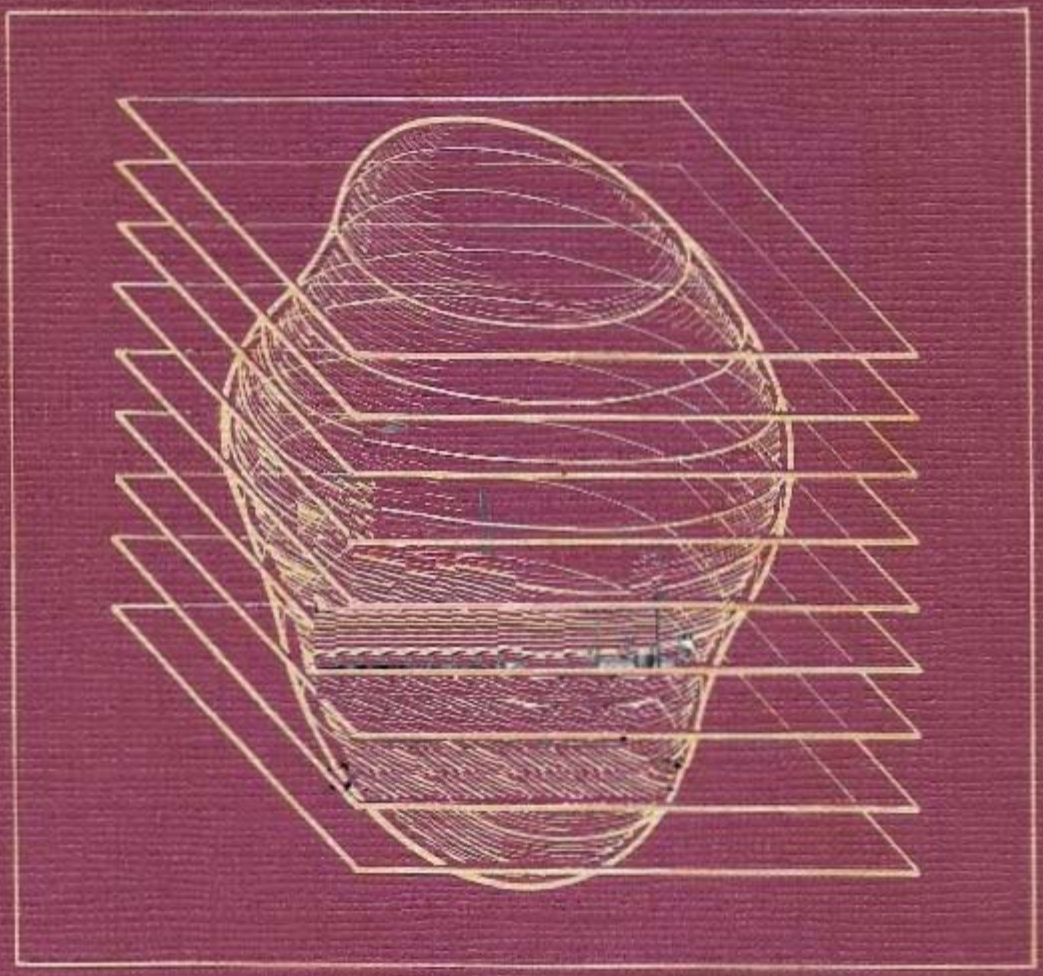
ANALISIS REAL Y COMPLEJO

walter rudin



Alhambra

W. RUDIN

Profesor de Matemáticas de la Universidad de Wisconsin.
Madison

ANALISIS REAL Y COMPLEJO

Versión española de

A. Casal Piga

Profesor Adjunto de la Facultad de Matemáticas
de la Universidad Complutense de Madrid

Alhambra

Edición original:

REAL AND COMPLEX ANALYSIS, 2nd edition

© Copyright, 1966, 1974 by McGraw-Hill, Inc.
All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical. photocopying, recording, or otherwise, without the prior permission of the Copyright owners.

Primera edición española, 1979

© EDITORIAL ALHAMBRA, S. A.
R. E. 182
Madrid-1. Claudio Coello, 76

Delegaciones:

Barcelona-8. Enrique Granados, 61
Bilbao-14. Doctor Albiñana, 12
La Coruña. Pasadizo de Pernas, 13
Málaga. La Regente, 5
Oviedo. Avda. del Cristo, 9
Santa Cruz de Tenerife. General Porlier, 14
Sevilla-12. Reina Mercedes, 35
Valencia-3. Cabillers, 5
Zaragoza. Concepción Arenal, 25

México

Editorial Alhambra Mexicana, S. A.
México 6, D.F. Londres, 25-404
Apartado postal 61-275

Rep. Argentina

Editorial Siluetas, S. A.
Buenos Aires-1201. Bartolomé Mitre, 3745/49

n c 05230080

Cubierta: Antonio Tello

ISBN 84-205-0651-6

ISBN 0-07-054233-3, McGraw-Hill, Inc.,
Nueva York, edición original

Depósito legal: M. 31079-1979

Impreso en España - Printed in Spain

Selecciones Gráficas - Carretera de Irún, km. 11,500 - Madrid (1979)

INDICE GENERAL

Capítulos — *Páginas*

PREFACIO ... IX

PRÓLOGO ... XI

1 **Integración abstracta** ... 1

Notaciones de teoría de conjuntos y terminología, 2. El concepto de medibilidad, 3. Conjuntos de Borel, 7. Funciones simples, 10. Propiedades elementales de las medidas, 11. Un comentario sobre terminología, 13. Aritmética en $[0, \infty]$, 13. Integración de funciones positivas, 14. Integración de funciones complejas, 19. El papel de los conjuntos de medida nula, 22. Ejercicios, 26.

2 **Medidas de Borel positivas** ... 28

Espacios vectoriales, 28. Preliminares topológicos, 30. El teorema de representación de Riesz, 35. Propiedades de regularidad de las medidas de Borel, 41. Medida de Lebesgue, 43. Propiedades de continuidad de las funciones medibles, 47. Ejercicios, 49.

3 **Espacios L^p** ... 53

Funciones convexas y desigualdades, 53. Los espacios L^p, 57. Aproximación por funciones continuas, 60. Ejercicios, 62.

4 **Teoría elemental del espacio de Hilbert** ... 68

Productos interiores y funciones lineales, 68. Conjuntos ortonormales, 73. Series trigonométricas, 80. Ejercicios, 84.

5 **Ejemplos de técnicas de espacios de Banach** ... 87

Espacios de Banach, 87. Consecuencias del teorema de Baire, 89. Series de Fourier de funciones continuas, 92. Coeficientes de Fourier de funciones en L^1, 95. El teorema de Hahn-Banach, 96. Un enfoque abstracto de la integral de Poisson, 100. Ejercicios, 104.

6 **Medidas complejas** ... 108

Variación total, 108. Continuidad absoluta, 112. Consecuencias del teorema de Radon-Nikodym, 116. Funcionales lineales acotados sobre L^p, 118. El teorema de representación de Riesz, 121. Ejercicios, 124.

7 **Integración en espacios producto** ... 127

Medibilidad en productos cartesianos, 127. Medidas producto, 129. El teorema de Fubini, 131. Compleción de medidas producto, 134. Convoluciones, 136. Ejercicios, 138.

Capítulos *Páginas*

8 **Diferenciación** ... 141

Derivadas de medidas, 141. Funciones de variación acotada, 149. Diferenciación de funciones de punto, 153. Transformaciones diferenciables, 157. Ejercicios, 163.

9 **Transformadas de Fourier** ... 167

Propiedades formales, 167. El teorema de inversión, 169. El teorema de Plancherel, 174. El álgebra de Banach L^1, 178. Ejercicios, 181.

10 **Propiedades elementales de las funciones holomorfas** ... 185

Diferenciación compleja, 185. Integración a lo largo de caminos, 189. El teorema de Cauchy local, 193. La representación en serie de potencias, 196. El teorema de la aplicación abierta, 202. El teorema de Cauchy global, 205. El cálculo de residuos, 211. Ejercicios, 214.

11 **Funciones armónicas** ... 219

Las ecuaciones de Cauchy-Riemann, 219. La integral de Poisson, 220. La propiedad del valor medio, 227. Funciones armónicas positivas, 229. Ejercicios, 233.

12 **El principio del módulo máximo** ... 236

Introducción, 236. El lema de Schwarz, 236. El método de Phragmen-Lindelöf, 239. Un teorema de interpolación, 242. Un recíproco del teorema del módulo máximo, 244. Ejercicios, 246.

13 **Aproximación por funciones racionales** ... 248

Preparación, 248. El teorema de Runge, 251. El teorema de Mittag-Leffler, 254. Regiones simplemente conexas, 255. Ejercicios, 257.

14 **Transformación conforme** ... 259

Conservación de ángulos, 259. Transformaciones bilineales, 260. Familias normales, 262. El teorema de la aplicación de Riemann, 264. La clase $\mathcal{S}$, 266. Continuidad en la frontera, 269. Transformación conforme de un anillo, 272. Ejercicios, 274.

15 **Ceros de las funciones holomorfas** ... 280

Productos infinitos, 280. El teorema de factorización de Weierstrass, 283. Un problema de interpolación, 286. Fórmula de Jensen, 288. Productos de Blaschke, 291. El teorema de Müntz-Szasz, 294. Ejercicios, 296.

16 **Prolongación analítica** ... 301

Puntos regulares y puntos singulares, 301. Prolongación a lo largo de curvas, 305. El teorema de monodromía, 308. Construcción de una función modular, 309. El teorema de Picard, 313. Ejercicios, 314.

17 **Espacios H^p** ... 317

Funciones subarmónicas, 317. Los espacios H^p y N, 319. El espacio H^2, 321. El teorema de F. y M. Riesz, 324. Teoremas de factorización, 325. El operador de desplazamiento, 329. Funciones conjugadas, 333. Ejercicios, 335.

18 **Teoría elemental de las álgebras de Banach** ... 338

Introducción, 338. Los elementos invertibles, 339. Ideales y homomorfismos, 343. Aplicaciones, 346. Ejercicios, 350.

Capítulos *Páginas*

19 **Transformadas de Fourier holomorfas** 353

Introducción, 353. Dos teoremas de Paley y Wiener, 354. Clases casi-analíticas, 359. El teorema de Denjoy-Carleman, 362. Ejercicios, 365.

20 **Aproximación uniforme de polinomios** 368

Introducción, 368. Algunos lemas, 368. Teorema de Mergelyan, 371. Ejercicios, 375.

Apéndice 376

El teorema de Maximalidad de Hausdorff, 376.

Notas y comentarios 378

Bibliografía general 387

Lista de símbolos especiales 389

Indice de materias 391

PREFACIO

Este libro contiene un curso para estudiantes graduados de primer año, y se presentan en él las técnicas y teoremas básicos del análisis, de tal forma que las íntimas relaciones entre sus diversas ramas se encuentran fuertemente acentuadas. Se unen, entonces, los temas tradicionalmente separados de «análisis real» y «análisis complejo»; se incluyen, también, algunas de las ideas básicas de análisis funcional.

Se citan a continuación algunos ejemplos de la forma en que estas relaciones son demostradas y explotadas. El teorema de representación de Riesz y el teorema de Hahn-Banach permiten «conjeturar» la fórmula integral de Poisson. Ambos se asocian en la demostración del teorema de Runge. Se combinan, asimismo, con el teorema de Blaschke sobre los ceros de funciones holomorfas acotadas, para dar una demostración del teorema de Müntz-Szasz sobre aproximación en un intervalo. El hecho de que L^2 *es un espacio de Hilbert se usa en la demostración del teorema de Radon-Nikodym, el cual conduce al teorema sobre diferenciación de integrales indefinidas (a propósito, la diferenciación parece haber sido indebidamente atendida en la mayor parte de los textos modernos), que proporciona a su vez la existencia de límites radiales de funciones armónicas acotadas. Los teoremas de Plancherel y Cauchy combinados dan un teorema de Paley y Wiener que, a su vez, se usa en el teorema de Denjoy-Carleman sobre funciones infinitamente diferenciables sobre la recta real. El teorema del módulo máximo proporciona información sobre transformaciones lineales en espacios* L^p.

Puesto que la mayor parte de los resultados presentados aquí son bastante clásicos (la novedad radica en la adaptación y algunas de las demostraciones) no he pretendido proporcionar las fuentes de las cuales provienen. Las referencias se encuentran agrupadas al final, en Notas y Comentarios. *No siempre se refieren a las fuentes originales, sino, con frecuencia, a trabajos más recientes, donde pueden encontrarse referencias adicionales. En ningún caso la ausencia de alguna referencia implica pretensión de originalidad por mi parte.*

El prerrequisito para la lectura de este libro es un buen curso de cálculo avanzado (manejo de teoría de conjuntos, espacios métricos, continuidad uniforme y convergencia uniforme). Los primeros siete capítulos de mi anterior libro, Principios de Análisis Matemático, *suministran una preparación suficiente.*

La experiencia adquirida de la primera edición muestra que estudiantes graduados del curso inicial pueden estudiar los quince primeros capítulos en dos semestres, más algunos temas de uno o dos de los restantes cinco. Estos últimos son bastante independientes entre sí. Los primeros quince deberían estudiarse en el orden en que se presentan, excepto el noveno, que puede posponerse.

Se han añadido, en esta segunda edición, algunos ejercicios nuevos, y muchos de los antiguos han sido agrupados de tal manera que ahora aparecen aproximadamente en el mismo orden en que lo hace el correspondiente tema dentro del texto.

La presente edición contiene dos cambios sustanciales. El primero de ellos fue sugerido por JIM SERRIN, *quien me mostró el modo de modificar mi anterior tratamiento de la diferenciación de medidas para obtener resultodos más fuertes sin esfuerzo suplementario.*

El segundo es la inclusión de la bonita y simple demostración de la versión global (homología) del teorema de Cauchy, recientemente descubierta por JOHN DIXON. *Este puede ahora demostrarse y utilizarse conociendo simplemente algunas propiedades locales básicas de las funciones holomorfas. El orden de algunos temas ha sido cambiado en consecuencia.*

He hecho también bastantes pequeños cambios para mejorar algunos detalles y aclarar ciertos puntos oscuros. Casi todos fueron sugeridos por estudiantes, colegas y amigos en general. Sus comentarios constructivos y críticas fueron muy apreciados. Aprovecho esta oportunidad para agradecérselos.

WALTER RUDIN.

LA FUNCION EXPONENCIAL

Esta es la función más importante en matemáticas. Está definida, para cualquier número complejo z, por la fórmula

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \qquad [0.1]$$

La serie [0.1] converge absolutamente para todo z y converge uniformemente en todo conjunto acotado del plano complejo. Por tanto, exp es una función continua. La convergencia absoluta de [0.1] muestra que el cálculo

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!}$$

es correcto. Proporciona la importante fórmula de adición

$$\exp(a)\exp(b) = \exp(a+b), \qquad [0.2]$$

válida para toda pareja de números complejos a y b.

Definimos el número e como $\exp(1)$, y normalmente sustituiremos $\exp(z)$ por la expresión más corta y corriente e^z. Nótese que $e^0 = \exp(0) = 1$, por [0.1].

Teorema. a) *Para todo complejo z tenemos $e^z \neq 0$.* b) exp *es su propia derivada:* $\exp'(z) = \exp(z)$. c) *La restricción de* exp *al eje real es una función positiva monótona creciente, y*

$$e^x \to \infty \text{ cuando } x \to \infty, \qquad e^x \to 0 \text{ cuando } x \to -\infty.$$

d) *Existe un número positivo π tal que $e^{\pi i/2} = i$ y tal que $e^z = 1$ si, y sólo si, $z/(2\pi i)$ es un entero.* e) exp *es una función periódica, con periodo $2\pi i$.* f) *La aplicación $t \to e^{it}$ aplica el eje real sobre la circunferencia unidad.* g) *Si w es un número complejo distinto de cero, $w = e^z$ para algún z.*

Demostración. De [0.2], $e^z \cdot e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1$. Esto implica *a)*. Además,

$$\exp'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{\exp(z+h) - \exp(z)}{h} = \exp(z) \lim_{h \to 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = \exp(z).$$

La primera de las igualdades anteriores es una definición, la segunda se deduce de [0.2], y la tercera de [0.1], lo que demuestra *b)*.

Que exp es monótona creciente en el eje real positivo, y que $e^x \to \infty$ cuando $x \to \infty$, se desprende de [0.1]. Las otras afirmaciones de *c)* son consecuencias de $e^x \cdot e^{-x} = 1$.

Para cualquier número real t, [0.1] muestra que e^{-it} es el complejo conjugado de e^{it}. Entonces

$$|e^{it}|^2 = e^{it} \cdot \overline{e^{it}} = e^{it} \cdot e^{-it} = e^{it-it} = e^0 = 1,$$

o

$$|e^{it}| = 1 \qquad (t \text{ real}). \tag{0.3}$$

En otras palabras, si t es real, e^{it} está en la circunferencia unidad. Definimos $\cos t$, $\operatorname{sen} t$ como las partes real e imaginaria de e^{it}:

$$\cos t = \operatorname{Re}[e^{it}], \qquad \operatorname{sen} t = \operatorname{Im}[e^{it}] \qquad (t \text{ real}). \tag{0.4}$$

Si diferenciamos ambos miembros de la identidad de Euler,

$$e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t, \tag{0.5}$$

que es equivalente a [0.4], y si aplicamos *b)*, obtenemos:

$$\cos' t + i \operatorname{sen}' t = ie^{it} = -\operatorname{sen} t + i \cos t,$$

y, por tanto,

$$\cos' = -\operatorname{sen}, \qquad \operatorname{sen}' = \cos. \tag{0.6}$$

La serie de potencias [0.1] proporciona la representación

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \ldots \tag{0.7}$$

Sea $t = 2$. Los términos de la serie [0.7] decrecen entonces en valor absoluto (excepto el primero) y sus signos se alternan. Por tanto, $\cos 2$ es menor que la suma de los tres primeros términos de [0.7], con $t = 2$; entonces $\cos 2 < -1/3$. Puesto que $\cos 0 = 1$ y cos es una función real continua sobre el eje real, concluimos que existe un mínimo número positivo t_0 para el cual $\cos t_0 = 0$. Definimos

$$\pi = 2t_0. \tag{0.8}$$

Se deduce de [0.3] y [0.5] que $\operatorname{sen} t_0 = \pm 1$. Puesto que

$$\operatorname{sen}'(t) = \cos(t) > 0$$

en el segmento $(0, t_0)$ y $\operatorname{sen} 0 = 0$, tenemos $\operatorname{sen} t_0 > 0$; por tanto, $\operatorname{sen} t_0 = 1$, y, en consecuencia,

$$e^{\pi i/2} = i. \tag{0.9}$$

Se sigue que $e^{\pi i} = i^2 = -1$, $e^{2\pi i} = (-1)^2 = 1$, y entonces $e^{2\pi i n} = 1$ para todo entero n. Además, *e)* se obtiene inmediatamente:

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z \tag{0.10}$$

Si $z=x+iy$, x e y reales, entonces $e^z=e^xe^{iy}$; por tanto, $|e^z|=e^x$. Si $e^z=1$, debemos tener $e^x=1$, y, por consiguiente, $x=0$; para demostrar que $y/2\pi$ debe ser un entero basta demostrar que $e^{iy}\neq 1$ si $0<y<2\pi$, por [0.10].

Supongamos $0<y<2\pi$, y

$$e^{iy/4}=u+iv \qquad (u \text{ y } v \text{ reales}) \tag{0.11}$$

Puesto que $0<y/4<\pi/2$, tenemos $u>0$ y $v>0$. Además,

$$e^{iy}=(u+iv)^4=u^4-6u^2v^2+v^4+4iuv(u^2-v^2). \tag{0.12}$$

El segundo miembro de [0.12] es real sólo si $u^2=v^2$; puesto que $u^2+v^2=1$, esto sucede sólo cuando $u^2=v^2=1/2$, y entonces [0.12] muestra que

$$e^{iy}=-1\neq 1.$$

Esto completa la demostración de *d)*.

Sabemos ya que $t\to e^{it}$ aplica el eje real *en* la circunferencia unidad. Para demostrar *f)* fijamos w tal que $|w|=1$; demostraremos que $w=e^{it}$ para algún t real. Escribimos $w=u+iv$, u y v reales, y suponemos primero que $u\geqslant 0$ y $v\geqslant 0$. Puesto que $u\leqslant 1$, la definición de π muestra que existe un t, $0\leqslant t\leqslant \pi/2$, tal que $\cos t=u$; entonces $\operatorname{sen} t=1-u^2=v^2$, y como $\operatorname{sen} t\geqslant 0$ si $0\leqslant t\leqslant \pi/2$, tenemos $\operatorname{sen} t=v$. Por tanto, $w=e^{it}$.

Si $u<0$ y $v\geqslant 0$, las condiciones anteriores se satisfacen por $-iw$. En consecuencia $-iw=e^{it}$ para algún t real, y $w=e^{i(t+\pi/2)}$. Por último, si $v<0$, los dos casos precedentes muestran que $-w=e^{it}$ para algún t real, y, por tanto, $w=e^{i(t+\pi)}$. Esto completa la demostración de *f)*.

Si $w\neq 0$, ponemos $\alpha=w/|w|$. Entonces $w=|w|\alpha$. Por *c)*, existe un x real tal que $|w|=e^x$. Puesto que $|\alpha|=1$, *f)* muestra que $\alpha=e^{iy}$ para algún y real. En consecuencia, $w=e^{x+iy}$. Esto demuestra *g)* y completa el teorema.

En lo sucesivo encontraremos a veces la integral de $(1+x^2)^{-1}$ sobre la recta real. Para calcularla, pongamos $\varphi(t)=\operatorname{sen} t/\cos t$ en $(-\pi/2,\pi/2)$. Por [0.6], $\varphi'=1+\varphi^2$. Por tanto, φ es una aplicación monótona creciente de $(-\pi/2,\pi/2)$ sobre $(-\infty,\infty)$, y obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\varphi'(t)\,dt}{1+\varphi^2(t)}=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}dt=\pi.$$

INTEGRACION ABSTRACTA

Hacia finales del siglo XIX resultó claro para muchos matemáticos que la integral de Riemann (que se acostumbra a enseñar en los cursos de cálculo) debía cambiarse por algún otro tipo de integral, más general y flexible, mejor adaptada para tratar procesos de límites. Entre los intentos hechos en esta dirección, los más notables fueron debidos a JORDAN, BOREL, W. H. YOUNG y LEBESGUE. La construcción de Lebesgue resultó ser la más acertada.

Esquemáticamente, he aquí la idea principal: La integral de Riemann de una función f sobre un intervalo $[a, b]$ puede aproximarse por sumas de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)m(E_i),$$

donde $E_1, \ldots, E_n$ son intervalos disjuntos cuya unión es $[a, b]$; $m(E_i)$ denota la longitud de E_i, y $t_i \in E_i$ para $i=1, \ldots, n$. Lebesgue descubrió que se obtenía una teoría de la integración completamente satisfactoria si se permitía que los conjuntos E_i de la suma anterior pertenecieran a una clase más amplia de subconjuntos de la recta, los llamados «conjuntos medibles», y si la clase de funciones que se consideran se amplían a lo que él llamó «funciones medibles». Las propiedades cruciales utilizadas de la teoría de conjuntos son las siguientes: La unión e intersección de cualquier familia numerable de conjuntos medibles es medible; también lo es el complementario de todo conjunto medible; y, más importante, la noción de «longitud» (ahora llamada «medida») puede ser extendida a ellos de tal manera que

$$m(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots) = m(E_1) + m(E_2) + m(E_3) + \ldots$$

para toda colección numerable $\{E_i\}$ de conjuntos medibles disjuntos dos a dos. Esta propiedad de m se llama de *aditividad numerable.*

El paso de la teoría de integración de Riemann a la de Lebesgue es un proceso de compleción (en un sentido que se precisará más adelante). En análisis es de la misma fundamental importancia que la construcción del sistema de números reales a partir de los racionales.

La medida m mencionada anteriormente está íntimamente relacionada, por supuesto, con la geometría de la recta real. En este capítulo presentaremos una versión abstracta (axiomática) de la integral de Lebesgue, relativa a *cualquier* medida numerablemente aditiva sobre *cualquier* conjunto (más adelante veremos las definiciones precisas). Esta teoría abstracta no es en forma alguna más difícil que el caso especial de la recta real; muestra que una gran

parte de la teoría de integración es independiente de cualquier geometría (o topología) del espacio subyacente; y, por supuesto, nos proporciona un instrumento de mucha mayor aplicabilidad. La existencia de una amplia clase de medidas, entre ellas la de Lebesgue, será establecida en el capítulo 2.

1.1. NOTACIONES DE TEORIA DE CONJUNTOS Y TERMINOLOGIA

Algunos conjuntos pueden describirse enumerando sus elementos. Por ejemplo, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es el conjunto cuyos miembros son $x_1, \ldots, x_n$, y $\{x\}$ es el conjunto cuyo único elemento es x. Más frecuentemente los conjuntos vienen descritos por propiedades. Escribimos

$$\{x : P\}$$

como el conjunto de todos los elementos x que poseen la propiedad P. El símbolo $\varnothing$ denota el conjunto vacío. Las palabras *colección, familia* y *clase* serán usadas como sinónimos de *conjunto*.

Escribimos $x \in A$ si x es un elemento del conjunto A; si no lo es, $x \notin A$. Si B es un subconjunto de A, es decir, si $x \in B$ implica $x \in A$, escribimos $B \subset A$. Si $B \subset A$ y $A \subset B$, entonces $A = B$. Si $B \subset A$ y $A \neq B$, B es un subconjunto *propio* de A. Nótese que $\varnothing \subset A$ para todo conjunto A.

$A \cup B$ y $A \cap B$ son la unión e intersección de A y B, respectivamente. Si $\{A_\alpha\}$ es una colección de conjuntos, donde α recorre algún conjunto de índices I, escribimos

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \quad \text{y} \quad \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$$

para designar la unión e intersección de $\{A_\alpha\}$:

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : x \in A_\alpha \text{ para al menos un } \alpha \in I\}$$

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : x \in A_\alpha \text{ para todo } \alpha \in I\}$$

Si I es el conjunto de todos los enteros positivos, las notaciones habituales son

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{y} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Si ninguna pareja de miembros de $\{A_\alpha\}$ tiene elementos en común, entonces $\{A_\alpha\}$ es una *colección disjunta* de conjuntos.

Escribimos $A - B = \{x : x \in A,\ x \notin B\}$, y mediante A^c el complementario de A, siempre que resulte claro del contexto con respecto a qué conjunto más amplio se toma este complementario.

El *producto cartesiano* $A_1 \times \ldots \times A_n$ de los conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ es el conjunto de todas las n-uplas ordenadas $(a_1, \ldots, a_n)$, donde $a_i \in A_i$ para $i = 1, \ldots, n$.

La *recta real* (o sistema de números reales) es R^1, y

$$R^k = R^1 \times \ldots \times R^1 \quad (k \text{ factores}).$$

El *sistema extendido de números reales* es R^1 con dos símbolos añadidos, ∞ y $-\infty$, y con el orden obvio. Si $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant \infty$, el *intervalo* $[a, b]$ y el *segmento* (a, b) se definen como

$$[a, b] = \{x : a \leqslant x \leqslant b\}, \qquad (a, b) = \{x : a < x < b\}.$$

Escribimos también

$$[a, b) = \{x : a \leqslant x < b\}, \qquad (a, b] = \{x : a < x \leqslant b\}.$$

Si $E \subset [-\infty, \infty]$ y $E \neq \emptyset$, existen en $[-\infty, \infty]$ la menor cota superior (supremo) y la mayor cota inferior (ínfimo) de E, y se denotan mediante $\sup E$ e $\inf E$.

A veces (sólo cuando $\sup E \in E$) escribimos $\operatorname{máx} E$ en lugar de $\sup E$.

El símbolo

$$f : X \to Y$$

significa que f es una *función* (o *aplicación* o *transformación)* del conjunto X en el conjunto Y; es decir, f asigna a cada $x \in X$ un elemento $f(x) \in Y$. Si $A \subset X$ y $B \subset Y$, la *imagen* de A y la *imagen inversa* (o pre-imagen) de B son

$$f(A) = \{y : y = f(x) \text{ para algún } x \in A\},$$
$$f^{-1}(B) = \{x : f(x) \in B\}.$$

Nótese que $f^{-1}(B)$ puede ser vacía aunque $B \neq \emptyset$.

El *dominio* de f es X. El *recorrido* de f es $f(X)$.

Si $f(X) = Y$, se dice que f aplica X *sobre* Y.

Escribimos $f^{-1}(y)$ en lugar de $f^{-1}(\{y\})$, para todo $y \in Y$. Si $f^{-1}(y)$ consta a lo sumo de un punto para cada $y \in Y$, la aplicación f se dice *uno a uno.* Si f es uno a uno, f^{-1} es una función cuyo dominio es $f(X)$ y su recorrido es X.

Si $f : X \to [-\infty, \infty]$ y $E \subset X$, es costumbre escribir $\sup_{x \in E} f(x)$ en lugar de $\sup f(E)$.

Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$, se define la función compuesta $g \circ f : X \to Z$ mediante la fórmula

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \qquad (x \in X).$$

1.2. EL CONCEPTO DE MEDIBILIDAD

La clase de las funciones medibles desempeña un papel fundamental en la teoría de integración. Tiene algunas propiedades básicas en común con otra clase muy importante de funciones, la de las funciones continuas. Es útil tener en consideración estas analogías. Nuestra presentación está organizada, por tanto, de tal manera que las analogías entre los conceptos *espacio topológico, conjunto abierto* y *función continua,* por un lado, y *espacio medible, conjunto medible* y *función medible,* por otro, están fuertemente acentuadas. Las relaciones entre estos conceptos emergen más claramente si el marco en que se tratan es muy abstracto, y es esto (más que un mero deseo de generalidad) lo que motiva nuestro enfoque del tema.

1.2.1. Definición. *a)* Una colección τ de subconjuntos de un conjunto X se llama una *topología en* X si tiene las siguientes tres propiedades:

1) $\emptyset \in \tau$ y $X \in \tau$.
2) Si $V_i \in \tau$ para $i=1, 2, \ldots, n$, entonces $V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_n \in \tau$.
3) Si $\{V_\alpha\}$ es una colección arbitraria de elementos de τ (finita, numerable o no numerable), entonces $\cup_\alpha V_\alpha \in \tau$.

b) Si τ es una topología en X, entonces X recibe el nombre de *espacio topológico,* y los elementos de τ son los *conjuntos abiertos* en X. *c)* Si X e Y son espacios topológicos y f es una aplicación de X en Y, f se dice continua si $f^{-1}(V)$ es un conjunto abierto en X para todo conjunto abierto V en Y.

1.2.2. Definición. *a)* Una colección $\mathcal{M}$ de subconjuntos de un conjunto X se llama una *σ-álgebra en* X si $\mathcal{M}$ tiene las siguientes propiedades:

1) $X \in \mathcal{M}$.
2) Si $A \in \mathcal{M}$, entonces $A^c \in \mathcal{M}$, donde A^c es el complementario de A relativo a X.
3) Si $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ y si $A_n \in \mathcal{M}$ para $n=1, 2, 3, \ldots$, entonces $A \in \mathcal{M}$.

b) Si $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra en X, éste recibe el nombre de *espacio medible,* y los elementos de $\mathcal{M}$ son los *conjuntos medibles* en X. *c)* Si X es un espacio medible, Y un espacio topológico y f una aplicación de X en Y, f se dice *medible* si $f^{-1}(V)$ es un conjunto medible en X para todo conjunto abierto V en Y.

Sería quizá más satisfactorio aplicar el término «espacio medible» al par ordenado $(X, \mathcal{M})$ en lugar de a X. Después de todo, X es un conjunto, y no cambia en absoluto por el hecho de que nosotros tengamos también presente ahora una σ-álgebra de sus conjuntos. Análogamente, un espacio topológico es un par ordenado (X, τ). Pero si este tipo de cosas se hiciera sistemáticamente en matemáticas, la terminología resultaría enormemente incómoda. Volveremos sobre este aspecto algo más extensamente en la sección 1.6.

1.2.3. Comentarios sobre la definición 1.2.1. Los espacios topológicos más conocidos son los *espacios métricos.* Supondremos alguna familiaridad con estos espacios, pero para que nuestra exposición resulte más completa, daremos a continuación las definiciones básicas.

Un *espacio métrico* es un conjunto X en el que se ha definido una *función distancia* (o *métrica)* ρ, con las siguientes propiedades:

a) $0 \leqslant \rho(x, y) < \infty$ para toda pareja x e $y \in X$.
b) $\rho(x, y) = 0$ si, y sólo si, $x = y$.
c) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ para toda pareja x e $y \in X$.
d) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ para x, y y $z \in X$.

La propiedad *d)* se llama la *desigualdad triangular.*

Si $x \in X$ y $r \geqslant 0$, la *bola abierta* de centro x y radio r es el conjunto $\{y \in X : \rho(x, y) < r\}$.

Si X es un espacio métrico y τ es la colección de todos los conjuntos $E \subset X$ obtenidos como uniones arbitrarias de bolas abiertas, entonces τ es una topología en X. Esto no es difícil de comprobar; la propiedad de intersección depende

del hecho de que si $x \in B_1 \cap B_2$ donde B_1 y B_2 son bolas abiertas, entonces x es el centro de una bola abierta $B \subset B_1 \cap B_2$. Dejamos esto como ejercicio.

Por ejemplo, en la recta real R^1 un conjunto es abierto si, y sólo si, es una unión de segmentos abiertos (a, b). En el plano R^2, los conjuntos abiertos son aquéllos obtenidos como uniones de discos circulares abiertos.

Otro espacio topológico que encontraremos frecuentemente es la recta real extendida $[-\infty, \infty]$; su topología viene definida declarando como abiertos los siguientes conjuntos: (a, b), $[-\infty, a)$, $(a, \infty]$, y cualquier unión de segmentos de este tipo.

La definición de continuidad dada en el apartado 1.2.1, *c)*, es global. Frecuentemente es deseable definir la continuidad localmente: Una aplicación f de X en Y se dice *continua en el punto* $x_0 \in X$ si a todo entorno V de $f(x_0)$ le corresponde un entorno W de x_0 tal que $f(W) \subset V$.

(Un *entorno* de un punto x es, por definición, un conjunto abierto que contiene a x.)

Para espacios métricos, esta definición local es, por supuesto, la misma que la definición habitual en términos de épsilon y delta.

La siguiente sencilla proposición relaciona las dos definiciones de continuidad en la forma esperada:

1.2.4. Proposición. Sean X e Y espacios topológicos. Una aplicación f *de X en Y es continua si, y sólo si, f es continua en todo punto de X.*

DEMOSTRACIÓN. Si f es continua y $x_0 \in X$, $f^{-1}(V)$ *es un entorno de* x_0, para todo entorno V de $f(x_0)$. Puesto que $f(f^{-1}(V)) \subset V$, se tiene que f es continua en x_0.

Si f es continua en todo punto de X y V es abierto en Y, todo punto $x \in f^{-1}(V)$ tiene un entorno W_x tal que $f(W_x) \subset V$. Por tanto, $W_x \subset f^{-1}(V)$. Se tiene, pues, que $f^{-1}(V)$ es la unión de los conjuntos abiertos W_x, y, por consiguiente, es también abierto. Entonces f es continua. ////

1.2.5. Comentarios sobre la definición 1.2.2. Sea $\mathcal{M}$ una σ-álgebra en un conjunto X. De las propiedades 1) a 3) de la definición 1.2.2, *a)*, se deduce inmediatamente lo siguiente:

a) Puesto que $\emptyset = X^c$, 1) y 2) implican que $\emptyset \in \mathcal{M}$.

b) Tomando $A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots = \emptyset$ en 3), vemos que $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{M}$ si $A_i \in \mathcal{M}$ para $i = 1, \ldots, n$.

c) Puesto que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\Big)^c,$$

$\mathcal{M}$ es cerrada respecto de intersecciones numerables (y finitas).

d) Como $A - B = B^c \cap A$, tenemos $A - B \in \mathcal{M}$ si $A \in \mathcal{M}$ y $B \in \mathcal{M}$.

El prefijo σ se refiere a que es preciso que se verifique 3) para todas las uniones *numerables* de elementos de $\mathcal{M}$. Si se requiriera la verificación de 3) sólo para uniones finitas, $\mathcal{M}$ sería un *álgebra* de conjuntos.

1.2.6. Teorema. *Sean Y y Z espacios topológicos y sea $g: Y \to Z$ continua.*

a) *Si X es un espacio topológico, $f: X \to Y$ continua y $h = g \circ f$, entonces $h: X \to Z$ es continua.*

b) *Si X es un espacio medible, $f: X \to Y$ medible y $h = g \circ f$, entonces $h: X \to Z$ es medible.*

Enunciado informalmente, el teorema afirma que funciones continuas de funciones continuas son continuas; funciones continuas de funciones medibles son medibles.

DEMOSTRACIÓN. Si V es abierto en Z, $g^{-1}(V)$ es abierto en Y, y

Si f es continua, $h^{-1}(V)$ es abierto, demostrándose *a)*.

Si f es medible, $h^{-1}(V)$ es medible, demostrándose *b)*.

1.2.7. Teorema. *Sean u y v funciones medibles reales sobre un espacio medible X, Φ una aplicación continua del plano en un espacio topológico Y, y definamos*

$$h(x) = \Phi(u(x), v(x))$$

para $x \in X$. Entonces $h: X \to Y$ es medible.

DEMOSTRACIÓN. Pongamos $f(x) = (u(x), v(x))$. Esta función aplica X en el plano. Como $h = \Phi \circ f$, el teorema 1.2.6 muestra que basta demostrar que f es medible.

Si R es cualquier rectángulo abierto del plano de lados paralelos a los ejes, R es el producto cartesiano de dos segmentos I_1 e I_2, y

$$f^{-1}(R) = u^{-1}(I_1) \cap v^{-1}(I_2),$$

que es medible por las hipótesis hechas sobre u y v. Todo conjunto abierto en el plano es una unión numerable de tales rectángulos R_i, y como

$$f^{-1}(V) = f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} R_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(R_i),$$

$f^{-1}(V)$ es medible. ////

1.2.8. Proposición. Sea X un espacio medible. Las proposiciones siguientes son corolarios de los teoremas 1.2.6 y 1.2.7:

a) *Si $f = u + iv$, donde u y v son funciones reales medibles sobre X, entonces f es una función medible compleja sobre X.*

Esto se deduce del teorema 1.2.7, con $\Phi(z) = z$.

b) *Si $f = u + iv$ es una función medible compleja sobre X, entonces u, v y f son funciones medibles reales sobre X.*

Esto se deduce del teorema 1.2.6, con $g(z) = \mathrm{Re}\,(z)$, $\mathrm{Im}\,(z)$ y $|z|$.

c) *Si f y g son funciones medibles complejas sobre X, entonces también lo son $f + g$ y fg.*

Para f y g reales este resultado se deduce del teorema 1.2.7 con

$$\Phi(s, t) = s + t \quad \text{y} \quad \Phi(s, t) = st.$$

El caso complejo es entonces consecuencia de *a)* y *b)*.

d) *Si E es un conjunto medible de X y si*

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}$$

entonces χ_E es una función medible.

Esto es obvio. Llamamos χ_E a la *función característica* del conjunto E. La letra χ se reservará para funciones características en todo el libro.

e) *Si f es una función medible compleja sobre X, existe una función medible compleja α sobre X tal que $|\alpha| = 1$ y $f = \alpha|f|$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $E = \{x : f(x) = 0\}$, *sea Y el plano complejo excluido el* origen, definamos $\varphi(z) = z/|z|$ para $z \in Y$, y pongamos

$$\alpha(x) = \varphi(f(x) + \chi_E(x)) \qquad (x \in X).$$

Si $x \in E$, $\alpha(x) = 1$; si $x \notin E$, $\alpha(x) = f(x)/|f(x)|$. Como φ es continua en Y y E es medible (¿por qué?), α es medible por *c), d)* y el teorema 1.2.6. ////

Veremos a continuación que existe una gran cantidad de σ-álgebras.

1.2.9. Teorema. *Si $\mathcal{F}$ es una colección cualquiera de subconjuntos de X, existe una σ-álgebra mínima $\mathcal{M}^*$ en X tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}^*$.*

Esta $\mathcal{M}^*$ se llama a veces la σ-álgebra *generada* por $\mathcal{F}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea Ω la familia de todas las σ-álgebras $\mathcal{M}$ de X que contienen a $\mathcal{F}$. Como la colección de todos los subconjuntos de X es una tal σ-álgebra, Ω es no vacía. Sea $\mathcal{M}^*$ la intersección de todas las $\mathcal{M} \in \Omega$. Es claro que $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}^*$ y que $\mathcal{M}^*$ está en toda σ-álgebra de X que contiene a $\mathcal{F}$. Para completar la demostración, tenemos que probar que $\mathcal{M}^*$ es efectivamente una σ-álgebra.

Si $A_n \in \mathcal{M}^*$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, y si $\mathcal{M} \in \Omega$, entonces $A_n \in \mathcal{M}$, y, por tanto, $\bigcup A_n \in \mathcal{M}$, porque $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra. Como $\bigcup A_n \in \mathcal{M}$ para *toda* $\mathcal{M} \in \Omega$, concluimos que $\bigcup A_n \in \mathcal{M}^*$. Las otras dos propiedades que definen una σ-álgebra se comprueban de la misma manera.

1.3. CONJUNTOS DE BOREL

Sea X un espacio topológico. Por el teorema 1.2.9, existe una σ-álgebra mínima $\mathcal{B}$ en X tal que todo conjunto abierto de X pertenece a $\mathcal{B}$. Los elementos de $\mathcal{B}$ reciben el nombre de *conjuntos de Borel* de X.

En particular, los conjuntos cerrados son conjuntos de Borel (siendo, por definición, complementarios de conjuntos abiertos), y también lo son todas las uniones numerables de conjuntos cerrados, así como todas las intersecciones numerables de conjuntos abiertos. Estos dos últimos se designan con F_σ y G_δ, respectivamente, y su papel es importante. La notación se debe a Hausdorff. Las letras F y G se usaban para designar a los conjuntos cerrados y abiertos, respectivamente, y σ se refiere a la unión *(Summe)* y δ a la intersección *(Durchschnitt)*. Por ejemplo, todo intervalo semiabierto $[a, b)$ es un G_δ y un F_σ en R^1.

Como $\mathcal{B}$ es una σ-álgebra, podemos considerar ahora X como un espacio medible, en el que los conjuntos de Borel desempeñan el papel de los conjuntos medibles; más concisamente, consideraremos el espacio medible $(X, \mathcal{B})$. Si $f: X \to Y$ es una aplicación continua en X, siendo Y cualquier espacio topológico, es evidente de las definiciones que $f^{-1}(V) \in \mathcal{B}$ para todo conjunto abierto V de Y. En otras palabras, *toda aplicación continua en X es Borel medible.*

Las aplicaciones Borel medibles se llaman a menudo *aplicaciones de Borel* o *funciones de Borel.*

1.3.1. Teorema. *Supongamos que $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra en X y que Y es un espacio topológico. Sea f una aplicación de X en Y.*

a) *Si Ω es la colección de todos los subconjuntos $E \subset Y$ tales que $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$, Ω es una σ-álgebra en Y.*

b) *Si f es medible y E es un conjunto de Borel en Y, $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$.*

c) *Si $Y = [-\infty, \infty]$ y $f^{-1}((\alpha, \infty]) \in \mathcal{M}$ para todo α real, f es medible.*

d) *Si f es medible, Z es un espacio topológico, $g: Y \to Z$ es una aplicación de Borel y $h = g \circ f$, entonces $h: X \to Z$ es medible.*

La parte *c)* es un criterio frecuentemente utilizado para la medibilidad de funciones a valores reales (véase también el ejercicio 3). Nótese que *d)* generaliza el teorema 1.2.6, *b).*

DEMOSTRACIÓN. *a)* se deduce de las relaciones

$$f^{-1}(Y) = X,$$

$$f^{-1}(Y - A) = X - f^{-1}(A),$$

$X - f^{-1}(A)$

y

$$f^{-1}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2) \cup \ldots$$

Para demostrar *b)*, sea Ω como en *a)*; f medible implica que Ω contiene todos los conjuntos abiertos de Y, y puesto que Ω es una σ-álgebra, contiene todos los conjuntos de Borel de Y.

Para demostrar *c)*, sea Ω la colección de todos los $E \subset [-\infty, \infty]$ tales que $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$. Escojamos un número real α y otros α_n tales que $\alpha_n < \alpha$ y $\alpha_n \to \alpha$ cuando $n \to \infty$. Como $(\alpha_n, \infty] \in \Omega$ para cada n, como

$$[-\infty, \alpha) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-\infty, \alpha_n] = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\alpha_n, \infty]^c,$$

y puesto que *a)* muestra que Ω es una σ-álgebra, vemos que $[-\infty, \alpha) \in \Omega$. El mismo resultado es entonces cierto para

$$(\alpha, \beta) = [-\infty, \beta) \cap (\alpha, \infty].$$

Puesto que todo conjunto abierto de $[-\infty, \infty]$ es una unión numerable de segmentos de los tipos anteriores, Ω contiene a todo conjunto abierto. En consecuencia, f es medible.

Para demostrar *d)*, consideremos un abierto $V \subset Z$. Entonces $g^{-1}(V)$ es un conjunto de Borel de Y, y como

$$h^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V)).$$

b) muestra que $h^{-1}(V) \in \mathcal{M}$. ////

1.3.2. Definición. Sea $\{a_n\}$ una sucesión en $[-\infty, \infty]$, y pongamos

$$b_k = \sup\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots\} \qquad (k=1, 2, 3, \ldots) \tag{1.1}$$

y

$$\beta = \inf\{b_1, b_2, b_3, \ldots\}. \tag{1.2}$$

Llamamos a β el *límite superior* de $\{a_n\}$, y escribimos

$$\beta = \lim_{n\to\infty} \sup a_n. \tag{1.3}$$

Se comprueban fácilmente las propiedades siguientes: primero, que $b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \geqslant \ldots$, de modo que $b_k \to \beta$ cuando $k \to \infty$; segundo, que existe una subsucesión $\{a_{n_i}\}$ de $\{a_n\}$ tal que $a_{n_i} \to \beta$ cuando $i \to \infty$, y β es el mayor número que posee esta propiedad.

El *límite inferior* se define análogamente: se intercambia simplemente sup e inf en [1.1] y [1.2]. Nótese que

$$\lim_{n\to\infty} \inf a_n = -\lim_{n\to\infty} \sup(-a_n). \tag{1.4}$$

Si $\{a_n\}$ converge, entonces evidentemente

$$\lim_{n\to\infty} \sup a_n = \lim_{n\to\infty} \inf a_n = \lim_{n\to\infty} a_n. \tag{1.5}$$

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definidas sobre un conjunto X y a valores en la recta real extendida. Entonces $\sup_n f_n$ y $\lim_{n\to\infty} \sup f_n$ son las funciones definidas sobre X mediante

$$(\sup_n f_n)(x) = \sup_n (f_n(x)), \tag{1.6}$$

$$(\lim_{n\to\infty} \sup f_n)(x) = \lim_{n\to\infty} \sup (f_n(x)). \tag{1.7}$$

Si

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

donde el límite se supone que existe en todo $x \in X$, llamamos a f el *límite puntual* de la sucesión $\{f_n\}$.

1.3.3. Teorema. *Si* $f_n : X \to [-\infty, \infty]$ *es medible, para* $n = 1, 2, 3, \ldots$, *y*

$$g = \sup_{n\geqslant 1} f_n, \qquad h = \lim_{n\to\infty} \sup f_n,$$

entonces g *y* h *son medibles.*

DEMOSTRACIÓN. $g^{-1}((\alpha, \infty]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((\alpha, \infty))$. Por tanto, el teorema 1.3.1, *c)*, implica que g es medible. El mismo resultado se obtiene, por supuesto, cambiando sup por inf, y, como

$$h = \inf_{k\geqslant 1} \{\sup_{i\geqslant k} f_i\},$$

h es medible.

1.3.4. Corolarios. a) *El límite de toda sucesión convergente puntualmente de funciones complejas medibles es medible.* b) *Si f y g son medibles (con recorrido en $[-\infty, \infty]$) también lo son* $\max\{f, g\}$ *y* $\min\{f, g\}$. *En particular, lo son también*

$$f^+ = \max\{f, 0\} \quad \text{y} \quad f^- = -\min\{f, 0\}.$$

1.3.5. Definición. Las funciones f^+ y f^- reciben el nombre de *parte positiva* y *parte negativa* de f, respectivamente. Tenemos $|f| = f^+ + f^-$ y $f = f^+ - f^-$, una representación usual de f como diferencia de dos funciones no negativas, con una cierta propiedad de mínimo:

1.3.6. Proposición. *Si $f = g - h$, $g \geqslant 0$, y $h \geqslant 0$, se tiene $f^+ \leqslant g$ y $f^- \leqslant h$.*

DEMOSTRACIÓN. $f \leqslant g$ y $0 \leqslant g$ implica claramente que $\max\{f, 0\} \leqslant g$. ////

1.4. FUNCIONES SIMPLES

1.4.1. Definición. Una *función simple* es una función s definida sobre un espacio de medida X y cuyo recorrido consta sólo de un número finito de puntos de $[0, \infty)$.

(A veces conviene llamar simple a cualquier función con recorrido finito. Sin embargo, en lo sucesivo estaremos interesados principalmente en el tipo de funciones definidas anteriormente. Nótese que excluimos explícitamente ∞ de los valores de una función simple.)

Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son los distintos valores que toma una función simple s, y si hacemos $A_i = \{x : s(x) = \alpha_i\}$, claramente

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$$

donde χ_{A_i} es la función característica de A_i, como se definió en el apartado 1.2.8, *d)*.

Es claro también que s es medible si, y sólo si, cada uno de los conjuntos A_i es medible.

1.4.2. Teorema. *Sea $f : X \to [0, \infty)$ una función medible. Existen funciones simples medibles s_n definidas sobre X tales que*

a) $0 \leqslant s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant f$.

b) $s_n(x) \to f(x)$ *cuando* $n \to \infty$, *para todo* $x \in X$.

DEMOSTRACIÓN. Para $n = 1, 2, 3, \ldots$, y para $1 \leqslant i \leqslant n2^n$, definimos

$$E_{n,i} = f^{-1}\left(\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right)\right) \quad \text{y} \quad F_n = f^{-1}([n, \infty]) \qquad [1.8]$$

y ponemos

$$s_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i}} + n\chi_{F_n}. \qquad [1.9]$$

El teorema 1.3.1, *b)* muestra que $E_{n,i}$ y F_n son conjuntos medibles. Se ve fácilmente que las funciones [1.9] satisfacen *a)*. Si x es tal que $f(x) < \infty$, $s_n(x) \geqslant f(x) - 2^{-n}$ para n suficientemente grande; si $f(x) = \infty$, entonces $s_n(x) = n$; esto demuestra *b)*. ////

Debe observarse que la construcción precedente proporciona una sucesión uniformemente convergente $\{s_n\}$ si f es acotada.

1.5. PROPIEDADES ELEMENTALES DE LAS MEDIDAS

1.5.1. Definición.

a) Una *medida positiva* es una función μ, definida sobre una σ-álgebra $\mathcal{M}$, cuyo recorrido está en $[0, \infty]$ y que posee la propiedad de *aditividad numerable.* Esto significa que si $\{A_i\}$ es una colección numerable *disjunta* de elementos de $\mathcal{M}$, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \qquad [1.10]$$

Para evitar casos triviales, supondremos también que $\mu(A) < \infty$ para al menos un $A \in \mathcal{M}$.

b) Un *espacio de medida* es un espacio medible en el que se ha definido una medida positiva sobre la σ-álgebra de sus conjuntos medibles.

c) Una *medida compleja* es una función a valores complejos numerablemente aditiva definida sobre una σ-álgebra.

NOTA. Lo que hemos llamado una *medida positiva* frecuentemente se llama sólo *medida;* añadimos la palabra «positiva» para mayor énfasis. Si $\mu(E) = 0$ para todo $E \in \mathcal{M}$, μ es una medida positiva según nuestra definición. El valor ∞ es admisible para una medida positiva; pero cuando hablamos de una medida *compleja* μ, se entiende que $\mu(E)$ es un número complejo para cada $E \in \mathcal{M}$. Las *medidas reales* forman una subclase de las complejas, por supuesto.

1.5.2. Teorema. *Sea μ una medida positiva sobre una σ-álgebra $\mathcal{M}$. Entonces*

a) $\mu(\varnothing) = 0$.

b) $\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_n)$ *si* $A_1, \ldots, A_n$ *son elementos de* $\mathcal{M}$ *disjuntos dos a dos.*

c) $A \subset B$ *implica* $\mu(A) \leqslant \mu(B)$ *si* $A \in \mathcal{M}$, $B \in \mathcal{M}$.

d) $\mu(A_n) \to \mu(A)$ *cuando* $n \to \infty$ *si* $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \in \mathcal{M}$, *y*

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$$

e) $\mu(A_n) \to \mu(A)$ *cuando* $n \to \infty$ *si* $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \in \mathcal{M}$ y:

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots,$$

y $\mu(A_1)$ *es finita.*

Como se verá en la demostración, estas propiedades, con la excepción de *c)*, también se verifican para medidas complejas; *b)* recibe el nombre de *aditividad finita; c)* se llama *monotonía.*

DEMOSTRACIÓN

a) Tomemos $A \in \mathfrak{M}$ de modo que $\mu(A) < \infty$, y $A_1 = A$, $A_2 = A_3 = \ldots = \emptyset$ en 1.5.1 [1.10].

b) Tomemos $A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots = \emptyset$ en 1.5.1 [1.10].

c) Como $B = A \cup (B - A)$ y $A \cap (B - A) = \emptyset$, vemos que *b)* implica

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A) \geqslant \mu(A).$$

d) Pongamos $B_1 = A_1$ y $B_n = A_n - A_{n-1}$ para $n = 2, 3, 4, \ldots$ Entonces $B_n \in \mathfrak{M}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $i \neq j$, $A_n = B_1 \cup \ldots \cup B_n$, y $A = \cup_{i=1}^{\infty} B_i$. Por tanto:

$$\mu(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) \quad \text{y} \quad \mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i).$$

De aquí se obtiene *d)* de la definición de suma de una serie infinita.

e) Pongamos $C_n = A_1 - A_n$. Entonces $C_1 \subset C_2 \subset C_3 \subset \ldots$,

$$\mu(C_n) = \mu(A_1) - \mu(A_n),$$

$A_1 - A = \cup C_n$, y, así, *d)* muestra que

$$\mu(A_1) - \mu(A) = \mu(A_1 - A) = \lim_{n \to \infty} (C_n) = \mu(A_1) - \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

lo que implica *e).* ////

1.5.3. Ejemplos. La construcción de espacios de medida interesantes requiere, como veremos, algún trabajo. Sin embargo, pueden darse inmediatamente algunos ejemplos sencillos:

a) Sea X cualquier conjunto y E un subconjunto cualquiera de X. Definimos $\mu(E) = \infty$ si E es un conjunto infinito y hacemos $\mu(E)$ igual al número de puntos de E, si E es finito. Esta μ se llama la *medida discreta* sobre X.

b) Fijemos $x_0 \in X$, y definamos $\mu(E) = 1$ si $x_0 \in E$ y $\mu(E) = 0$ si $x_0 \notin E$, para cualquier $E \subset X$. Esta μ puede ser llamada la *masa unidad* concentrada en x_0.

c) Sea μ la medida discreta sobre el conjunto $\{1, 2, 3, \ldots\}$; sea $A_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$. Entonces $\cap A_n = \emptyset$, pero $\mu(A_n) = \infty$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ Esto muestra que la hipótesis

$$\mu(A_1) < \infty$$

no es superflua en el teorema 1.5.2, *e).*

1.6. UN COMENTARIO SOBRE TERMINOLOGIA

Se consideran con frecuencia los espacios de medida como «ternas ordenadas» $(X, \mathcal{M}, \mu)$, donde X es un conjunto. Análogamente, los espacios medibles son «pares ordenados» $(X, \mathcal{M})$. Esto es lógicamente correcto y a menudo conveniente, aunque algo redundante. Por ejemplo, en $(X, \mathcal{M})$ el conjunto X es meramente el mayor elemento de $\mathcal{M}$, y, por tanto, si conocemos $\mathcal{M}$ también conocemos X. Análogamente, toda medida tiene como dominio una σ-álgebra, por definición, por lo que si conocemos una medida μ también conocemos la σ-álgebra sobre la que está definida y conocemos el conjunto X en el que $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra.

En consecuencia, es perfectamente legítimo utilizar expresiones como «sea μ una medida» o, si deseamos poner de manifiesto la σ-álgebra o el conjunto en cuestión, decir «sea μ una medida sobre $\mathcal{M}$» o «sea μ una medida sobre X».

Lo que tiene poco sentido lógicamente, aunque es habitual (y nosotros seguiremos a menudo la costumbre matemática más que la lógica) es decir «sea X un espacio de medida»; el énfasis no debe ponerse sobre el conjunto sino sobre la medida. Por supuesto, cuando se utiliza esta forma de expresión se entiende tácitamente que existe una medida definida sobre alguna σ-álgebra en X y que es de esta medida de la que se está tratando.

Análogamente, un espacio topológico es un par ordenado (X, τ), donde τ es una topología en el conjunto X, y los datos importantes están contenidos en τ, no en X, aunque de lo que se hable sea del «espacio topológico X».

Esta especie de convenio tácito se utiliza en todas las matemáticas. La mayor parte de los sistemas matemáticos son conjuntos con alguna clase de subconjuntos distinguidos o algunas operaciones binarias o algunas relaciones (que se requiere posean ciertas propiedades), y enumerando éstas se describe el sistema como un par, terna, etc., ordenado dependiendo de lo que se necesite. Por ejemplo, la recta real puede describirse como una cuaterna $(R^1, +, \cdot, <)$, donde $+$, $\cdot$ y $<$ satisfacen los axiomas de un cuerpo arquimediano ordenado completo. Pero casi con seguridad muy pocos matemáticos piensan en el cuerpo real como en una tal cuaterna.

1.7. ARITMETICA EN $[0, \infty]$

A lo largo de la teoría de la integración, ∞ aparece inevitablemente. Una razón es que se desea ser capaz de integrar sobre conjuntos de medida infinita; después de todo, la recta real tiene longitud infinita. Otra razón es que aunque se esté interesado principalmente en funciones a valores reales, el lím sup de una sucesión de funciones reales positivas o la suma de una sucesión de funciones reales positivas puede bien ser ∞ en algunos puntos, y mucha de la elegancia de teoremas como 1.8.4 y 1.8.5 se perdería si se tuvieran que considerar especialmente los casos en que esto ocurre.

Definamos $a+\infty=\infty+a=\infty$ si $0 \leqslant a \leqslant \infty$, y

$$a \cdot \infty = \infty \cdot a = \begin{cases} \infty & \text{si} \quad 0 < a \leqslant \infty \\ 0 & \text{si} \quad a = 0; \end{cases}$$

las sumas y productos de números reales se definen en la forma habitual.

Puede parecer extraño definir $0 \cdot \infty = 0$. Sin embargo, se comprueba sin dificultad que con esta definición se verifican en $[0, \infty]$ sin ninguna restricción las propiedades conmutativas, asociativas y distributivas.

Las propiedades de simplificación deben tratarse con algún cuidado: $a+b=a+c$ implica $b=c$ sólo si $a<\infty$, y $ab=ac$ implica $b=c$ sólo si $0<a<\infty$.

Obsérvese que se verifican las siguientes útiles proposiciones:

Si $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots$, $0 \leqslant b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots$, $a_n \to a$, y $b_n \to b$, *entonces* $a_n b_n \to ab$.

Si combinamos esto con los teoremas 1.3.3 y 1.4.2 vemos que sumas y productos de funciones medibles en $[0, \infty]$ son medibles.

1.8. INTEGRACION DE FUNCIONES POSITIVAS

En esta sección, $\mathcal{M}$ será una σ-álgebra en un conjunto X y μ será una medida positiva sobre $\mathcal{M}$.

1.8.1. Definición. Si s es una función simple medible sobre X de la forma

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}, \qquad [1.11]$$

donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son los distintos valores de s (véase la definición 1.4.1), y si $E \in \mathcal{M}$, definimos

$$\int_E s \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E). \qquad [1.12]$$

El convenio $0 \cdot \infty = 0$ puede necesitarse aquí; en efecto, puede suceder que $\alpha_i = 0$ para algún i y que $\mu(A_i \cap E) = \infty$.

Si $f: X \to [0, \infty]$ es medible, y $E \in \mathcal{M}$, definimos

$$\int_E f \, d\mu = \sup \int_E s \, d\mu \qquad [1.13]$$

donde el supremo está tomado sobre todas las funciones simples medibles s tales que $0 \leqslant s \leqslant f$.

El primer miembro de [1.13] se llama la *integral de Lebesgue* de f sobre E, con respecto a la medida μ. Es un número de $[0, \infty]$.

Obsérvese que tenemos aparentemente dos definiciones para $\int_E f \, d\mu$ si f es simple: la [1.12] y la [1.13]. Sin embargo, las dos asignan el mismo valor a la integral, puesto que f es, en este caso, la mayor de las funciones s que aparecen en el segundo miembro de [1.13].

1.8.2. Proposición. Las proposiciones siguientes son consecuencias inmediatas de las definiciones. Las funciones y conjuntos que aparecen en ellas se suponen medibles.

a) *Si* $0 \leqslant f \leqslant g$, *entonces* $\int_E f\, d\mu \leqslant \int_E g\, d\mu$.

b) *Si* $A \subset B$ *y* $f \geqslant 0$, *entonces* $\int_A f\, d\mu \leqslant \int_B f\, d\mu$.

c) *Si* $f \geqslant 0$ *y* c *es una constante,* $0 \leqslant c \leqslant \infty$, *entonces*

$$\int_E cf\, d\mu = c \int_E f\, d\mu.$$

d) *Si* $f(x) = 0$ *para todo* $x \in E$, *entonces* $\int_E f\, d\mu = 0$, *aunque sea* $\mu(E) = \infty$.

e) *Si* $\mu(E) = 0$, *entonces* $\int_E f\, d\mu = 0$, *aunque* $f(x) = \infty$ *para todo* $x \in E$.

f) *Si* $f \geqslant 0$, *se tiene* $\int_E f\, d\mu = \int_X \chi_E f\, d\mu$. $= \int_X \chi_E f\, d\mu$

Este último resultado muestra que podríamos haber restringido nuestra definición de integración a integrales sobre todo X, sin pérdida de generalidad. Si deseáramos entonces integrar sobre subconjuntos, podríamos utilizar *f)* como definición. Es sólo una cuestión de gusto qué definición elegir.

Se puede también hacer notar aquí que todo subconjunto medible E de un espacio de medida X es a su vez un espacio de medida, en una forma natural: Los nuevos conjuntos medibles son simplemente aquellos subconjuntos medibles de X que están en E, y la medida es la misma, salvo que su dominio es más restringido. Esto demuestra otra vez que si tenemos definido el proceso de integración sobre todo espacio de medida, lo tenemos automáticamente definido sobre todo subconjunto medible de cualquier espacio de medida.

1.8.3. Proposición. *Sean* s *y* t *funciones simples medibles sobre* X. *Para* $E \in \mathcal{M}$, *definamos*

$$\varphi(E) = \int_E s\, d\mu. \qquad [1.14]$$

Entonces φ *es una medida sobre* $\mathcal{M}$. *Además*

$$\int_X (s+t)\, d\mu = \int_X s\, d\mu + \int_X t\, d\mu. \qquad [1.15]$$

(Esta proposición contiene formas provisionales de los teoremas 1.8.5 y 1.8.8.)

DEMOSTRACIÓN. Si s es como en la definición 1.8.1, y si $E_1, E_2, \ldots,$ son elementos disjuntos de $\mathcal{M}$ cuya unión es E, la aditividad numerable de μ muestra que

$$\varphi(E) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{r=1}^{\infty} \mu(A_i \cap E_r)$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E_r) = \sum_{r=1}^{\infty} \varphi(E_r).$$

Además, $\mu(\emptyset) = 0$, así que φ no es idénticamente ∞.

Sea ahora s como antes, $\beta_1, \ldots, \beta_m$ los distintos valores de t, y

$$B_j = \{x : t(x) = \beta_j\}.$$

Si $E_{ij} = A_i \cap B_j$, se tiene

$$\int_{E_{ij}} (s+t)\, d\varphi = (\alpha_i + \beta_j)\mu(E_{ij})$$

y

$$\int_{E_{ij}} s\, d\mu + \int_{E_{ij}} t\, d\mu = \alpha_i \mu(E_{ij}) + \beta_j \mu(E_{ij}).$$

Entonces se verifica [1.15] con E_{ij} en el lugar de X. Como X es la unión disjunta de los conjuntos E_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m)$, la primera mitad de nuestra proposición implica que se verifica [1.15].

Llegamos ahora a la parte interesante de la teoría. Una de sus características más notables es la facilidad con que se manejan operaciones de paso al límite.

1.8.4. Teorema de la convergencia monótona de Lebesgue. *Sea* $\{f_n\}$ *una sucesión de funciones medibles sobre* X, *y supongamos que*

a) $0 \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots \leqslant \infty$ *para todo* $x \in X$,

b) $f_n(x) \to f(x)$ *cuando* $n \to \infty$, *para todo* $x \in X$.

Entonces f *es medible, y*

$$\int_X f_n\, d\mu \to \int_X f\, d\mu \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

DEMOSTRACIÓN. Como $\int f_n \leqslant \int f_{n+1}$, existe un $\alpha \in [0, \infty)$ tal que

$$\int_X f_n\, d\mu \to \alpha \quad \text{cuando } n \to \infty. \qquad [1.16]$$

Por el teorema 1.3.3, f es medible. Puesto que $f_n \leqslant f$, tenemos $\int f_n \leqslant \int f$ para todo n, y, por tanto, [1.16] implica

$$\alpha \leqslant \int_X f\, d\mu \qquad [1.17]$$

Sea s una función simple medible cualquiera tal que $0 \leqslant s \leqslant f$, c una constante, $0 < c < 1$, y definamos

$$E_n = \{x : f_n(x) \geqslant cs(x)\} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \qquad [1.18]$$

Cada E_n es medible, $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots$, y $X = \cup E_n$. Para obtener esta igualdad, consideremos algún $x \in X$. Si $f(x) = 0$, entonces $x \in E_1$; si $f(x) > 0$, se tiene $cs(x) < f(x)$, porque $c < 1$; por tanto, $x \in E_n$ para algún n. Además

$$\int_X f_n\, d\mu \geqslant \int_{E_n} f_n\, d\mu \geqslant c \int_{E_n} s\, d\mu \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \qquad [1.19]$$

Hagamos ahora $n \to \infty$ y apliquemos la proposición 1.8.3 y el teorema 1.5.2, *d)* a la última integral de [1.19]. El resultado es

$$\alpha \geqslant c \int_X s \, d\mu. \qquad [1.20]$$

Como [1.20] se verifica para todo $c < 1$, tenemos

$$\alpha \geqslant \int_X s \, d\mu \qquad [1.21]$$

para toda s simple medible que verifique $0 \leqslant s \leqslant f$, así que

$$\alpha \geqslant \int_X f \, d\mu. \qquad [1.22]$$

El teorema se deduce de [1.16], [1.17] y [1.22]. ////

1.8.5. Teorema. *Si* $f_n : X \to [0, \infty]$ *es medible para* $n = 1, 2, 3, \ldots$ *y*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (x \in X), \qquad [1.23]$$

entonces

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu. \qquad [1.24]$$

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, existen sucesiones $\{s_i'\}$, $\{s_i''\}$ de funciones simples medibles tales que $s_i' \to f_1$ y $s_i'' \to f_2$, como en el teorema 1.4.2. Si $s_i = s_i' + s_i''$, entonces $s_i \to f_1 + f_2$, y el teorema de la convergencia monótona, combinado con la proposición 1.8.3, muestra que

$$\int_X (f_1 + f_2) \, d\mu = \int_X f_1 \, d\mu + \int_X f_2 \, d\mu. \qquad [1.25]$$

Pongamos ahora $g_N = f_1 + \ldots + f_N$. La sucesión $\{g_N\}$ converge monótonamente a f, y si aplicamos un proceso de inducción a [1.25] vemos que

$$\int_X g_N \, d\mu = \sum_{n=1}^{N} \int_X f_n \, d\mu \qquad [1.26]$$

Aplicando una vez más el teorema de la convergencia monótona, obtenemos [1.24] y completamos la demostración. ////

Si μ es la medida discreta sobre un conjunto numerable, el teorema 1.8.5 es un resultado sobre series dobles de números reales no negativos (que puede, por supuesto, demostrarse por métodos elementales):

1.8.6. Corolario. *Si $a_{ij} \geqslant 0$ para i y $j = 1, 2, 3, \ldots$, entonces*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.$$

1.8.7. Lema de Fatou. *Si $f_n : X \to [0, \infty]$ es medible para cada entero positivo n, entonces*

$$\int_X (\lim_{n \to \infty} \inf f_n)\, d\mu \leqslant \lim_{n \to \infty} \inf \int_X f_n\, d\mu. \qquad [1.27]$$

La desigualdad estricta puede darse en [1.27] (véase el ejercicio 8).

DEMOSTRACIÓN. Pongamos

$$g_k(x) = \inf_{i \geqslant k} f_i(x) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots;\ x \in X). \qquad [1.28]$$

Entonces $g_k \leqslant f_k$, así que

$$\int_X g_k\, d\mu \leqslant \int_X f_k\, d\mu \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots). \qquad [1.29]$$

Además, $0 \leqslant g_1 \leqslant g_2 \leqslant \ldots$, cada g_k es medible por el teorema 1.3.3, y $g_k(x) \to \lim \inf f_n(x)$ cuando $k \to \infty$, por la definición 1.3.2. En consecuencia, el teorema de la convergencia monótona muestra que el primer miembro de [1.29] tiende al primer miembro de [1.27], cuando $k \to \infty$. Por tanto, [1.27] se deduce de [1.29].

1.8.8. Teorema. *Supongamos que $f : X \to [0, \infty]$ es medible y que*

$$\varphi(E) = \int_E f\, d\mu \qquad (E \in \mathcal{M}). \qquad [1.30]$$

Entonces φ es una medida sobre $\mathcal{M}$, y

$$\int_X g\, d\varphi = \int_X gf\, d\mu \qquad [1.31]$$

para toda g medible sobre X con recorrido en $[0, \infty]$. $g : X \to [0, \infty]$

DEMOSTRACIÓN. Sean $E_1, E_2, E_3, \ldots$ elementos disjuntos de $\mathcal{M}$ cuya unión es E. Obsérvese que

$$\chi_E f = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{E_j} f \qquad [1.32]$$

y que

$$\varphi(E) = \int_X \chi_E f\, d\mu, \qquad \varphi(E_j) = \int_X \chi_{E_j} f\, d\mu. \qquad [1.33]$$

Del teorema 1.8.5 se desprende que

$$\varphi(E)=\sum_{j=1}^{\infty}\varphi(E_j). \qquad [1.34]$$

Como $\varphi(\varnothing)=0$, [1.34] demuestra que φ es una medida.

Por otra parte, [1.30] muestra que [1.31] se verifica siempre que $g=\chi_E$ para algún $E\in\mathcal{M}$. Por tanto, [1.31] se verifica para toda función simple medible g, y el caso general se deduce del teorema de la convergencia monótona.

NOTA: La segunda afirmación del teorema 1.8.8 se escribe a veces en la forma

$$d\varphi=f\,d\mu \qquad [1.35]$$

No asignamos significados independientes a los símbolos $d\varphi$ y $d\mu$; [1.35] significa sólo que [1.31] se verifica para toda función medible $g\geqslant 0$.

El teorema 1.8.8 tiene un recíproco muy importante, el teorema de Radon-Nikodym, que se demostrará en el capítulo 6.

1.9. INTEGRACION DE FUNCIONES COMPLEJAS

Como anteriormente, en esta sección μ será una medida positiva sobre un espacio medible arbitrario X.

1.9.1. Definición. Definimos $L^1(\mu)$ como la colección de todas las funciones medibles complejas f sobre X para las que

$$\int_X |f|\,d\mu<\infty.$$

Nótese que la medibilidad de f implica la de $|f|$, como vimos en la proposición 1.2.8, *b)*; por tanto, la integral anterior está bien definida.

Los elementos de $L^1(\mu)$ reciben el nombre de funciones *Lebesgue integrables* (con respecto a μ) o *funciones sumables*. El significado del exponente 1 resultará claro en el capítulo 3.

1.9.2. Definición. Si $f=u+iv$, donde u y v son funciones medibles reales sobre X, y si $f\in L^1(\mu)$, definimos

$$\int_E f\,d\mu=\int_E u^+\,d\mu-\int_E u^-\,d\mu+i\int_E v^+\,d\mu-i\int_E v^-\,d\mu \qquad [1.36]$$

para todo conjunto medible E.

Aquí u^+ y u^- son las partes positiva y negativa de u, como fueron definidas en el apartado 1.3.5; v^+ y v^- se obtienen análogamente de v. Estas cuatro funciones son medibles, reales y no negativas; por tanto, las cuatro integrales

del segundo miembro de [1.36] existen por la definición 1.8.1. Más todavía, tenemos $u^+ \leqslant |u| \leqslant |f|$, etc., y, así, cada una de esas cuatro integrales es finita. Entonces [1.36] define la integral del primer miembro como un número complejo.

En ocasiones es deseable definir la integral de una función medible f con recorrido en $[-\infty, \infty]$ como

$$\int_E f\, d\mu = \int_E f^+\, d\mu - \int_E f^-\, d\mu, \qquad [1.37]$$

con tal que al menos una de las integrales del segundo miembro de [1.37] sea finita. El primer miembro de [1.37] es entonces un número en $[-\infty, \infty]$.

1.9.3. Teorema. *Supongamos que f y $g \in L^1(\mu)$ y que α y β son números complejos. Entonces $\alpha f + \beta g \in L^1(\mu)$, y*

$$\int_X (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int_X f\, d\mu + \beta \int_X g\, d\mu. \qquad [1.38]$$

DEMOSTRACIÓN. La medibilidad de $\alpha f + \beta g$ se deduce de la proposición 1.2.8, *c)*. Del apartado 1.8.2 y el teorema 1.8.5 se obtiene

$$\int_X |\alpha f + \beta g|\, d\mu \leqslant \int_X (|\alpha|\, |f| + |\beta|\, |g|)\, d\mu$$

$$= |\alpha| \int_X |f|\, d\mu + |\beta| \int_X |g|\, d\mu < \infty.$$

Por tanto, $\alpha f + \beta g \in L^1(\mu)$.

Para demostrar [1.38], basta con probar

$$\int_X (f+g)\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu \qquad [1.39]$$

y

$$\int_X (\alpha f)\, d\mu = \alpha \int_X f\, d\mu, \qquad [1.40]$$

y el caso general de [1.39] se obtendrá si demostramos la validez de dicha ecuación para f y g reales en $L^1(\mu)$.

Suponiendo esto, y haciendo $h = f + g$, tenemos

$$h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

o

$$h^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + h^-. \qquad [1.41]$$

Por el teorema 1.8.5,

$$\int h^+ + \int f^- + \int g^- = \int f^+ + \int g^+ + \int h^-, \qquad [1.42]$$

y puesto que cada una de estas integrales es finita, podemos trasponer y obtener [1.39].

Que [1.40] se verifica si $\alpha \geqslant 0$ se deduce de la proposición 1.8.2, *c)*. Es fácil comprobar que [1.40] se verifica si $\alpha = -1$, utilizando relaciones como $(-u)^+ = u^-$. El caso $\alpha = i$ es también fácil: si $f = u + iv$, entonces

$$\int (if) = \int (iu - v) = \int (-v) + i \int u = -\int v + i \int u = i\left(\int u + i \int v\right)$$
$$= i \int f.$$

Combinando estos casos con [1.39], obtenemos [1.40] para cualquier complejo α.

1.9.4. Teorema. *Si $f \in L^1(\mu)$, entonces*

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| \leqslant \int_X |f| \, d\mu.$$

DEMOSTRACIÓN. Pongamos $z = \int_X f \, d\mu$. Como z es un número complejo, existe otro complejo α, con $|\alpha| = 1$, tal que $\alpha z = |z|$. Sea u la parte real de αf. Entonces $u \leqslant |\alpha f| = |f|$. En consecuencia:

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| = \alpha \int_X f \, d\mu = \int_X \alpha f \, d\mu = \int_X u \, d\mu \leqslant \int_X |f| \, d\mu.$$

Se verifica la tercera de las igualdades anteriores, puesto que las precedentes muestran que $\int \alpha f \, d\mu$ es real. ////

Concluimos esta sección con otro importante teorema de convergencia.

1.9.5. Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue. *Supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles complejas sobre X tales que existe*

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) \qquad [1.43]$$

para todo $x \in X$. Si existe una función $g \in L^1(\mu)$ tal que

$$|f_n(x)| \leqslant g(x) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots; \; x \in X), \qquad [1.44]$$

entonces $f \in L^1(\mu)$

$$\lim_{n \to \infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0, \qquad [1.45]$$

y

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu. \qquad [1.46]$$

DEMOSTRACIÓN. Como $|f| \leqslant g$ y f es medible, $f \in L^1(\mu)$. Puesto que $|f_n - f| \leqslant 2g$, el lema de Fatou se puede aplicar a las funciones $2g - |f_n - f|$ y proporciona

$$\begin{aligned}\int_X 2g\, d\mu &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_X (2g - |f_n - f|)\, d\mu \\ &= \int_X 2g\, d\mu + \liminf_{n\to\infty} \left(- \int_X |f_n - f|\, d\mu \right) \\ &= \int_X 2g\, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\, d\mu.\end{aligned}$$

Como $\int 2g\, d\mu$ es finita, podemos restarla y obtener

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\, d\mu \leqslant 0. \qquad [1.47]$$

Si una sucesión de números reales no negativos no converge a 0, su límite superior es positivo. Entonces [1.47] implica [1.45]. Por el teorema 1.9.4, aplicado a $f_n - f$, [1.45] implica [1.46].

////

1.10. EL PAPEL DE LOS CONJUNTOS DE MEDIDA NULA

1.10.1. Definición. Sea P una propiedad que un punto x puede o no poseer. Por ejemplo, P podría ser la propiedad «$f(x) > 0$» si f fuese una función dada, o podría ser «$\{f_n(x)\}$ converge» si $\{f_n\}$ fuese una sucesión dada de funciones.

Si μ es una medida sobre una σ-álgebra $\mathcal{M}$ y si $E \in \mathcal{M}$, el enunciado «P se verifica en casi todo punto de E» (abreviadamente, «P se verifica en c.t.p. de E») significa que existe un $N \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(N) = 0$, $N \subset E$, y P se verifica en todo punto de $E - N$. Este concepto de en c.t.p. depende muy directamente, por supuesto, de la medida dada, y escribiremos «en c.t.p. [μ]» cuando la claridad del texto requiera indicar la medida.

Por ejemplo, si f y g son funciones medibles y si

$$\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0, \qquad [1.48]$$

decimos que $f = g$ en c.t.p. [μ] sobre X, y podemos escribir $f \sim g$. Se ve fácilmente que ésta es una relación de equivalencia. La transitividad ($f \sim g$ y $g \sim h$ implica $f \sim h$) es una consecuencia del hecho de que la unión de dos conjuntos de medida nula tiene medida nula.

Nótese que si $f \sim g$, entonces, para todo $E \in \mathcal{M}$,

$$\int_E f\, d\mu = \int_E g\, d\mu. \qquad [1.49]$$

Para verlo, sea N el conjunto que aparece en [1.47]; entonces E es la unión de los conjuntos disjuntos $E - N$ y $E \cap N$; en $E - N$, $f = g$, y $\mu(E \cap N) = 0$.

Generalmente hablando, pues, los conjuntos de medida 0 son despreciables en integración. Debería verificarse que todo subconjunto de un conjunto

despreciable fuera despreciable. Pero puede suceder que un conjunto $N \in \mathcal{M}$ con $\mu(N)=0$ tenga un subconjunto E que no sea un elemento de $\mathcal{M}$. Por supuesto, podemos *definir* $\mu(E)=0$ en este caso, pero esta extensión de μ, ¿sería aún una medida, es decir, estaría aún definida sobre una σ-álgebra? Es un hecho agradable el que la respuesta sea afirmativa:

1.10.2. Teorema. *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida, $\mathcal{M}^*$ la colección de todos los $E \subset X$ para los que existen conjuntos A y $B \in \mathcal{M}$ tales que $A \subset E \subset B$ y $\mu(B-A)=0$, y defínase $\mu(E)=\mu(A)$ en esta situación. Entonces $\mathcal{M}^*$ es una σ-álgebra, y μ es una medida sobre $\mathcal{M}^*$.*

Esta medida extendida se llama *completa*, puesto que todos los subconjuntos de conjuntos de medida cero son ahora medibles; la σ-álgebra $\mathcal{M}^*$ se llama la μ-compleción de $\mathcal{M}$. El teorema dice que toda medida puede completarse, así que, siempre que sea conveniente, podemos suponer que cualquier medida dada es completa; esto nos proporciona en realidad más conjuntos medibles, y, por tanto, más funciones medibles. La mayor parte de las medidas que se encuentran ordinariamente son ya completas, pero hay excepciones; una de éstas aparecerá en la demostración del teorema de Fubini, en el capítulo 7.

DEMOSTRACIÓN. Comprobamos las tres propiedades que definen una σ-álgebra. 1) $X \in \mathcal{M}$, por tanto, $X \in \mathcal{M}^*$. 2) Si $A \subset E \subset B$, entonces $B^c \subset E^c \subset A^c$, y $A^c - B^c = B - A$. 3) Si $A_i \subset E_i \subset B_i$, $A = \bigcup A_i$, $E = \bigcup E_i$ y $B = \bigcup B_i$, entonces $A \subset E \subset B$ y

$$B - A \subset \bigcup_1^\infty (B_i - A_i),$$

de modo que $\mu(B-A)=0$ si $\mu(B_i - A_i)=0$ para $i=1,2,3,\ldots$

Por otro lado, comprobamos que μ está bien definida sobre $\mathcal{M}^*$. Supongamos $A \subset E \subset B$, $A_1 \subset E \subset B_1$, y $\mu(B-A)=\mu(B_1-A_1)=0$. Entonces

$$A - A_1 \subset B_1 - A_1,$$

así que $\mu(A-A_1)=0$. Análogamente, $\mu(A_1-A)=0$. En consecuencia,

$$\mu(A)=\mu(A_1 \cap A)=\mu(A_1).$$

La aditividad numerable de μ es obvia. ////

1.10.3. Definición. El hecho de que funciones iguales en c.t.p. sean indistinguibles por lo que se refiere a la integración, sugiere que nuestra definición de función medible podría ser ampliada provechosamente. Llamaremos a una función f, definida en un conjunto $E \in \mathcal{M}$, *medible sobre* X si $\mu(E^c)=0$ y si $f^{-1}(V) \cap E$ es medible para todo conjunto abierto V. Si definimos $f(x)=0$ para $x \in E^c$, obtenemos una función medible sobre X en el sentido antiguo. Si nuestra medida es completa, podemos definir f sobre E de forma completamente arbitraria, y obtenemos también una función medible. La integral de f sobre cualquier conjunto $A \in \mathcal{M}$ es independiente de la definición de f sobre E; en consecuencia no se necesita ni siquiera especificar esta definición.

Hay muchas situaciones en donde esto aparece naturalmente. Por ejemplo, una función f definida sobre la recta real puede ser diferenciable sólo en

casi todo punto (con respecto a la medida de Lebesgue), pero bajo ciertas condiciones es aún cierto que f es la integral de su derivada; esto se discutirá en el capítulo 8. Una sucesión de funciones medibles $\{f_n\}$ sobre X puede converger sólo en casi todo punto; con nuestra nueva definición de medibilidad, el límite es también una función medible sobre X, y no tenemos que limitar el conjunto en el que se presenta efectivamente la convergencia.

Para ilustrar esto, vamos a enunciar un corolario del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, en una forma en la que se admiten conjuntos excepcionales de medida cero.

1.10.4. Teorema. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones complejas medibles definidas en c.t.p. de X y tales que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| \, d\mu < \infty. \qquad [1.50]$$

Entonces la serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad [1.51]$$

converge en casi todo x, $f \in L^1(\mu)$, y

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu. \qquad [1.52]$$

DEMOSTRACIÓN. Sea S_n el conjunto en el que está definida f_n, así que $\mu(S_n^c)=0$. Pongamos $\varphi(x)=\Sigma|f_n(x)|$ para $x \in S=\bigcap S_n$. Entonces $\mu(S^c)=0$. Por [1.50] y el teorema 1.8.5.

$$\int_S \varphi \, d\mu < \infty. \qquad [1.53]$$

Si $E=\{x \in S: \varphi(x) < \infty\}$, se deduce de [1.53] que $\mu(E^c)=0$. La serie [1.51] converge absolutamente para todo $x \in E$, y si $f(x)$ está definida por ella para $x \in E$, entonces $|f(x)|=\varphi(x)$ en E, así que $f \in L^1(\mu)$ en E, por [1.53]. Si $g_n=f_1+\ldots+f_n$, entonces $|g_n| \leqslant \varphi$, $g_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in E$, y el teorema 1.9.5 proporciona [1.52] con E en lugar de X. Esto es equivalente a [1.52], porque $\mu(E^c)=0$. ////

Nótese que aunque las $\{f_n\}$ estuvieran definidas en *todo* punto de X, [1.49] implicaría sólo que [1.51] converge en casi todo punto. He aquí algunas otras situaciones de las que pueden extraerse conclusiones sólo en casi todo punto:

1.10.5. Teorema. a) *Sea $f: X \to [0, \infty]$ medible, $E \in \mathfrak{M}$, y $\int_E f \, d\mu$. Entonces $f=0$ en c.t.p. de E.* b) *Sea $f \in L^1(\mu)$ y $\int_E f \, d\mu = 0$ para todo $E \in \mathfrak{M}$. Entonces $f=0$ en c.t.p. de X.* c) *Sea $f \in L^1(\mu)$ y*

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| = \int_X |f| \, d\mu.$$

Entonces existe una constante α tal que $\alpha f = |f|$ en c.t.p. de X.

Nótese que *c)* expresa la condición bajo la que se verifica la igualdad en el teorema 1.9.4.

DEMOSTRACIÓN.

a) Si $A_n=\{x \in E: f(x) > 1/n,\ n=1, 2, 3, \ldots,$ entonces

$$\frac{1}{n}\mu(A_n) \leqslant \int_{A_n} f\, d\mu \leqslant \int_E f\, d\mu = 0,$$

así que $\mu(A_n)=0$. Como $\{x \in E: f(x) > 0\} = \cup A_n$, *a)* queda demostrado.

b) Pongamos $f=u+iv$, y sea $E=\{x: u(x) \geqslant 0\}$. La parte real de $\int_E f\, d\mu$ es entonces $\int_E u^+\, d\mu$. Por tanto, $\int_E u^+\, d\mu = 0$, y *a)* implica que $u^+=0$ en c.t.p. Concluimos análogamente que

$$u^- = v^+ = v^- = 0 \quad \text{en c.t.p.}$$

c) Volvamos a la demostración del teorema 1.9.4. Nuestra hipótesis actual implica que la última desigualdad en la demostración del teorema debe de ser una igualdad en realidad. Por tanto, $\int (|f|-u)\, d\mu = 0$. Como $|f|-u=0$, *a)* muestra que $|f|=u$ en c.t.p. Esto dice que la parte real de αf es igual a $|\alpha f|$ en c.t.p., y, por tanto, $\alpha f = |\alpha f| = |f|$ en c.t.p., que es la conclusión buscada.

1.10.6. Teorema. *Sea $\mu(X) < \infty$, $f \in L^1(\mu)$, S un conjunto cerrado en el plano complejo, y supongamos que las medias*

$$A_E(f) = \frac{1}{\mu(E)} \int_E f\, d\mu$$

están en S para todo $E \in \mathfrak{M}$ con $\mu(E) > 0$. Entonces $f(x) \in S$ para casi todo $x \in X$.

DEMOSTRACIÓN. Sea Δ un disco circular cerrado (con centro en α y radio $r > 0$, por ejemplo) en el complementario de S. Como S^c es la unión de una cantidad numerable de tales discos, basta demostrar que $\mu(E)=0$, donde $E=f^{-1}(\Delta)$.

Si fuera $\mu(E) > 0$, entonces

$$|A_E(f)-\alpha| = \frac{1}{\mu(E)} \left| \int_E (f-\alpha)\, d\mu \right| \leqslant \frac{1}{\mu(E)} \int_E |f-\alpha|\, d\mu \leqslant r,$$

lo que es imposible, porque $A_E(f) \in S$. Por tanto, $\mu(E)=0$. ////

1.10.7. Teorema. *Sea $\{E_k\}$ una sucesión de conjuntos medibles en X tales que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) < \infty. \qquad [1.54]$$

Entonces casi todo $x \in X$ está a lo sumo en un número finito de conjuntos E_k.

DEMOSTRACIÓN. Si A es el conjunto de todos los x que están en infinitos E_k, tenemos que demostrar que $\mu(A)=0$. Pongamos

$$g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\chi_{E_k}(x) \qquad (x \in X). \tag{1.55}$$

Para cada x, cada término de la serie es ó 0 ó 1. Por tanto, $x \in A$ si, y sólo si, $g(x)=\infty$. Por el teorema 1.8.5, la integral de g sobre X es igual a la suma [1.36]. Entonces $g \in L^1(\mu)$, y, por tanto, $g(x) < \infty$ en c.t.p. ////

EJERCICIOS

1. ¿Existe alguna σ-álgebra infinita que posea un número de elementos numerable?
2. Demuéstrese un análogo al teorema 1.2.7 para n funciones.
3. Demuéstrese que si f es una función real sobre un espacio medible X tal que $\{x : f(x) \geqslant r\}$ es medible para todo racional r, f es medible.
4. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones en $[-\infty, \infty]$. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

   a) $$\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to\infty} a_n$$

   b) $$\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$

   si ninguna de las sumas es de la forma $\infty-\infty$.

   c) Si $a_n=b_n$ para todo n, se tiene

   $$\liminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \liminf_{n\to\infty} b_n.$$

   Pruébese mediante un ejemplo que puede darse la desigualdad estricta en *b)*.
5. Demuéstrese que el conjunto de puntos en los que converge una sucesión de funciones reales medibles es medible.
6. Sea X un conjunto no numerable, $\mathcal{M}$ la colección de todos los conjuntos $E \subset X$ tales que o E o E^c es a lo sumo numerable, y defínase $\mu(E)=0$ en el primer caso, y $\mu(E)=1$ en el segundo. Demuéstrese que $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra en X y que μ es una medida sobre $\mathcal{M}$.
7. Supóngase que $f_n : X \to [0, \infty]$ es medible para $n=1, 2, 3, \ldots$, $f_1 \geqslant f_2 \geqslant f_3 \geqslant \ldots \geqslant 0$, $f_n(x) \to f(x)$ cuando $n \to \infty$, para todo $x \in X$, y $f_1 \in L^1(\mu)$. Demuéstrese que entonces

   $$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\, d\mu = \int_X f\, d\mu$$

   y pruébese que esta condición no se obtiene si se omite la condición «$f_1 \in L^1(\mu)$».
8. Póngase $f_n=\chi_E$ si n es impar, $f_n=1-\chi_E$ si n es par. ¿Qué interés tiene este ejemplo en relación con el lema de Fatou?

9. Supóngase que μ es una medida positiva sobre X, $f: X \to [0, \infty]$ es medible, $\int_X f\, d\mu = c$, donde $0 < c < \infty$, y α es una constante. Pruébese que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X n \log [1 + (f/n)^\alpha]\, d\mu = \begin{cases} \infty & \text{si } 0 < \alpha < 1, \\ c & \text{si } \alpha = 1, \\ 0 & \text{si } 1 < \alpha < \infty. \end{cases}$$

Sugerencia: Si $\alpha \geqslant 1$, los integrandos están mayorados por αf. Si $\alpha < 1$, puede aplicarse el lema de Fatou.

10. Supóngase que $\mu(X) < \infty$, que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones complejas acotadas y medibles sobre X y que $f_n \to f$ uniformemente sobre X. Pruébese que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu = \int_X f\, d\mu,$$

y demuéstrese que no puede omitirse la hipótesis «$\mu(X) < \infty$».

11. Demuéstrese que

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$$

en el teorema 1.10.7, y pruébese entonces el teorema sin ninguna referencia a la integración.

12. Supóngase que $f \in L^1(\mu)$. Pruébese que para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $\int_E |f|\, d\mu < \epsilon$ si $\mu(E) < \delta$.

MEDIDAS DE BOREL POSITIVAS

2.1. ESPACIOS VECTORIALES

2.1.1. Definición. Un *espacio vectorial complejo* (o un espacio vectorial sobre el cuerpo complejo) es un conjunto V, cuyos elementos se llaman vectores, en el que se han definido dos operaciones llamadas *adición* y *multiplicación escalar* con las siguientes conocidas propiedades algebraicas:

A cada pareja de vectores x e y le corresponde un vector $x+y$, de tal forma que $x+y=y+x$ y $x+(y+z)=(x+y)+z$; V contiene un único vector 0 (el *vector cero* u *origen* de V) tal que $x+0=x$ para todo $x \in V$; y a cada $x \in V$ le corresponde un único vector $-x$ tal que $x+(-x)=0$.

A cada pareja (α, x), donde $x \in V$ y α es un escalar (en este contexto, la palabra *escalar* significa *número complejo),* está asociado un vector $\alpha x \in V$, de tal manera que $1x=x$, $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$, y tal que se verifican las dos propiedades distributivas:

$$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y, \qquad (\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x. \tag{2.1}$$

Una *transformación lineal* de un espacio vectorial V en otro espacio vectorial V_1 es una aplicación Λ de V en V_1 tal que

$$\Lambda(\alpha x+\beta y)=\alpha\Lambda x+\beta\Lambda y \tag{2.2}$$

para todo par x e $y \in V$ y todo par de escalares α y β. En el caso especial en que V_1 sea el cuerpo de escalares (este es el ejemplo más simple de espacio vectorial, salvo el trivial que consta sólo del cero), Λ recibe el nombre de *funcional lineal.* Un funcional lineal es entonces una función compleja sobre V que verifica [2.2].

Nótese que a menudo se escribe Λx, en lugar de $\Lambda(x)$, si Λ es lineal.

Las definiciones precedentes pueden establecerse igualmente bien con cualquier cuerpo en lugar del cuerpo complejo. A menos que se establezca explícitamente lo contrario, sin embargo, todos los espacios vectoriales que aparezcan en este libro serán complejos, con una excepción notable: los espacios euclídeos R^k son espacios vectoriales sobre el cuerpo real.

2.1.2. Integración como funcional lineal. El análisis está lleno de espacios vectoriales y transformaciones lineales, y existe una relación especialmente íntima entre integración, por un lado, y los funcionales lineales, por otro.

Por ejemplo, el teorema 1.9.3 muestra que $L^1(\mu)$ es un espacio vectorial para cualquier medida μ positiva, y que la aplicación

$$f \to \int_X f\, d\mu \qquad [2.3]$$

es un funcional lineal sobre $L^1(\mu)$. Análogamente, si g es una función medible acotada cualquiera, la aplicación

$$f \to \int_X fg\, d\mu \qquad [2.4]$$

es un funcional lineal sobre $L^1(\mu)$; veremos, en el capítulo 6, que los funcionales [2.4] son, en algún sentido, los únicos interesantes sobre $L^1(\mu)$.

Otro ejemplo lo proporciona el conjunto C de las funciones complejas continuas sobre el intervalo unidad $I=[0,1]$. La suma de dos funciones continuas es continua, y también lo es cualquier producto por un escalar de una función continua. Por tanto, C es un espacio vectorial, y si

$$\Lambda f = \int_0^1 f(x)\, dx \qquad (f \in C), \qquad [2.5]$$

donde la integral se toma en el sentido ordinario de Riemann, Λ es claramente un funcional lineal sobre C; Λ tiene una propiedad adicional interesante: es un *funcional lineal positivo*. Esto significa que $\Lambda f \geqslant 0$ si $f \geqslant 0$.

Uno de los objetivos que tenemos todavía planteados es la construcción de la medida de Lebesgue. La construcción puede basarse en el funcional lineal [2.5], mediante la siguiente observación: consideremos un segmento $(a,b) \subset I$ y la clase de todas las funciones $f \in C$ tales que $0 \leqslant f \leqslant 1$ sobre I y $f(x)=0$ para todo x que no esté en (a,b). Tenemos que $\Lambda f < b-a$ para todas estas funciones, pero podemos escoger f de tal manera que Λf sea tan próximo a $b-a$ como queramos. Entonces la longitud (o medida) de (a,b) está íntimamente relacionada con los valores del funcional Λ.

La observación precedente, cuando se considera desde un punto de vista más general, conduce al notable y extremadamente importante teorema de F. Riesz:

A toda función lineal positiva Λ sobre C le corresponde una medida de Borel finita positiva μ sobre I tal que

$$\Lambda f = \int_I f\, d\mu \qquad (f \in C). \qquad [2.6]$$

(El recíproco es obvio: si μ es una medida de Borel finita positiva sobre I y si Λ está definida mediante [2.6], entonces Λ es una función lineal positiva sobre C.)

Es claro que resulta de interés el cambiar el intervalo acotado I por R^1. Podemos hacerlo restringiendo nuestra atención a aquellas funciones continuas sobre R^1 que se anulan fuera de algún intervalo acotado. (Estas funciones son Riemann integrables, por ejemplo.)

Por otra parte, las funciones de varias variables aparecen frecuentemente en análisis. Deberíamos, pues, cambiar R^1 por R^n. Resulta entonces que la

demostración del teorema de Riesz sigue siendo válida sin prácticamente ningún cambio. Más todavía, ocurre que las propiedades euclídeas de R^n (coordenadas, ortogonalidad, etc.) no desempeñan ningún papel en la demostración; de hecho, si se piensa demasiado en ellas, hasta estorban. Ciertas propiedades *topológicas* de R^n son esenciales en la demostración (naturalmente, puesto que estamos tratando con funciones *continuas).* La propiedad crucial es la de *compacidad local:* cada punto de R^n tiene un entorno cuya adherencia es compacta.

En consecuencia, estableceremos el teorema de Riesz en un marco muy general (teorema 2.3.1). La existencia de la medida de Lebesgue se deduce entonces como un caso especial. Quien desee concentrarse en una situación más concreta puede pasar rápidamente sobre la siguiente sección que trata sobre algunos preliminares topológicos (en donde el lema de Urysohn es el tema de mayor interés; véase el ejercicio 3) y puede cambiar X por R^1 en el resto de este capítulo, al menos en una primera lectura.

2.2. PRELIMINARES TOPOLOGICOS

2.2.1. Definiciones. Sea X un espacio topológico, tal como fue definido en el apartado 1.2.1.

a) Un conjunto $E \subset X$ es cerrado si su complementario E^c es abierto. (Por tanto, $\emptyset$ y X son cerrados, uniones finitas de conjuntos cerrados son conjuntos cerrados y también lo son intersecciones arbitrarias de conjuntos cerrados.)

b) La *adherencia* $\bar{E}$ de un conjunto $E \subset X$ es el más pequeño de los conjuntos cerrados en X que contiene a E. (El razonamiento siguiente demuestra la existencia de $\bar{E}$: La colección Ω de subconjuntos cerrados de X que contienen a E es no vacía, puesto que $X \in \Omega$; $\bar{E}$ será la intersección de todos los elementos de Ω.)

c) Un conjunto $K \subset X$ es *compacto* si todo recubrimiento abierto de K contiene un recubrimiento finito de K. Más explícitamente, lo que se requiere es que si $\{V_\alpha\}$ es una colección de conjuntos abiertos cuya unión contiene a K, la unión de alguna subcolección finita de $\{V_\alpha\}$ también contenga a K.

En particular, si X es él mismo compacto, se le llama *espacio compacto.*

d) Entorno de un punto $p \in X$ es un subconjunto abierto cualquiera de X que contiene a p. (El uso de este término no está completamente normalizado; algunos utilizan «entorno de p» para designar a cualquier conjunto que contenga un conjunto abierto que contenga a p.)

e) X es un *espacio de Hausdorff* si se verifica lo siguiente: Si $p \in X$, y $q \in X$, entonces p tiene un entorno U y q tiene un entorno V tales que $U \cap V = \emptyset$.

f) X es *localmente compacto* si todo punto de X tiene un entorno cuya adherencia es compacta.

Evidentemente, todo espacio compacto es localmente compacto. Recordamos aquí el teorema de Heine-Borel: *Los subconjuntos compactos de un espacio euclídeo R^n son precisamente los cerrados y acotados*[26] (teorema 2.3.1).

De él se deduce fácilmente que R^n es un espacio de Hausdorff localmente compacto. Además, todo espacio métrico es un espacio de Hausdorff.

2.2.2. Teorema. *Supongamos K compacto y F cerrado en un espacio topológico X. Si $F \subset K$, F es compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Si $\{V_\alpha\}$ es un recubrimiento abierto de F y $W = F^c$, se tiene que $W \cup (\cup V_\alpha)$ recubre X; por tanto, existe una colección finita $\{V_{\alpha_i}\}$ tal que

$$K \subset W \cup V_{\alpha_1} \cup \ldots \cup V_{\alpha_n},$$

Entonces $F \subset V_{\alpha_1} \cup \ldots \cup V_{\alpha_n}$.

Corolario. *Si $A \subset B$ y B es de adherencia compacta, tambi n lo es A.*

2.2.3. Teorema. *Supongamos que X es un espacio de Hausdorff, $K \subset X$, K compacto y $p \in K^c$. Entonces existen conjuntos abiertos U y W tales que $p \in U$, $K \subset W$ y $U \cap W = \emptyset$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $q \in K$, el axioma de separación de Hausdorff implica que existen conjuntos abiertos disjuntos U_q y V_q, tales que $p \in U_q$ y $q \in V_q$. Puesto que K es compacto, hay puntos $q_1, \ldots, q_n \in K$ tales que

$$K \subset V_{q_1} \cup \ldots \cup V_{q_n}.$$

Los conjuntos

$$U = U_{q_1} \cap \ldots \cap U_{q_n} \quad \text{y} \quad W = V_{q_1} \cup \ldots \cup V_{q_n},$$

cumplen los requisitos del teorema. ////

Corolarios

a) *Los subconjuntos compactos de espacios de Hausdorff son cerrados.*

b) *Si F es cerrado y K es compacto en un espacio de Hausdorff, $F \cap K$ es compacto.*

El corolario *b)* se deduce del *a)* y del teorema 2.2.4.

2.2.4. Teorema. *Si $\{K_\alpha\}$ es una colección de subconjuntos compactos de un espacio de Hausdorff y si $\cap_\alpha K_\alpha = \emptyset$, también tiene intersección vacía alguna subcolección finita de $\{K_\alpha\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Pongamos $V_\alpha = K_\alpha^c$. Fijemos un elemento K_1 de $\{K_\alpha\}$. Como ningún punto de K_1 pertenece a todos los K_α, $\{V_\alpha\}$ es un recubrimiento abierto de K_1. Por tanto, $K_1 \subset V_{\alpha_1} \cup \ldots \cup V_{\alpha_n}$ para alguna colección finita $\{V_{\alpha_i}\}$. Esto implica que

$$K_1 \cap K_2 \cap \ldots \cap K_{\alpha_n} = \emptyset. \qquad ////$$

2.2.5. Teorema. *Supongamos U abierto en un espacio de Hausdorff localmente compacto X, $K \subset U$, K compacto. Entonces existe un conjunto abierto V de adherencia compacta tal que*

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset U.$$

DEMOSTRACIÓN. Como todo punto de K tiene un entorno con adherencia compacta, y K está recubierto por un número finito de tales entornos, K está en un conjunto abierto G de adherencia compacta. Si $U=X$, tómese $V=G$.

De otra manera, sea C el complementario de U. El teorema 2.2.3 muestra que a cada $p \in C$ le corresponde un conjunto abierto W_p tal que $K \subset W_p$ y $p \notin \overline{W}_p$. En consecuencia $\{C \cap \overline{G} \cap \overline{W}_p\}$, en donde p recorre C, es una colección de conjuntos compactos cuya intersección es vacía. Por el teorema 2.2.4 existen puntos $p_1, \ldots, p_n \in C$ tales que

$$C \cap \overline{G} \cap \overline{W}_{p_1} \cap \ldots \cap \overline{W}_{p_n} = \emptyset.$$

El conjunto

$$V = G \cap W_{p_1} \cap \ldots \cap W_{p_n}$$

tiene entonces las propiedades requeridas, porque

$$\overline{V} \subset \overline{G} \cap \overline{W}_{p_1} \cap \ldots \cap \overline{W}_{p_n}. \qquad ////$$

2.2.6. Definición. Sea f una función a valores reales (o en la recta real extendida) definida sobre un espacio topológico. Si

$$\{x : f(x) > \alpha\}$$

es abierto para todo α real, se dice que f es *semicontinua inferiormente.* Si

$$\{x : f(x) < \alpha\}$$

es abierto para todo real, se dice que f es *semicontinua superiormente.*

Las propiedades siguientes de las funciones semicontinuas son consecuencias casi inmediatas de la definición:

a) *Una función real es continua si, y sólo si, es a la vez semicontinua superior e inferiormente.*

b) *Las funciones características de conjuntos abiertos son semicontinuas inferiormente; las funciones características de conjuntos cerrados son semicontinuas superiormente.*

c) *El supremo de una colección cualquiera de funciones semicontinuas inferiormente también lo es. El ínfimo de una colección cualquiera de funciones semicontinuas superiormente también lo es.*

2.2.7. Definición. El *soporte* de una función compleja f sobre un espacio topológico X es la adherencia del conjunto

$$\{x : f(x) \neq \emptyset\}.$$

A la colección de todas las funciones complejas continuas sobre X cuyo soporte es compacto, se la designa mediante $C_c(X)$.

Obsérvese que $C_c(X)$ es un espacio vectorial. Esto se debe a lo siguiente:

a) El soporte de $f+g$ está en la unión de los soportes de f y de g, y cualquier unión finita de conjuntos compactos es compacta.

b) La suma de dos funciones complejas continuas es continua, así como también lo son el producto de escalares por funciones continuas.

(El enunciado y la demostración del teorema 1.2.7 se verifican palabra por palabra si se cambia «función medible» por «función continua», «espacio medible» por «espacio topológico»; tómese $\Phi(s, t) = s + t$, o $\Phi(s, t) = st$, para demostrar que sumas y productos de funciones continuas son continuas.)

2.2.8. Teorema. *Sean X e Y espacios topológicos, y sea $f: X \to Y$ continua. Si K es un subconjunto compacto de X, $f(K)$ es compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Si $\{V_\alpha\}$ es un recubrimiento abierto de $f(K)$, entonces $\{f^{-1}(V_\alpha)\}$ es un recubrimiento abierto de K; por tanto, $K \subset f^{-1}(V_{\alpha_1}) \cup \ldots \cup f^{-1}(V_{\alpha_n})$ para ciertos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, y, en consecuencia, $f(K) \subset V_{\alpha_1} \cup \ldots \cup V_{\alpha_n}$.

Corolario. *El recorrido de cualquier $f \in C_c(X)$ es un subconjunto compacto del plano complejo.*

De hecho, si K es el soporte de $f \in C_c(X)$, entonces $f(X) \subset f(K) \cup \{0\}$. Si X no es compacto, $0 \in f(X)$, pero 0 no tiene por qué estar en $f(K)$, como puede verse con sencillos ejemplos.

2.2.9. Notación. En este capítulo se utilizarán los siguientes convenios. La notación

$$K < f \qquad [2.7]$$

significará que K es un subconjunto compacto de X, que $f \in C_c(X)$, que $0 \leqslant f \leqslant 1$ para todo $x \in X$, y que $f(x) = 1$ para todo $x \in K$. La notación

$$f < V \qquad [2.8]$$

significará que V es abierto, que $f \in C_c(X)$, $0 \leqslant f \leqslant 1$, y que el soporte de f está en V. La notación

$$K < f < V \qquad [2.9]$$

se utilizará para indicar que se verifican ambas, [2.7] y [2.8].

2.2.10. Lema de Urysohn. *Supóngase que X es un espacio de Hausdorff localmente compacto, que V es abierto en X, que $K \subset V$ y que K es compacto. Entonces existe una $f \in C_c(X)$, tal que*

$$K < f < V. \qquad [2.10]$$

En términos de funciones características, la conclusión afirma la existencia de una *función continua* f que satisface las desigualdades $\chi_K \leqslant f \leqslant \chi_V$. Nótese que es fácil obtener funciones *semicontinuas* en estas condiciones; ejemplos son χ_K y χ_V.

DEMOSTRACIÓN. Sean $r_1 = 0$, $r_2 = 1$, y sea $r_3, r_4, r_5, \ldots$ una enumeración de los racionales en $(0, 1)$. Por el teorema 2.2.5, podemos obtener conjuntos abiertos V_0, y, por tanto, V_1 tal que $\bar{V}_0$ es compacto y

$$K \subset V_1 \subset \bar{V}_1 \subset V_0 \subset \bar{V}_0 \subset V. \qquad [2.11]$$

Supongamos $n \geqslant 2$ y que $V_{r_1}, \ldots, V_{r_n}$ se han escogido de tal manera que $r_i < r_j$ implica $\bar{V}_{r_j} \subset V_{r_i}$. Entonces uno de los números $r_1, \ldots, r_n$, que llamaremos r_i, será el mayor de los menores que r_{n+1}, y otro, r_j, será el menor de los mayores que r_{n+1}. Utilizando otra vez el teorema 2.2.5, podemos obtener $V_{r_{n+1}}$ tal que

$$\bar{V}_{r_j} \subset V_{r_{n+1}} \subset \bar{V}_{r_{n+1}} \subset V_{r_i}.$$

Continuando así, obtenemos una colección $\{V_r\}$ de conjuntos abiertos, uno para cada racional $r \in [0, 1]$, con las propiedades siguientes: $K \subset V_1$, $\bar{V}_0 \subset V$, *cada* $\bar{V}_r$ *es compacto y*

$$s > r \text{ implica } \bar{V}_s \subset V_r \qquad [2.12]$$

Definamos

$$f_r(x) = \begin{cases} r & \text{si } x \in V_r \\ 0 & \text{si } x \notin V_r \end{cases}, \quad g_s(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \bar{V}_s \\ s & \text{si } x \notin \bar{V}_s \end{cases} \qquad [2.13]$$

y

$$f = \sup_r f_r, \qquad g = \inf_s g_s \qquad [2.14]$$

Las observaciones que siguen a la definición 2.2.6 muestran que f es semicontinua inferiormente, y g, semicontinua superiormente. Es claro que $0 \leqslant f \leqslant 1$, que $f(x) = 1$ si $x \in K$, y que f tiene su soporte en $\bar{V}_0$. La demostración estará completa probando que $f = g$.

La desigualdad $f_r(x) > g_s(x)$ es posible sólo si $r > s$, $x \in V_r$, y $x \notin \bar{V}_s$. Pero $r > s$ implica $V_r \subset V_s$. Por tanto, $f_r \leqslant g_s$ para todo r y s, de donde $f \leqslant g$.

Supongamos $f(x) < g(x)$ para algún x. Entonces existen racionales r y s tales que $f(x) < r < s < g(x)$. Puesto que $f(x) < r$, tenemos $x \notin V_r$; como $g(x) > s$, $x \in \bar{V}_s$. Por [2.12], esto es una contradicción. Por tanto, $f = g$. ////

2.2.11. Teorema. *Supóngase que $V_1, \ldots, V_n$ son subconjuntos abiertos de un espacio de Hausdorff localmente compacto X, que K es compacto y que*

$$K \subset V_1 \cup \ldots \cup V_n.$$

Entonces existen funciones $h_i < V_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ tales que

$$h_1(x) + \ldots + h_n(x) = 1 \qquad (x \in K). \qquad [2.15]$$

Debido a [2.15], la colección $\{h_1, \ldots, h_n\}$ se llama una partición de la unidad sobre K, subordinada al recubrimiento $\{V_1, \ldots, V_n\}$.

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema 2.2.5, cada $x \in K$ posee un entorno W_x con adherencia compacta $\bar{W}_x \subset V_i$ para algún i (que depende de x). Existen puntos $x_1, \ldots, x_m$ tales que $W_{x_1} \cup \ldots \cup W_{x_m} \supset K$. Si $1 \leqslant i \leqslant n$, sea H_i la unión de aquellos $\bar{W}_{x_j}$ que están en V_i. Por el lema de Urysohn, existen funciones g_i tales que $H_i < g_i < V_i$. Definamos

$$\begin{aligned} h_1 &= g_1 \\ h_2 &= (1 - g_1) g_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_n &= (1 - g_1)(1 - g_2) \ldots (1 - g_{n-1}) g_n. \end{aligned} \qquad [2.16]$$

Entonces $h_i < V_i$. Se comprueba fácilmente por inducción que

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_n = 1 - (1 - g_1)(1 - g_2) \ldots (1 - g_n). \qquad [2.17]$$

Puesto que $K \subset H_1 \cup \ldots \cup H_n$, al menos una $g_i(x) = 1$ en cada punto $x \in K$; por tanto, [2.17] muestra que se verifica [2.15]. ////

2.3. EL TEOREMA DE REPRESENTACION DE RIESZ

2.3.1. Teorema. *Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto, y sea Λ un funcional lineal positivo sobre $C_c(X)$. Existe entonces una σ-álgebra $\mathcal{M}$ en X que contiene a todos los conjuntos de Borel de X, y existe una única medida positiva μ sobre $\mathcal{M}$ que representa a Λ en el sentido de que*

a) $\Lambda f = \int_X f\, d\mu$ *para toda* $f \in C_c(X)$,

y que tiene las siguientes propiedades adicionales:

b) $\mu(K) < \infty$ *para todo conjunto compacto* $K \subset X$.

c) *Para todo* $E \in \mathcal{M}$, *tenemos*

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subset V,\ V \text{ abierto}\}.$$

d) *La relación*

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E,\ K \text{ compacto}\}$$

se verifica para todo conjunto abierto E, y para todo $E \in \mathcal{M}$ con $\mu(E) < \infty$.

e) *Si $E \in \mathcal{M}$, $A \subset E$, y $\mu(E) = 0$, entonces $A \in \mathcal{M}$.*

La propiedad *a)* es, por supuesto, la más interesante. Después que definamos $\mathcal{M}$ y μ, las propiedades *b)* a *d)* se establecerán en el curso de la demostración de que $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra y que μ es numerablemente aditiva. Veremos más adelante (teorema 2.4.4) que en espacios X «razonables» *toda* medida de Borel que satisface *b)* también satisface *c)* y *d)*, y que *d)* se verifica realmente para todo $E \in \mathcal{M}$, en esos casos. La propiedad *e)* dice sólo que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ es un espacio de medida completo, en el sentido del teorema 1.10.8.

A lo largo de la demostración de este teorema, la letra K significará un subconjunto compacto de X y V denotará un conjunto abierto en X.

Comencemos demostrando la unicidad de μ. Si μ satisface *c)* y *d)*, es claro que μ está determinada sobre $\mathcal{M}$ por sus valores sobre conjuntos compactos. En consecuencia, basta demostrar que $\mu_1(K) = \mu_2(K)$ para todo K, siempre que μ_1 y μ_2 sean medidas para las que se verifique el teorema. Por tanto, fijemos K y $\epsilon > 0$. Por *b)* y *c)*, existe un $V \supset K$ con $\mu_2(V) < \mu_2(K) + \epsilon$; por el lema de Urysohn, existe una f tal que $K < f < V$; por tanto,

$$\mu_1(K) = \int_X \chi_K\, d\mu_1 \leqslant \int_X f\, d\mu_1 = \Lambda f = \int_X f\, d\mu_2$$

$$\leqslant \int_X \chi_V\, d\mu_2 = \mu_2(V) < \mu_2(K) + \epsilon.$$

Entonces $\mu_1(K) \leqslant \mu_2(K)$. Si se intercambian los papeles de μ_1 y de μ_2, se obtiene la desigualdad opuesta, y la unicidad está demostrada.

De paso, el cálculo anterior muestra que *a)* obliga a que se verifique *b)*.

Construcción de μ y $\mathcal{M}$

Para todo conjunto abierto V en X, definamos

$$\mu(V) = \sup\{\Lambda f : f \prec V\}. \qquad [2.18]$$

Si $V_1 \subset V_2$, es claro que [2.18] implica $\mu(V_1) \leqslant \mu(V_2)$. Por tanto,

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subset V,\ V \text{ abierto}\}, \qquad [2.19]$$

si E es un conjunto abierto, y es consistente con [2.18] el *definir* $\mu(E)$ mediante [2.19], para *todo* $E \subset X$.

Nótese que aunque hemos definido $\mu(E)$ para todo $E \subset X$, la aditividad numerable de μ se demostrará sólo sobre cierta σ-álgebra $\mathcal{M}$ en X.

Sea $\mathcal{M}_F$ la clase de todos los $E \subset X$ que satisfacen dos condiciones:

$$\mu(E) < \infty \quad \text{y} \quad \mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E,\ K \text{ compacto}\}. \qquad [2.20]$$

Finalmente, sea $\mathcal{M}$ la clase de todos los $E \subset X$ tales que $E \cap K \in \mathcal{M}_F$ para todo compacto K.

Demostración de que μ y $\mathcal{M}$ tienen las propiedades pedidas

Es evidente que μ es *monótona*, es decir, que $\mu(A) \leqslant \mu(B)$ si $A \subset B$ y que $\mu(E) = 0$ implica $E \in \mathcal{M}_F$ y $E \in \mathcal{M}$. Entonces se verifica *e)*, y, por tanto, también *c)*, por definición.

Como la demostración de las otras afirmaciones es bastante larga, será conveniente dividirla en varios pasos.

Obsérvese que la positividad de Λ implica que Λ es *monótono:* $f \leqslant g$ implica $\Lambda f \leqslant \Lambda g$. Esto es claro, ya que $\Lambda g = \Lambda f + \Lambda(g - f)$ y $g - f \geqslant 0$. Esta monotonía se utilizará en los pasos II y X.

Paso I. *Si $E_1, E_2, E_3, \ldots$ son subconjuntos arbitrarios de X, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1} \mu(E_i). \qquad [2.21]$$

DEMOSTRACIÓN. Demostramos en primer lugar que

$$\mu(V_1 \cup V_2) \leqslant \mu(V_1) + \mu(V_2), \qquad [2.22]$$

si V_1 y V_2 son abiertos. Escojamos $g \prec V_1 \cup V_2$. Por el teorema 2.2.11 existen funciones h_1 y h_2 tales que $h_i \prec V_i$ y $h_1(x) + h_2(x) = 1$ para todo x del soporte de g. Por tanto, $h_i g \prec V_i$, $g = h_1 g + h_2 g$, y, así,

$$\Lambda g = \Lambda(h_1 g) + \Lambda(h_2 g) \leqslant \mu(V_1) + \mu(V_2). \qquad [2.23]$$

Como [2.23] se verifica para *toda* $g \prec V_1 \cup V_2$, [2.22] está demostrado.

Si $\mu(E_i)=\infty$ para algún i, [2.21] es trivialmente cierto. En consecuencia, supondremos que $\mu(E_i) < \infty$ para todo i. Escojamos $\epsilon > 0$. Según [2.19] existen conjuntos abiertos $V_i \supset E_i$ tales que

$$\mu(V_i) < \mu(E_i) + 2^{-i}\epsilon \qquad (i=1, 2, 3, \ldots).$$

Pongamos $V = \bigcup_1^\infty V_i$, y escojamos $f < V$. Como f es de soporte compacto, vemos que $f < V_1 \cup \ldots \cup V_n$ para algún n. Aplicando un proceso de inducción en [2.22], obtenemos

$$\Lambda f \leqslant \mu(V_1 \cup \ldots \cup V_n) \leqslant \mu(V_1) + \ldots + \mu(V_n) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) + \epsilon.$$

Puesto que lo anterior se verifica para toda $f < V$, y como $\bigcup E_i \subset V$, se deduce que

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leqslant \mu(V) \leqslant \sum_{i=1} \mu(E_i) + \epsilon,$$

lo que demuestra [2.21], puesto que ϵ es arbitrario. ////

Paso II. *Si K es compacto, $K \in \mathfrak{M}_F$ y*

$$\mu(K) = \inf\{\Lambda f : K < f\}. \qquad [2.24]$$

Esto implica la afirmación *b)* del teorema.

DEMOSTRACIÓN. Si $K < f$ y $0 < \alpha < 1$, sea $V_\alpha = \{x : f(x) > \alpha\}$. Entonces $K \subset V_\alpha$, y $\alpha g < f$ siempre que $g < V_\alpha$. Así, pues,

$$\mu(K) \leqslant \mu(V_\alpha) = \sup\{\Lambda g : g < V_\alpha\} \leqslant \alpha^{-1}\Lambda f.$$

Haciendo $\alpha \to 1$ se concluye que

$$\mu(K) \leqslant \Lambda f. \qquad [2.25]$$

Por tanto, $\mu(K) < \infty$. Como K satisface [2.20] evidentemente, $K \in \mathfrak{M}_F$.

Si $\epsilon > 0$, existe $V \supset K$ con $\mu(V) < \mu(K) + \epsilon$. Por el lema de Urysohn, $K < f < V$ para alguna f. Entonces

$$\Lambda f \leqslant \mu(V) < \mu(K) + \epsilon,$$

que, combinado con [2.23], proporciona [2.24]. ////

Paso III. *Todo conjunto abierto satisface* [2.20]. *Por tanto, $\mathfrak{M}_F$ contiene a todo conjunto abierto V con $\mu(V) < \infty$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea α un número real tal que $\alpha < \mu(V)$. Existe una $i < V$ con $\alpha < \Lambda f$. Si W es un conjunto abierto *cualquiera* que contiene al soporte K de f, $f < W$, y, por tanto, $\Lambda f \leqslant \mu(W)$. Entonces $\Lambda f \leqslant \mu(K)$. Esto muestra un compacto $K \subset V$ con $\alpha < \mu(K)$, así que [2.20] se verifica para V.

Paso IV. *Supongamos que* $E=\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, *donde* $E_1, E_2, E_3, \ldots$ *son elementos de* $\mathcal{M}_F$ *disjuntos dos a dos. Entonces*

$$\mu(E)=\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i). \qquad [2.26]$$

Si, además, $\mu(E)<\infty$, *también* $E \in \mathcal{M}_F$.

DEMOSTRACIÓN. Probemos en primer lugar que

$$\mu(K_1 \cup K_2)=\mu(K_1)+\mu(K_2) \qquad [2.27]$$

si K_1 y K_2 son conjuntos compactos disjuntos. Tomemos $\epsilon>0$. Por el lema de Urysohn, existe una $f \in C_c(X)$ tal que $f(x)=1$ sobre K_1, $f(x)=0$ sobre K_2. Por el paso II, existe g tal que

$$K_1 \cup K_2 \prec g \quad \text{y} \quad \Lambda g < \mu(K_1 \cup K_2)+\epsilon.$$

Nótese que $K_1 \prec fg$ y $K_2 \prec (1-f)g$. Como Λ es lineal, se sigue de [2.25] que

$$\mu(K_1)+\mu(K_2) \leqslant \Lambda(fg)+\Lambda(g-fg)=\Lambda g < \mu(K_1 \cup K_2)+\epsilon.$$

Como ϵ es arbitrario, [2.27] se deduce ahora del paso I.

Si $\mu(E)=\infty$, [2.26] se sigue del paso I. Supongamos, por tanto, que $\mu(E)<\infty$, y tomemos un $\epsilon>0$. Como $E_i \in \mathcal{M}_F$, existen conjuntos compactos $H_i \subset E_i$ con

$$\mu(H_i) > \mu(E_i)-2^{-i}\epsilon \qquad (i=1, 2, 3, \ldots). \qquad [2.28]$$

Poniendo $K_n=H_1 \cup \ldots \cup H_n$ y utilizando un proceso de inducción en [2.27], obtenemos

$$\mu(E) \geqslant \mu(K_n)=\sum_{i=1}^{n} \mu(H_i) > \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)-\epsilon. \qquad [2.29]$$

Como [2.29] se verifica para todo n y para todo $\epsilon>0$, el primer miembro de [2.26] no es más pequeño que el segundo, y por ello [2.26] se deduce del paso I.

Pero si $\mu(E)<\infty$ y $\epsilon>0$, [2.26] muestra que

$$\mu(E) \leqslant \sum_{i=1}^{N} \mu(E_i)+\epsilon \qquad [2.30]$$

para algún N. De [2.29] se desprende que $\mu(E) \leqslant \mu(K_N)+2\epsilon$, y esto muestra que E satisface [2.20]; por tanto, $E \in \mathcal{M}_F$. ////

Paso V. *Si* $E \in \mathcal{M}_F$ *y* $\epsilon>0$, *existe un compacto* K *y un abierto* V *tales que* $K \subset E \subset V$ *y* $\mu(V-K)<\epsilon$.

DEMOSTRACIÓN. Nuestras definiciones muestran que existen K y V, de modo que

$$\mu(V)-\frac{\epsilon}{2} < \mu(E) < \mu(K)+\frac{\epsilon}{2}.$$

Como $V-K$ es abierto, $V-K \in \mathcal{M}_F$, por el paso III. Por tanto, el paso IV implica que

$$\mu(K)+\mu(V-K)=\mu(V) < \mu(K)+\epsilon. \qquad ////$$

Paso VI. *Si $A \in \mathcal{M}_F$ y $B \in \mathcal{M}_F$, entonces $A-B$, $A \cup B$ y $A \cap B$ pertenecen a $\mathcal{M}_F$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $\epsilon > 0$, el paso V muestra que hay conjuntos K_i y V_i tales que $K_1 \subset A \subset V_1$, $K_2 \subset B \subset V_2$, y $\mu(V_i-K_i) < \epsilon$, para $i=1, 2$. Como

$$A-B \subset V_1-K_2 \subset (V_1-K_1) \cup (K_1-V_2) \cup (V_2-K_2),$$

el paso I muestra que

$$\mu(A-B) \leqslant \epsilon+\mu(K_1-V_2)+\epsilon. \qquad [2.31]$$

Como K_1-V_2 es un conjunto compacto de $A-B$, [2.31] expresa que $A-B$ satisface [2.20], así que $A-B \in \mathcal{M}_F$.

Como $A \cup B=(A-B) \cup B$, una aplicación del paso IV muestra que $A \cup B \in \mathcal{M}_F$. Puesto que $A \cap B=A-(A-B)$, tenemos también $A \cap B \in \mathcal{M}_F$.

Paso VII. *$\mathcal{M}$ es una σ-álgebra en X que contiene todos los conjuntos de Borel.*

DEMOSTRACIÓN. Sea K un conjunto compacto arbitrario en X.

Si $A \in \mathcal{M}$, entonces $A^c \cap K=K-(A \cap K)$, así que $A^c \cap K$ es diferencia de dos elementos de $\mathcal{M}_F$. Por tanto, $A^c \cap K \in \mathcal{M}_F$, y concluimos: $A \in \mathcal{M}$ implica $A^c \in \mathcal{M}$.

A continuación, supongamos $A=\bigcup_1^\infty A_i$, donde cada $A_i \in \mathcal{M}$. Pongamos $B_1=A_1 \cap K$, y

$$B_n=(A_n \cap K)-(B_1 \cup \ldots \cup B_{n-1}) \qquad (n=2, 3, 4, \ldots). \qquad [2.32]$$

Entonces $\{B_n\}$ es una sucesión disjunta de elementos de $\mathcal{M}_F$, por el paso VI, y $A \cap K=\bigcup_1^\infty B_n$. Se sigue del paso IV que $A \cap K \in \mathcal{M}_F$. Por tanto, $A \in \mathcal{M}$.

Finalmente, si C es cerrado, $C \cap K$ es compacto, así que $C \cap K \in \mathcal{M}_F$, y, por tanto, $C \in \mathcal{M}$. En particular, $X \in \mathcal{M}$.

Hemos demostrado, pues, que $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra en X que contiene todos los subconjuntos cerrados de X. Por tanto, $\mathcal{M}$ contiene todos los conjuntos de Borel de X.

Paso VIII. *$\mathcal{M}_F$ consta de precisamente aquellos conjuntos $E \in \mathcal{M}$ para los que $\mu(E) < \infty$.*

Esto implica la afirmación *d)* del teorema.

DEMOSTRACIÓN. Si $E \in \mathcal{M}_F$, los pasos II y VI implican que $E \cap K \in \mathcal{M}_F$ para todo compacto K; así, pues, $E \in \mathcal{M}$.

Recíprocamente, supongamos que $E \in \mathcal{M}$ y que $\mu(E) < \infty$, y tomemos $\epsilon > 0$. Existe un conjunto abierto $V \supset E$ con $\mu(V) < \infty$; por III y V, existe un compacto $K \subset V$ con $\mu(V-K) < \epsilon$. Como $E \cap K \in \mathcal{M}_F$, existe un conjunto compacto $H \subset E \cap K$ con

$$\mu(E \cap K) < \mu(H)+\epsilon.$$

Puesto que $E \subset (E \cap K) \cup (V-K)$, se deduce que

$$\mu(E) \leqslant (E \cap K) + \mu(V-K) < \mu(H) + 2\epsilon,$$

lo que implica que $E \in \mathfrak{M}_F$. ////

Paso IX. *μ es una medida sobre $\mathfrak{M}$.*

DEMOSTRACIÓN. La aditividad numerable de μ sobre $\mathfrak{M}$ se desprende inmediatamente de los pasos IV y VIII.

Paso X. *Para toda $f \in C_c(X)$, $\Lambda f = \int_X f\, d\mu$.*

Esto demuestra *a)* y completa el teorema.

DEMOSTRACIÓN. Es claro que basta demostrar el enunciado para f real. Además, es suficiente demostrar la *desigualdad*

$$\Lambda f \leqslant \int_X f\, d\mu \qquad [2.33]$$

para toda función real $f \in C_c(X)$. En efecto, una vez establecida [2.33], la linealidad de Λ muestra que

$$-\Lambda f = \Lambda(-f) \leqslant \int_X (-f)\, d\mu = -\int_X f\, d\mu,$$

que, junto con [2.33], prueba que se verifica la igualdad en dicha ecuación.

Sea K el soporte de una función real $f \in C_c(X)$, sea $[a, b]$ un intervalo que contiene al recorrido de f (nótese el corolario del teorema 2.2.8), tómese $\epsilon > 0$ y escójase y_i, para $i = 0, 1, \ldots, n$, de tal modo que $y_i - y_{i-1} < \epsilon$, y

$$y_0 < a < y_1 < \ldots < y_n = b. \qquad [2.34]$$

Póngase

$$E_i = \{x : y_{i-1} < f(x) \leqslant y_i\} \cap K \qquad (i = 1, \ldots, n). \qquad [2.35]$$

Como f es continua, es Borel medible, y los conjuntos E_i son, por tanto, conjuntos de Borel disjuntos cuya unión es K. Existen conjuntos abiertos $V_i \supset E_i$ tales que

$$\mu(V_i) < \mu(E_i) + \frac{\epsilon}{n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad [2.36]$$

y tales que $f(x) < y_i + \epsilon$ para todo $x \in V_i$. Del teorema 2.2.11 se deduce que hay funciones $h_i < V_i$ tales que $\Sigma h_i = 1$ sobre K. Por tanto, $f = \Sigma h_i f$, y el paso II muestra que

$$\mu(K) \leqslant \Lambda(\Sigma h_i) = \Sigma \Lambda h_i.$$

Como $h_i f \leqslant (y_i + \epsilon) h_i$, y puesto que $y_i - \epsilon < f(x)$ sobre E_i, tenemos:

$$\Lambda f = \sum_{i=1}^{n} \Lambda(h_i f) \leqslant \sum_{i=1}^{n} (y_i + \epsilon) \Lambda h_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (|a| + y_i + \epsilon)\Lambda h_i - |a| \sum_{i=1}^{n} \Lambda h_i$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} (|a| + y_i + \epsilon)\,[\mu(E_i) + \epsilon/n] - |a|\mu(K)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (y_i - \epsilon)\mu(E_i) + 2\epsilon\mu(K) + \frac{\epsilon}{n}\sum_{i=1}^{n} (|a| + y_i + \epsilon)$$

$$\leqslant \int_X f\,d\mu + \epsilon[2\mu(K) + |a| + b + \epsilon].$$

Como ϵ es arbitrario, se obtiene [2.33], lo que completa la demostración del teorema. ////

2.4. PROPIEDADES DE REGULARIDAD DE LAS MEDIDAS DE BOREL

2.4.1. Definición. Una *medida de Borel sobre* X es una medida μ definida sobre la σ-álgebra de todos los conjuntos de Borel de un espacio de Hausdorff localmente compacto X. Si μ es positiva, un conjunto de Borel $E \subset X$ se dice *regular exterior* o *regular interior,* respectivamente, si E posee la propiedad *c)* o la *d)* del teorema 2.3.1. Si todo conjunto de Borel en X es a la vez regular exterior e interior, μ se dice *regular.*

En nuestra demostración del teorema de Riesz, la regularidad exterior de todo conjunto E fue construida en el proceso de demostración, pero la regularidad interior fue demostrada sólo para los conjuntos abiertos y para aquellos $E \in \mathfrak{M}$ para los que $\mu(E) < \infty$. En realidad, este defecto está en la misma naturaleza de las cosas. No se puede demostrar la regularidad de μ bajo las hipótesis del teorema 2.3.1 como muestra el ejemplo descrito en el ejercicio 17.

Sin embargo, un ligero refuerzo de las hipótesis sí nos proporciona una medida regular. El teorema 2.4.3 lo demuestra. Especificando un poco más estas hipótesis, el teorema 2.4.4 muestra que desaparecen elegantemente todos los problemas de regularidad.

2.4.2. Definición. Un conjunto E en un espacio topológico se llama *σ-compacto* si E es una unión numerable de conjuntos compactos.

Un conjunto E en un espacio de medida (con medida μ) se dice que tiene *medida σ-finita* si E es una unión numerable de conjuntos E_i con $\mu(E_i) < \infty$.

Por ejemplo, en la situación descrita en el teorema 2.3.1, todo conjunto σ-compacto tiene medida σ-finita. Además, es fácil ver que si $E \in \mathfrak{M}$ y E tiene medida σ-finita, E es regular interior.

2.4.3. Teorema. *Sea X un espacio de Hausdorff σ-compacto y localmente compacto. Si $\mathfrak{M}$ y μ son como en el enunciado del teorema* 2.3.1, *entonces $\mathfrak{M}$ y μ tienen las propiedades siguientes:*

a) *Si* $E \in \mathfrak{M}$ *y* $\epsilon > 0$, *existen un conjunto cerrado* F *y un conjunto abierto tales que* $F \subset E \subset V$ *y* $\mu(V-F) < \epsilon$.

b) μ *es una medida de Borel regular sobre* X.

c) *Si* $E \in \mathfrak{M}$, *existen conjuntos* A *y* B *tales que* A *es un* F_σ, B *es un* G_δ $A \subset E \subset B$, *y* $\mu(B-A)=0$.

Como corolario de *c)* vemos que todo $E \in \mathfrak{M}$ es la unión de un F_σ y un conjunto de medida nula.

DEMOSTRACIÓN. Sea $X=K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup \ldots$, donde cada K_n es compacto. Si $E \in \mathfrak{M}$ y $\epsilon > 0$, entonces $\mu(K_n \cap E) < \infty$, y existen conjuntos abiertos $V_n \supset K_n \cap E$ tales que

$$\mu(V_n-(K_n \cap E)) < \frac{\epsilon}{2^{n+1}} \qquad (n=1, 2, 3, \ldots). \tag{2.37}$$

Si $V=\cup V_n$, entonces $V-E \subset (V_n-(K_n \cap E))$, y, por tanto,

$$\mu(V-E) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Apliquemos esto a E^c en lugar de a E: Existe un conjunto abierto $W \supset E^c$ tal que $\mu(W-E^c) < \epsilon/2$. Si $F=W^c$, entonces $F \subset E$, y $E-F=W-E^c$. Ahora, *a)* queda demostrado.

Si F es cerrado, entonces $F=\cup (K_n \cap F)$, cada $K_n \cap F$ es compacto, y

$$\mu((K_1 \cup \ldots \cup K_n) \cap F) \to \mu(F)$$

cuando $n \to \infty$. Por tanto, *b)* se deduce de *a)* .

Si aplicamos *a)* con $\epsilon=1/j$ $(j=1, 2, 3, \ldots)$ obtenemos conjuntos cerrados F_i y conjuntos abiertos V_j tales que $F_j \subset E \subset V_j$ y $\mu(V_j-F_j) < 1/j$. Pongamos $A=\cup F_j$ y $B=\cap V_j$. Entonces $A \subset E \subset B$, A es un F_σ, B es un G_δ, y $\mu(B-A)=0$, ya que $B-A \subset V_j-F_j$ para $j=1, 2, 3, \ldots$ Esto demuestra *c)*.

2.4.4. Teorema. *Sea* X *un espacio de Hausdorff localmente compacto en el que todo conjunto abierto es* σ*-compacto. Sea* λ *cualquier medida de Borel positiva sobre* X *tal que* $\lambda(K) < \infty$ *para todo conjunto compacto. Entonces* λ *es regular.*

Nótese que todo espacio euclídeo R^k satisface estas hipótesis, puesto que todo conjunto abierto en R^k es una unión numerable de bolas cerradas.

DEMOSTRACIÓN. Pongamos $\Lambda f=\int_X f\, d\lambda$, para $f \in C_c(X)$. Como $\lambda(K) < \infty$ para todo compacto K, Λ es un funcional lineal positivo sobre $C_c(X)$, y existe una medida μ, que satisface las conclusiones del teorema 2.4.3, tal que

$$\int_X f\, d\lambda = \int_X f\, d\mu \qquad (f \in C_c(X)) \tag{2.38}$$

Sea V un abierto en X. Entonces $V=\cup H_i$, donde H_i es compacto para $i=1, 2, 3, \ldots$ Tomemos f_1 de modo que $H_1 \prec f_1 \prec V$. Habiendo escogido $f_1, \ldots, f_n$, con soportes $K_1, \ldots, K_n$ en V, tomemos f_{n+1} de modo que

$$H_1 \cup \ldots \cup H_n \cup K_1 \cup \ldots \cup K_n \prec f_{n+1} \prec V. \tag{2.39}$$

La sucesión $\{f_n\}$ crece monótonamente hacia χ_V en todo punto de X. Por tanto, [2.38] implica que

$$\lambda(V) = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \mu(V). \qquad [2.40]$$

Sea E un conjunto de Borel en X, y tomemos $\epsilon > 0$. Como μ satisface el teorema 2.4.3, existen un conjunto cerrado F y un conjunto abierto V tales que $F \subset E \subset V$ y $\mu(V-F) < \epsilon$. Pero $V-F$ es abierto. Por tanto, [2.40] muestra que $\lambda(V-F) < \epsilon$, y esto prueba la regularidad de λ, como en el teorema 2.4.3.

NOTA: También se obtiene fácilmente que $\lambda(E) = \mu(E)$ para todo conjunto de Borel E en X.

En el ejercicio 18 se describe un espacio de Hausdorff compacto que contiene un conjunto abierto que no es σ-compacto y en el que deja de verificarse el teorema anterior.

2.5. MEDIDA DE LEBESGUE

2.5.1. Espacios euclídeos. El espacio euclídeo k-dimensional R es el conjunto de todos los puntos $x = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$, cuyas coordenadas son números reales, con las estructuras algebraica y topológica siguientes:

Si $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \ldots, \eta_k)$, y α es un número real, $x+y$ y αx se definen mediante

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1, \ldots, \xi_k + \eta_k), \qquad \alpha x = (\alpha\xi_1, \ldots, \alpha\xi_k). \qquad [2.41]$$

Esto hace de R^k un espacio vectorial real. Si $x \cdot y = \Sigma \xi_i \eta_i$ y $|x| = (x \cdot x)^{1/2}$, la desigualdad de Schwarz $|x \cdot y| \leqslant |x|\,|y|$ conduce a la desigualdad triangular

$$|x - y| \leqslant |x - z| + |z - y|; \qquad [2.42]$$

por tanto, obtenemos una métrica haciendo $\rho(x, y) = |x - y|$. Suponemos que estos hechos son conocidos, y los demostraremos con mayor generalidad en el capítulo 4.

Si $E \subset R^k$ y $x \in R^k$, el *trasladado de E mediante x* es el conjunto

$$E + x = \{y + x : y \in E\} \qquad [2.43]$$

Un conjunto de la forma

$$W = \{x : \alpha_i < \xi_i < \beta_i, \ 1 \leqslant i \leqslant k\}, \qquad [2.44]$$

o cualquier conjunto obtenido cambiando en [2.44] cualquiera de los signos $<$ por $\leqslant$, se llama una *k-celda* *; su volumen se define como

$$\operatorname{vol}(W) = \prod_{i=1}^{k} (\beta_i - \alpha_i). \qquad [2.45]$$

Si $a \in R^k$ y $\delta > 0$, llamaremos al conjunto

$$Q(a; \delta) = \{x : \alpha_i \leqslant \xi_i \leqslant \alpha_i + \delta, \ 1 \leqslant i \leqslant k\} \qquad [2.46]$$

una *δ-caja con vértice en a.* Aquí $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

* También se llaman *intervalos en R^k. (N. del T.)*

Para $n=1, 2, 3, \ldots$, sea P_n el conjunto de todos los $x \in R^k$ cuyas coordenadas son múltiplos enteros de 2^{-n}, y sea Ω_n la colección de todas las 2^{-n}-cajas con vértices en puntos de P_n. Necesitaremos las siguientes cuatro propiedades de $\{\Omega_n\}$. Las tres primeras son obvias, como puede observarse por simple inspección.

a) *Si n es fijo, cada $x \in R^k$ está en uno, y sólo uno, de los elementos de Ω_n.*
b) *Si $Q' \in \Omega_n$, $Q'' \in \Omega_r$, y $r < n$, entonces o bien $Q' \subset Q''$ ó $Q' \cap Q'' = \varnothing$.*
c) *Si $Q \in \Omega_r$, entonces* $\mathrm{vol}(Q) = 2^{-rk}$; *y si $n > r$, el conjunto P_n tiene exactamente $2^{(n-r)k}$ puntos en Q.*
d) *Todo conjunto abierto no vacío en R^k es una unión numerable de cajas disjuntas que pertenecen a $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \ldots$*

Demostración de *d)*. Si V es abierto, todo $x \in V$ pertenece a una bola abierta que está en V; por tanto, $x \in Q \subset V$ para algún Q perteneciente a algún Ω_n. De esta colección de cajas, tomemos aquellas que pertenecen a Ω_1 y quitemos las de Ω_2, Ω_3, ... que están en cualquiera de las cajas selecionadas. De la colección restante tomemos aquellas cajas de Ω_2 que están en V y quitemos las que están en Ω_3, Ω_4, ..., que están en cualquiera de las cajas seleccionadas. Procediendo de esta forma, *a)* y *b)* muestran que se verifica *d)*.

2.5.2. Teorema. *Existe una medida completa positiva m definida sobre una σ-álgebra $\mathcal{M}$ en R^k, con las propiedades siguientes:*

a) *$m(W) = vol(W)$ para toda k-celda W.*
b) *$\mathcal{M}$ contiene a todos los conjuntos de Borel en R; más precisamente, $E \in \mathcal{M}$ si, y sólo si, existen conjuntos A y $B \subset R^k$ tales que $A \subset E \subset B$, A es un F_σ, B es un G_δ y $m(B-A)=0$. Además, m es regular.*
c) *m es invariante por traslaciones, es decir*

$$m(E+x) = m(E)$$

para todo $E \in \mathcal{M}$ y todo $x \in R^k$.
d) *Si μ es una medida de Borel positiva invariante por traslaciones cualesquiera sobre R^k tal que $\mu(K) < \infty$ para todo conjunto compacto K, entonces existe una constante c tal que $\mu(E) = cm(E)$ para todos los conjuntos de Borel $E \subset R^k$.*

Los elementos de $\mathcal{M}$ son los conjuntos *Lebesgue medibles* en R^k; m es la *medida de Lebesgue* sobre R^k. Cuando se requiera por razones de claridad, escribiremos m_k en lugar de m. Para una descripción de otras medidas sobre R^1, véase el teorema 8.2.3.

Demostración. Si f es una función compleja cualquiera sobre R^k, con soporte compacto, definamos

$$\Lambda_n f = 2^{-nk} \sum_{x \in P_n} f(x) \qquad (n=1, 2, 3, \ldots), \tag{2.47}$$

donde P_n está definido como en el apartado 2.5.1.

Supongamos ahora $f \in C_c(X)$, f real, $\epsilon > 0$, y sea W una k-celda abierta que contiene al soporte de f. La continuidad uniforme de f[26] (teorema 4.2.7) muestra que existe un entero N y que existen funciones g y h con soporte en W, tales que 1), g y h son constantes sobre cada caja que pertenece a Ω_N; 2), $g \leqslant f \leqslant h$, y 3), $h - g < \epsilon$. Si $n > N$, la propiedad 2.5.1, *c)*, muestra que

$$\Lambda_N g = \Lambda_n g \leqslant \Lambda_n f \leqslant \Lambda_n h = \Lambda_N h. \qquad [2.48]$$

Entonces los límites superior e inferior de $\{\Lambda_n f\}$ difieren, como mucho, en $\epsilon \operatorname{vol}(W)$, y como ϵ es arbitrario, hemos demostrado la existencia de

$$\Lambda f = \lim_{n \to \infty} \Lambda_n f \qquad (f \in C_c(R^k)). \qquad [2.49]$$

Es inmediato ver que Λ es un funcional lineal positivo sobre $C_c(R^k)$. (De hecho, f es precisamente la integral de Riemann de f sobre R^k. Hemos pasado por la construcción anterior para no depender de ningún teorema sobre integrales de Riemann en varias variables.) *Definimos m y $\mathcal{M}$ como la medida y σ-álgebra asociadas a este Λ de acuerdo con el teorema* 2.3.1.

Como el teorema 2.3.1 nos proporciona una medida completa y R^k es σ-compacto, el teorema 2.4.3 implica la afirmación *b)* del teorema 2.5.2.

Para demostrar *a)* sea W la celda abierta [2.44], sea E_r la unión de aquellas cajas que pertenecen a Ω_r cuya adherencia está en W, y tomemos f tal que $\bar{E}_r \prec f \prec W$. Nuestra construcción de Λf muestra entonces que

$$\Lambda f \geqslant \prod_{i=1}^{k} (\beta_i - \alpha_i - 2^{1-r}). \qquad [2.50]$$

Hagamos $r \to \infty$, y tengamos en cuenta que

$$m(W) = \sup\{\Lambda f : f \prec W\}, \qquad [2.51]$$

por la construcción hecha en el teorema 2.3.1. Entonces $m(W) = \operatorname{vol}(W)$ para toda celda abierta W, y como cada celda es la intersección de una sucesión decreciente de celdas abiertas, obtenemos *a)*.

Como $\operatorname{vol}(W + x) = \operatorname{vol}(W)$, se tiene que

$$m(E + x) = m(E) \qquad (x \in R^k) \qquad [2.52]$$

se verifica para toda celda E; en particular, [2.52] es válida para toda caja E; la propiedad 2.5.1, *d)*, implica en consecuencia que [2.52] se verifica para todo conjunto abierto E; y ahora dicha ecuación se sigue para todo $E \in \mathcal{M}$, puesto que

$$m(E) = \inf\{m(V) : E \subset V,\ V \text{ abierto}\}.$$

Esto demuestra *c)*.

Finalmente, supongamos que μ es una medida de Borel invariante por traslaciones sobre R^k. Pongamos $c = \mu(Q_0)$, donde Q_0 es una 1-caja. Como Q_0 es la unión de 2^{nk} 2^{-k}-cajas disjuntas, puesto que éstas son trasladadas unas de otras, y como $m(Q_0) = 1$, tenemos

$$2^{nk}\mu(Q) = \mu(Q_0) = cm(Q_0) = 2^{nk}\, cm(Q) \qquad [2.53]$$

para toda 2^{-n}-caja Q. La propiedad 2.5.1, *d)*, implica que $\mu(E)=cm(E)$ para todo conjunto abierto E, y la regularidad de m y μ (teorema 2.4.4) muestra que esta última ecuación se verifica para todo conjunto de Borel E.

Esto completa la demostración. ////

2.5.3. Notas. Si m es la medida de Lebesgue sobre R^k, es costumbre escribir $L^1(R^k)$ en lugar de $L^1(m)$. Si E es un subconjunto Lebesgue medible de R^k, y m se restringe a los subconjuntos medibles de E, se obtiene de manera obvia un nuevo espacio de medida. La frase «$f \in L^1$ sobre E» o «$f \in L^1(E)$» se utiliza para indicar que f es integrable en este espacio de medida.

Si $k=1$, I es cualquiera de los conjuntos (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$, y si $f \in L^1(I)$, es habitual escribir

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{en lugar de} \quad \int_I f\,dm$$

Puesto que la medida de Lebesgue de cualquier punto aislado es 0, no tiene ninguna importancia sobre cuál de estos cuatro conjuntos está extendida la integral.

Si f es una función compleja continua sobre $[a, b]$, la integral de Riemann y la integral de Lebesgue de f sobre $[a, b]$ coinciden. Esto es obvio a partir de nuestra construcción si $f(a)=f(b)=0$ y si $f(x)$ se define como 0 para $x<a$ y para $x>b$. El caso general se deduce sin dificultad. En realidad, lo mismo es cierto para toda función f Riemann integrable sobre $[a, b]$. Como no tendremos ocasión de discutir las funciones Riemann integrables en lo que sigue, omitimos la demostración y hacemos referencia al teorema 10.5.5 [26].

En este momento pueden haberle surgido naturalmente dos preguntas al lector: ¿todo conjunto Lebesgue medible es un conjunto de Borel?; ¿todo subconjunto de R^k es Lebesgue medible? La respuesta es negativa en ambos casos, aun cuando $k=1$.

La primera pregunta puede responderse mediante un argumento de cardinalidad que esbozamos brevemente. Sea c el cardinal del continuo (la recta real o, equivalentemente, la colección de todos los conjuntos de enteros). Sabemos que R^k posee una base *numerable* (bolas abiertas con radios racionales y centros en algún subconjunto denso numerable de R^k) y que $\mathcal{B}_k$ (la colección de todos los conjuntos de Borel de R^k) es la σ-álgebra generada por esta base. Se sigue de esto (omitimos la demostración) que $\mathcal{B}_k$ tiene cardinal c. Por otra parte, existen conjuntos de Cantor $E \subset R^1$ con $m(E)=0$ (ejercicio 5). El que m sea completa implica que cada uno de los 2^c subconjuntos de E es Lebesgue medible. Como $2^c > c$, la mayor parte de los subconjuntos de E no son conjuntos de Borel.

La respuesta negativa a la segunda pregunta es una consecuencia del axioma de elección. El ejemplo siguiente lo demuestra así.

2.5.4. Ejemplo. Si x e y son números reales, escribiremos $x \sim y$ si, y sólo si, $x-y$ es racional. Es claro que $x \sim x$, que $x \sim y$ implica $y \sim x$, y que $x \sim y$, $y \sim z$ implica $x \sim z$. Por tanto, $\sim$ es una relación de equivalencia. (En terminología algebraica, si Q es el grupo aditivo de los números racionales, cada clase de equivalencia es una clase de Q en R^1.) Sea E un conjunto en $(0, 1)$ que contiene exactamente un punto en cada clase de equivalencia. (La afirmación de que existe un tal conjunto E es una directa aplicación del axioma de elección.) Pretendemos demostrar que E no es Lebesgue medible.

Como en el apartado 2.5.1, sea $E+r=\{x+r : x \in E\}$. Necesitamos dos propiedades de E:

a) *Si* $x \in (0, 1)$, *entonces* $x \in E+r$ *para algún racional* $r \in (-1, 1)$.
b) *Si* r *y* s *son racionales distintos, entonces* $(E+r) \cap (E+s)=\emptyset$.

Para demostrar *a)*, nótese que a todo $x \in (0, 1)$ le corresponde un $y \in E$ tal que $x \sim y$. Si $r=x-y$, entonces $x=y+r \in E+r$.

Para demostrar *b)*, supongamos $x \in (E+r) \cap (E+s)$. Entonces $x=y+r=z+s$ para algún $y \in E$, y para algún $z \in E$. Como $y-z=s-r \neq 0$, tenemos $y \sim z$, y E contiene dos puntos equivalentes, en contradicción con nuestra elección de E.

Supongamos ahora que E es Lebesgue medible, y pongamos $\alpha=m(E)$. Definamos $S=\bigcup (E+r)$, donde la unión está extendida sobre todos los racionales $r-(-1, 1)$. Por *b)*, los conjuntos $E+r$ son disjuntos dos a dos; puesto que m es invariante por traslaciones, $m(E+r)=\alpha$ para todo r; como $S \subset (-1, 2)$, $m(S) \leqslant 3$. La aditividad numerable de m obliga ahora a que $\alpha=0$, y, por tanto, $m(S)=0$. Pero *a)* implica que $(0, 1) \subset S$, por lo que $1 \leqslant m(S)$, y llegamos a una contradicción.

2.6. PROPIEDADES DE CONTINUIDAD DE LAS FUNCIONES MEDIBLES

Puesto que las funciones continuas desempeñaron un papel tan importante en nuestra construcción de las medidas de Borel, y de la medida de Lebesgue en particular, parece razonable esperar que existan algunas relaciones interesantes entre funciones continuas y funciones medibles. En esta sección daremos dos teoremas en este sentido.

Supondremos, en ambos, *que* μ *es una medida definida sobre un espacio de Hausdorff localmente compacto* X, *que tiene las propiedades enumeradas en el teorema* 2.3.1. En particular, μ podría ser la medida de Lebesgue sobre algún R^k.

2.6.1. Teorema de Lusin. *Supongamos que* f *es una función compleja medible sobre* X, $\mu(A) < \infty$, $f(x)=0$ *si* $x \notin A$, *y* $\epsilon > 0$. *Entonces existe una* $g \in C_c(X)$ *tal que*

$$\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) < \epsilon. \qquad [2.54]$$

Además, podemos hacer que

$$\sup_{x \in X} |g(x)| \leqslant \sup_{x \in X} |f(x)| \qquad [2.55]$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos en primer lugar que $0 \leqslant f < 1$ y que A es compacto. Asignemos una sucesión $\{s_n\}$ a f, como en la demostración del teorema 1.4.2, y pongamos $t_1=s_1$ y $t_n=s_n-s_{n-1}$ para $n=2, 3, 4, \ldots$ Entonces $2^n t_n$ es la función característica de un conjunto $T_n \subset A$, y

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} t_n(x) \qquad (x \in X). \qquad [2.56]$$

Fijemos un conjunto abierto V tal que $A \subset V$ y $\bar{V}$ compacta. Existen conjuntos compactos K_n y abiertos V_n tales que

$$K_n \subset T_n \subset V_n \subset V \quad \text{y} \quad \mu(V_n - K_n) < 2^{-n}\epsilon.$$

Por el lema de Urysohn, existen funciones h_n tales que $K_n < h_n < V_n$. Definamos

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} h_n(x) \qquad (x \in X) \tag{2.57}$$

Esta serie converge uniformemente en X, y, por tanto, g es continua. Además, el soporte de g está en $\bar{V}$. Como $2^{-n}h_n(x) = t_n(x)$ excepto en $V_n - K_n$, tenemos $g(x) = f(x)$ excepto en $\bigcup (V_n - K_n)$, y este último conjunto tiene medida menor que ϵ. Entonces se verifica [2.54] si A es compacto y $0 \leqslant f < 1$.

Se deduce, pues, que [2.54] se verifica si A es compacto y f es una función medible acotada. La compacidad de A se elimina fácilmente porque si $\mu(A) < \infty$, A contiene un conjunto compacto K con $\mu(A - K)$ más pequeña que cualquier número positivo previamente fijado. Por otra parte, si f es una función compleja medible y si $B_n = \{x : |f(x)| > n\}$ entonces $\bigcap B_n = \emptyset$, y, por tanto, $\mu(B_n) \to 0$, por el teorema 1.5.2, *e*). Como f coincide con la función acotada $(1 - \chi_{B_n}) \cdot f$, excepto sobre B_n, se obtiene [2.54] en el caso general.

Finalmente, sea $R = \sup \{|f(x)| : x \in X\}$, y definamos $\varphi(z) = z$ si $|z| \leqslant R$, $\varphi(z) = Rz/|z|$ si $|z| > R$. Entonces φ es una aplicación continua del plano complejo sobre el disco de radio R. Si g satisface [2.54] y $g_1 = \varphi \circ g$, g_1 satisface [2.54] y [2.55].

Corolario. *Si se verifican las hipótesis del teorema de Lusin y* $|f| \leqslant 1$, *existe una sucesión* $\{g_n\}$ *tal que* $g_n \in C_c(X)$, $|g_n| \leqslant 1$, *y*

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} g_n(x) \quad \text{en c.t.p.} \tag{2.58}$$

DEMOSTRACIÓN. El teorema implica que a cada n le corresponde una $g_n \in C_c(X)$, con $|g_n| \leqslant 1$, tal que $\mu(E_n) \leqslant 2^{-n}$, donde E_n es el conjunto de todos los x en que $f(x) \neq g_n(x)$. Para casi todo x es entonces cierto que x está, a lo sumo, en un número finito de conjuntos E_n (teorema 1.10.7). Para un tal x, se sigue que $f(x) = g_n(x)$ para todo n suficientemente grande. Esto proporciona [2.58].

2.6.2. El teorema de Vitali-Carathéodory. *Supongamos* $f \in L^1(\mu)$ *a valores reales, y* $\epsilon > 0$. *Entonces existen funciones* u *y* v *definidas sobre* X *tales que* $u \leqslant f \leqslant v$, u *es semicontinua y acotada superiormente,* v *es semicontinua y acotada inferiormente, y*

$$\int_X (v - u)\, d\mu < \epsilon. \tag{2.59}$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que $f \geqslant 0$ y que f no es idénticamente 0. Como f es el límite puntual de una sucesión creciente de funciones simples s_n, f es la suma de las funciones simples $t_n = s_n - s_{n-1}$ (tomando $s_0 = 0$),

y como t_n es una combinación lineal de funciones características, existen conjuntos medibles E_i (no necesariamente disjuntos) y constantes $c_i > 0$ tales que

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \chi_{E_i}(x) \qquad (x \in X). \tag{2.60}$$

Como

$$\int_X f\, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \mu(E_i), \tag{2.61}$$

la serie en [2.61] converge. Existen conjuntos compactos K_i y abiertos V_i tales que $K_i \subset E_i \subset V_i$ y

$$c_i \mu(V_i - K_i) < 2^{-i-1}\epsilon \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots). \tag{2.62}$$

Pongamos

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \chi_{V_i}, \qquad u = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{K_i}, \tag{2.63}$$

donde N se escoge de tal manera que

$$\sum_{N+1}^{\infty} c_i \mu(E_i) < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.64}$$

Entonces v es semicontinua inferiormente, u es semicontinua superiormente, $u \leqslant f \leqslant v$, y

$$\begin{aligned} v - u &= \sum_{i=1}^{N} c_i(\chi_{V_i} - \chi_{K_i}) + \sum_{N+1}^{\infty} c_i \chi_{V_i} \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} c_i(\chi_{V_i} - \chi_{K_i}) + \sum_{N+1}^{\infty} c_i \chi_{E_i} \end{aligned}$$

de modo que [2.62] y [2.64] implican [2.59].

En el caso general, escribamos $f = f^+ - f^-$, asignemos u_1 y v_1 a f^+, y u_2 y v_2 a f^-, como anteriormente, y pongamos $u = u_1 - v_2$, $v = v_1 - u_2$. Como $-v_2$ es semicontinua superiormente (análogamente para funciones semicontinuas inferiormente; dejamos la demostración como ejercicio), u y v tienen las propiedades buscadas.

EJERCICIOS

1. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones reales no negativas sobre R^1, y se consideran los siguientes cuatro enunciados:

   a) Si f_1 y f_2 son semicontinuas superiormente, $f_1 + f_2$ también lo es.
   b) Si f_1 y f_2 son semicontinuas inferiormente, $f_1 + f_2$ también lo es.

c) Si cada f_n es semicontinua superiormente, $\Sigma_1^\infty f_n$ también lo es.

d) Si cada f_n es semicontinua inferiormente, $\Sigma_1^\infty f_n$ también lo es.

Demuéstrese que tres de ellos son ciertos y que uno es falso. ¿Qué sucede si se omiten las palabras «no negativa»? ¿Se modifica la verdad de estos enunciados cambiando R^1 por un espacio topológico general?

2. Sea f una función compleja arbitraria sobre R^1, y definamos

$$\varphi(x, \delta) = \sup \{ |f(s) - f(t)| : s, t \in (x-\delta, x+\delta) \},$$
$$\varphi(x) = \inf \{ \varphi(x, \delta) : \delta > 0 \}.$$

Demuéstrese que φ es semicontinua superiormente, que f es continua en un punto x si, y sólo si, $\varphi(x)=0$, y, por tanto, que el conjunto de puntos de continuidad de una función compleja arbitraria es un G_δ.

Formúlese y demuéstrese un enunciado análogo para espacios topológicos generales en lugar de para R^1.

3. Sea X un espacio métrico, con métrica ρ. Para cualquier conjunto no vacío $E \subset X$, definamos

$$\rho_E(x) = \inf \{ \rho(x, y) : y \in E \}.$$

Demuéstrese que ρ_E es una función uniformemente continua sobre X. Si A y B son subconjuntos de X cerrados no vacíos y disjuntos, examínese la relación de la función

$$f(x) = \frac{\rho_A(x)}{\rho_A(x) + \rho_B(x)}$$

con el lema de Urysohn.

4. Examínese la demostración del teorema de Riesz y demuéstrense los dos siguientes enunciados:

a) Si $E_1 \subset V_1$ y $E_2 \subset V_2$, donde V_1 y V_2 son conjuntos abiertos disjuntos, entonces $\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$, aunque E_1 y E_2 no estén en $\mathfrak{M}$.

b) Si $E \in \mathfrak{M}_F$, entonces $E = N \cup K_1 \cup K_2 \cup \ldots$, donde $\{K_i\}$ es una colección numerable disjunta de conjuntos compactos y $\mu(N) = 0$.

En los ejercicios del 5 al 8, m significa la medida de Lebesgue sobre R^1.

5. Sea E el conocido conjunto de Cantor de «tercios intermedios». Demuéstrese que $m(E)=0$, aunque E y R^1 tienen el mismo cardinal.

6. Constrúyase un conjunto compacto $K \subset R^1$ totalmente inconexo tal que $m(K) > 0$. (K no ha de tener ningún conjunto conexo que conste de más de un punto.)

Si v es semicontinua inferiormente y $v \leqslant \chi_K$, demuéstrese que $v \leqslant 0$. En consecuencia, χ_K no puede aproximarse por debajo mediante funciones semicontinuas inferiormente en el sentido del teorema de Vitali-Carathéodory.

7. Dado $\epsilon > 0$, constrúyase un conjunto abierto $E \subset [0, 1]$ que sea denso en $[0, 1]$, y tal que $m(E) = \epsilon$. (Decir que A es denso en B significa que la adherencia de A contiene a B.)

8. Constrúyase un conjunto de Borel $E \subset R^1$ tal que

$$0 < m(E \cap I) < m(I)$$

para todo segmento I no vacío. ¿Es posible tener $m(E) < \infty$ para un conjunto así?

9. Constrúyase una sucesión de funciones continuas f_n en $[0, 1]$ tales que $0 \leqslant f \leqslant 1$, y que

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = 0,$$

pero de tal modo que la sucesión $\{f_n(x)\}$ no converja para ningún $x \in [0, 1]$.

10. Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones continuas en $[0, 1]$ tales que $0 \leqslant f_n \leqslant 1$ y $f_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$, para todo $x \in [0, 1]$, entonces

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = 0.$$

Inténtese demostrar este resultado sin utilizar teoría de la medida ni teoremas sobre la integral de Lebesgue. (Esto trata de poner de manifiesto la potencia de la integral de Lebesgue. Una bonita demostración es la realizada por W. F. EBERLEIN en *Communications on Pure and Applied Mathematics,* vol. X, págs. 357-360, 1957.)

11. Sea μ una medida de Borel regular en un espacio de Hausdorff compacto X; se supone $\mu(X) = 1$. Demuéstrese que existe un conjunto compacto $K \subset X$ (el *portador* o *soporte* de μ) tal que $\mu(K) = 1$ pero $\mu(H) < 1$ para todo subconjunto compacto propio H de K.

Sugerencia: Sea K la intersección de todos los compactos K_α con $\mu(K_\alpha) = 1$; demuéstrese que todo conjunto abierto V que contiene a K también contiene a algún K_α. Se necesita la regularidad de μ; compárese con el ejercicio 18. Demuéstrese que K^c es el mayor conjunto abierto en X cuya medida es 0.

12. Demuéstrese que todo subconjunto compacto de R^1 es el soporte de una medida de Borel.

13. ¿Es cierto que todo subconjunto compacto de R^1 es el soporte de una función continua? Si no, ¿puede describirse la clase de todos los conjuntos compactos en R^1 que son soportes de funciones continuas? ¿Es esa descripción válida en otros espacios topológicos?

14. Si f es una función compleja Lebesgue medible en R^1, demuéstrese que existe una función de Borel g sobre R^1 tal que $f = g$ en c.t.p. $[m]$.

15. Es fácil conjeturar los límites de

$$\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2}\, dx \quad \text{y} \quad \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\, dx,$$

cuando $n \to \infty$. Demuéstrese que las conjeturas son correctas.

16. Si m es la medida de Lebesgue sobre R^1, demuéstrese que $m(-E) = m(E)$, donde

$$-E = \{-x : x \in E\},$$

y, por consiguiente, que

$$\int_{R^k} f(x)\, dx = \int_{R^k} f(-x)\, dx$$

para toda $f \in L^1(R^k)$.

17. Sea X el plano con la topología siguiente: Un conjunto es abierto si su intersección con toda recta vertical es un conjunto abierto de esa recta, con respecto a la topología usual de R^1. Demuéstrese que este X es un espacio de Hausdorff localmente compacto. Si $f \in C_c(X)$, sean $x_1, \ldots, x_n$ aquellos valores de x para los

que $f(x, y) \neq 0$ para al menos un y (¡hay sólo un número finito de tales x!), y defínase

$$\Lambda f = \sum_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_j, y)\, dy.$$

Sea μ la medida asociada a este Λ por el teorema 2.3.1. Si E es el eje OX, demuéstrese que $\mu(E) = \infty$ aunque $\mu(K) = 0$ para todo compacto $K \subset E$.

18. Este ejercicio requiere más habilidad en teoría de conjuntos que los anteriores. Sea X un conjunto no numerable bien ordenado que tiene un último elemento ω_1, tal que cada predecesor de ω_1 tiene a lo sumo un número numerable de predecesores. *(Construcción:* Tómese cualquier conjunto bien ordenado que tenga elementos con un número no numerable de predecesores, y sea ω_1 el primero de éstos; ω_1 se llama el primer ordinal no numerable.) Para $\alpha \in X$, sea $P_\alpha[S_\alpha]$ el conjunto de todos los predecesores (sucesores) de α, y llámese abierto a un subconjunto de X si es un P_α o un S_α o un $P_\alpha \cap S_\beta$ o una unión de tales conjuntos. Demuéstrese que X es entonces un espacio de Hausdorff compacto.

Sugerencia: Ningún conjunto bien ordenado contiene una sucesión infinita decreciente.

Demuéstrese que el complementario del punto ω_1 es un conjunto abierto que no es σ-compacto.

Demuéstrese que a cada $f \in C(X)$ le corresponde un $\alpha \neq \omega_1$ tal que f es constante sobre S_α.

Demuéstrese que la intersección de toda colección numerable $\{K_n\}$ de una cantidad no numerable de subconjuntos compactos de X es no numerable.

Sugerencia: Considérense los límites de sucesiones numerables crecientes en X que intersecten cada K_n en infinitos puntos.

Sae $\mathfrak{M}$ la colección de todos los $E \subset X$ tales que o bien $E \cup \{\omega_1\}$ o bien $E^c \cup \{\omega_1\}$ contienen un conjunto compacto no numerable; en el primer caso, defínase $\lambda(E) = 1$; en el segundo caso, defínase $\lambda(E) = 0$. Demuéstrese que $\mathfrak{M}$ es una σ-álgebra que contiene todos los conjuntos de Borel en X, que λ es una medida sobre $\mathfrak{M}$ que *no* es regular (cada entorno de ω_1 tiene medida 1) y que

$$f(\omega_1) = \int_X f\, d\lambda$$

para toda $f \in C(X)$. Descríbase la medida regular μ que el teorema 2.3.1 asocia a este funcional lineal.

19. Si μ es una medida positiva arbitraria y $f \in L^1(\mu)$, demuéstrese que $\{x : f(x) \neq 0\}$ tiene medida σ-finita.

20. Una medida positiva μ sobre un conjunto X se llama *σ-finita* si X es una unión numerable de conjuntos X_i con $\mu(X_i) < \infty$. Demuéstrese que μ es σ-finita si, y sólo si, existe una $f \in L^1(\mu)$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in X$.

ESPACIOS L^p

3.1. FUNCIONES CONVEXAS Y DESIGUALDADES

Muchas de las desigualdades más comunes en análisis tienen su origen en la noción de convexidad.

3.1.1. Definición. Una función real φ definida en un segmento (a, b), donde $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, se llama convexa si se verifica la desigualdad

$$\varphi((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant (1-\lambda)\varphi(x) + \lambda\varphi(y) \qquad [3.1]$$

si $a < x < b$, $a < y < b$ y $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Gráficamente, la condición requerida es que, si $x < t < y$, el punto $(t, \varphi(t))$ esté por debajo o sobre la recta que conecta los puntos $(x, \varphi(x))$ y $(y, \varphi(y))$ en el plano. También [3.1] es equivalente a

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s} \leqslant \frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t} \qquad [3.2]$$

si $a < s < t < u < b$.

El teorema del valor medio para diferenciación, combinado con [3.2], muestra inmediatamente que una función real diferenciable φ es convexa en (a, b) si, y sólo si, $a < s < t < b$ implica $\varphi'(s) \leqslant \varphi'(t)$, es decir, si, y sólo si, la derivada φ' es una función monótona creciente.

Por ejemplo, la función exponencial es convexa en $(-\infty, \infty)$.

3.1.2. Teorema. *Si φ es convexa en (a, b) entonces es continua en (a, b).*

DEMOSTRACIÓN. La idea de la demostración se comunica más fácilmente en lenguaje geométrico. Aquellos que se preocupen porque esto no parezca «riguroso» pueden intentar transcribirla en términos de épsilons y deltas.

Supongamos $a < s < x < y < t < b$. Escribimos S para designar el punto $(s, \varphi(s))$ en el plano, y lo mismo para x, y y t. Entonces X está en o debajo de la recta SY, y, por tanto, Y está en o por encima de la recta que pasa por S y X; además, Y está en o debajo de XT. Cuando $y \to x$, se tiene que $Y \to X$, es decir, $\varphi(y) \to \varphi(x)$. Los límites a la izquierda se manejan de la misma forma y se obtiene la continuidad de φ. ////

Nótese que este teorema depende del hecho de que estamos considerando un segmento *abierto*. Por ejemplo, si $\varphi(x) = 0$ en $[0, 1)$ y $\varphi(1) = 1$, entonces φ satisface [3.1] en $[0, 1]$ sin ser continua.

3.1.3. Teorema (desigualdad de Jensen). *Sea μ una medida positiva sobre una σ-álgebra $\mathfrak{M}$ en un conjunto Ω, tal que $\mu(\Omega)=1$. Si f es una función real en $L^1(\mu)$, si $a < f(x) < b$ para todo $x \in \Omega$, y si φ es convexa en (a, b), entonces*

$$\varphi\left(\int_\Omega f\,d\mu\right) \leqslant \int_\Omega (\varphi \circ f)\,d\mu. \qquad [3.3]$$

NOTA: Los casos $a=-\infty$ y $b=\infty$ no están excluidos.

DEMOSTRACIÓN. Pongamos $t=\int_\Omega f\,d\mu$. Entonces $a < t < b$. Si β es el supremo de los cocientes del primer miembro de [3.2], con $a < s < t$, entonces β no es más grande que ninguno de los cocientes del segundo miembro de [3.2], para cualquier $u \in (t, b)$. Se deduce que

$$\varphi(s) \geqslant \varphi(t) + \beta(s-t) \qquad (a < s < b). \qquad [3.4]$$

Por tanto:

$$\varphi(f(x)) - \varphi(t) - \beta(f(x)-t) \geqslant 0 \qquad [3.5]$$

para todo $x \in \Omega$. Como φ es continua, $\varphi \circ f$ es medible. Si integramos ambos miembros de [3.5] con respecto a μ, se obtiene [3.3] por nuestra elección de t y la hipótesis $\mu(\Omega)=1$. ////

Para dar un ejemplo, tomemos $\varphi(x)=e^x$. Entonces [3.3] se convierte en

$$\exp\left\{\int_\Omega f\,d\mu\right\} \leqslant \int_\Omega e^f\,d\mu. \qquad [3.6]$$

Si Ω es un conjunto finito, que consiste en los puntos $p_1, \ldots, p_n$, por ejemplo, y si

$$\mu(\{p_i\}) = \frac{1}{n}, \qquad f(p_i) = x_i,$$

[3.6] resulta ser

$$\exp\left\{\frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)\right\} \leqslant \frac{1}{n}(e^{x_1} + \ldots + e^{x_n}), \qquad [3.7]$$

para x_i reales. Poniendo $y_i = e^{x_i}$, obtenemos la conocida desigualdad entre las medias aritmética y geométrica de n números positivos:

$$(y_1 y_2 \ldots y_n)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + \ldots + y_n). \qquad [3.8]$$

Volviendo de aquí a [3.6], resulta más claro por qué el primero y segundo miembro de

$$\exp\left\{\int_\Omega \log g\,d\mu\right\} \leqslant \int_\Omega g\,d\mu \qquad [3.9]$$

se llaman a menudo medias geométrica y aritmética, respectivamente, de la función positiva g.

Si tomamos $\mu(\{p_i\})=\alpha_i>0$, donde $\Sigma\alpha_i=1$, obtenemos

$$y_1^{\alpha_1}y_2^{\alpha_2}\dots y_n^{\alpha_n}\leqslant\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+\dots+\alpha_ny_n \qquad [3.10]$$

en lugar de [3.8]. Estas son sólo algunas muestras de lo que encierra el teorema 3.1.3.

Para un recíproco, véase el ejercicio 20.

3.1.4. Definición. Si p y q son números reales positivos tales que $p+q=pq$, o, lo que es equivalente,

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \qquad [3.11]$$

llamamos a p y q un par de *exponentes conjugados*. Es claro que [3.11] implica $1<p<\infty$ y $1<q<\infty$. Un caso especial importante es $p=q=2$.

Cuando $p\to 1$, [3.11] obliga a que $q\to\infty$. Consecuentemente, 1 y ∞ se consideran también como un par de exponentes conjugados.

3.1.5. Teorema. *Sean p y q exponentes conjugados, $1<p<\infty$. Sea X un espacio de medida con medida μ. Sean f y g funciones medibles en X, con recorrido en $[0,\infty]$. Entonces*

$$\int_X fg\,d\mu\leqslant\left\{\int_X f^p\,d\mu\right\}^{1/p}\left\{\int_X g^q\,d\mu\right\}^{1/q} \qquad [3.12]$$

y

$$\left\{\int_X (f+g)^p\,d\mu\right\}^{1/p}\leqslant\left\{\int_X f^p\,d\mu\right\}^{1/p}+\left\{\int_X g^p\,d\mu\right\}^{1/p}. \qquad [3.13]$$

La desigualdad [3.12] se llama de Hölder, y la [3.13], de Minkowski. Si $p=q=2$, [3.12] se conoce como desigualdad de Schwarz.

DEMOSTRACIÓN. Sean A y B los dos factores del segundo miembro de [3.12]. Si $A=0$, entonces $f=0$ en c.t.p. (por el teorema 1.10.5); por tanto, $fg=0$ en c.t.p., y, por tanto, se verifica [3.12]. Si $A>0$ y $B=\infty$, [3.12] es trivial otra vez. Por ello consideraremos sólo el caso $0<A<\infty$, $0<B<\infty$. Pongamos

$$F=\frac{f}{A}, \qquad G=\frac{g}{B}. \qquad [3.14]$$

Esto proporciona

$$\int_X F^p\,d\mu=\int_X G^q\,d\mu=1. \qquad [3.15]$$

Si $x\in X$ es tal que $0<F(x)<\infty$ y $0<G(x)<\infty$, existen números reales s y t tales que $F(x)=e^{s/p}$, $G(x)=e^{t/q}$. Como $1/p+1/q=1$, la convexidad de la función exponencial implica que

$$e^{s/p+t/q}\leqslant p^{-1}e^s+q^{-1}e^t. \qquad [3.16]$$

Se tiene que

$$F(x)G(x) \leqslant p^{-1}F(x)^p + q^{-1}G(x)^q \qquad [3.17]$$

para todo $x \in X$. La integración de [3.17] proporciona

$$\int_X FG\, d\mu \leqslant p^{-1} + q^{-1} = 1, \qquad [3.18]$$

por [3.16]; introduciendo [3.14] en [3.18], obtenemos [3.12].

Nótese que [3.17] pudo también haber sido obtenida como un caso especial de la desigualdad [3.10].

Para demostrar [3.13], escribimos

$$(f+g)^p = f \cdot (f+g)^{p-1} + g \cdot (f+g)^{p-1}. \qquad [3.19]$$

La desigualdad de Hölder proporciona

$$\int f \cdot (f+g)^{p-1} \leqslant \left\{ \int f^p \right\}^{1/p} \left\{ \int (f+g)^{(p-1)q} \right\}^{1/q}. \qquad [3.20]$$

Sea [3.20′] la desigualdad [3.20] intercambiando f y g. Como $(p-1)q = p$, la adición de [3.20] y [3.20′] proporciona

$$\int (f+g)^p \leqslant \left\{ \int (f+g)^p \right\}^{1/q} \left[\left\{ \int f^p \right\}^{1/p} + \left\{ \int g^p \right\}^{1/p} \right]. \qquad [3.21]$$

Claramente, basta demostrar [3.13] en el caso en que el primer miembro es mayor que cero y que el segundo es menor que ∞. La convexidad de la función t^p para $0 < t < \infty$ muestra que

$$\left(\frac{f+g}{2} \right)^p \leqslant \frac{1}{2} (f^p + g^p).$$

Por tanto, el primer miembro de [3.13] es menor que ∞, y [3.13] se deduce de [3.21] si dividimos por el primer factor del segundo miembro de [3.21], teniendo en cuenta que $1 - 1/q = 1/p$. Esto completa la demostración. ////

Es a veces útil conocer bajo qué condiciones puede verificarse la igualdad en una desigualdad. En muchos casos, esta información puede obtenerse examinando la demostración de la desigualdad.

Por ejemplo, la igualdad se verifica en [3.18] si, y sólo si, se verifica en [3.17] en c.t.p. x. En [3.16] la igualdad se verifica si, y sólo si, $s = t$. Por tanto, «$F^p = G^q$ en c.t.p.» es una condición necesaria y suficiente para que se verifique la igualdad en [3.18], si se supone [3.15]. En términos de las funciones originales f y g, se obtiene entonces el siguiente resultado:

Suponiendo $A < \infty$ y $B < \infty$, se verifica la igualdad en [3.12] *si, y sólo si, existen constantes α y β, no nulas ambas, tales que $\alpha f^p = \beta g^q$ en c.t.p.*

Dejamos la discusión análoga sobre la igualdad en [3.13] como ejercicio.

3.2. LOS ESPACIOS L^p

En esta sección, X será un espacio de medida arbitrario con una medida positiva μ.

3.2.1. Definición. Si $0 < p < \infty$ y si f es una función compleja medible sobre X, definimos

$$\|f\|_p = \left\{ \int_X |f|^p \, d\mu \right\}^{1/p} \qquad [3.22]$$

y sea $L^p(\mu)$ el conjunto de todas las f para las que

$$\|f\|_p < \infty. \qquad [3.23]$$

Llamamos $\|f\|_p$ la norma en L^p de f.

Si μ es la medida de Lebesgue en R^k, escribimos $L^p(R^k)$ en vez de $L^p(\mu)$, como en el apartado 2.5.3. Si μ es la medida discreta sobre un conjunto A, es habitual denotar mediante $\ell^p(A)$ el correspondiente espacio L^p, o simplemente mediante ℓ^p, si A es numerable. Un elemento de ℓ^p puede considerarse como una sucesión compleja $x = \{\xi_n\}$, y

$$\|x\|_p = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \right\}^{1/p}.$$

3.2.2. Definición. Supongamos que $g: X \to [0, \infty]$ es medible. Sea S el conjunto de todos los reales α tales que

$$\mu(g^{-1}((\alpha, \infty])) = 0. \qquad [3.24]$$

Si $S = \varnothing$, pongamos $\beta = \infty$. Si $S \neq \varnothing$, pongamos $\beta = \inf S$. Como

$$g^{-1}((\beta, \infty]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} g^{-1}\left(\left(\beta + \frac{1}{n}, \infty \right] \right), \qquad [3.25]$$

y como la unión de una colección numerable de conjuntos de medida 0 tiene medida 0, vemos que $\beta \in S$. Llamamos a β el *supremo esencial* de g.

Si f es una función compleja medible sobre X, definimos $\|f\|_\infty$ como el supremo esencial de $|f|$, y consideramos $L_\infty(\mu)$ como el conjunto de todas las f para las que $\|f\|_\infty < \infty$. Los elementos de $L^\infty(\mu)$ se llaman a veces funciones medibles *esencialmente acotadas* sobre X.

Se deduce de esta definición que la desigualdad $|f(x)| \leqslant \lambda$ *se verifica para casi todo* x *si, y sólo si,* $\lambda \geqslant \|f\|_\infty$.

Como en la definición 3.2.1, $L^\infty(R^k)$ denota la clase de todas las funciones esencialmente acotadas sobre R^k (con respecto a la medida de Lebesgue), y $\ell^\infty(A)$ es la clase de todas las funciones acotadas sobre A. (¡Aquí, acotada

significa lo mismo que esencialmente acotada, porque todo conjunto no vacío tiene medida positiva!)

3.2.3. Teorema. *Si p y q son exponentes conjugados, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, y si $f \in L^p(\mu)$ y $g \in L^q(\mu)$, entonces $fg \in L^1(\mu)$, y*

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \, \|g\|_q. \qquad [3.26]$$

DEMOSTRACIÓN. Para $1 < p < \infty$, [3.26] es simplemente la desigualdad de Hölder, aplicada a $|f|$ y a $|g|$. Si $p = \infty$, nótese que

$$|f(x)g(x)| \leqslant \|f\|_\infty \, |g(x)| \qquad [3.27]$$

para casi todo x; integrando [3.27], obtenemos [3.26]. Si $p = 1$, entonces $q = \infty$ y se aplica el mismo razonamiento. ////

3.2.4. Teorema. *Supongamos $1 \leqslant p \leqslant \infty$, y $f \in L^p(\mu)$, $g \in L^p(\mu)$. Entonces $f + g \in L^p(\mu)$, y*

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p. \qquad [3.28]$$

DEMOSTRACIÓN. Para $1 < p < \infty$, se deduce de la desigualdad de Minkowski, porque

$$\int_X |f + g|^p \, d\mu \leqslant \int_X (|f| + |g|)^p \, d\mu.$$

Para $p = 1$ o $p = \infty$, [3.28] es una consecuencia trivial de la desigualdad $|f + g| \leqslant |f| + |g|$. ////

3.2.5. Notas. Fijemos p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Si $f \in L^p(\mu)$ y α es un número complejo, es claro que $\alpha f \in L^p(\mu)$. De hecho,

$$\|\alpha f\|_p = |\alpha| \, \|f\|_p. \qquad [3.29]$$

Junto con el teorema 3.2.4, esto muestra que $L^p(\mu)$ es un *espacio vectorial complejo.*

Supongamos f, g y $h \in L^p(\mu)$. Cambiando f por $f - g$ y g por $g - h$ en el teorema 3.2.4, obtenemos

$$\|f - h\|_p \leqslant \|f - g\|_p + \|g - h\|_p. \qquad [3.30]$$

Esto sugiere que puede introducirse una métrica en $L^p(\mu)$ definiendo la distancia entre f y g como $\|f - g\|_p$. Llamemos a esta distancia $d(f, g)$ por el momento. Entonces $0 \leqslant d(f, g) < \infty$, $d(f, f) = 0$, $d(f, g) = d(g, f)$, y [3.30] muestra que la desigualdad triangular $d(f, h) = d(f, g) + d(g, h)$ se verifica. La otra propiedad que debería tener d para definir un espacio métrico es que $d(f, g) = 0$ debiera implicar que $f = g$. En nuestra situación presente, esto no tiene por qué ser así; tenemos $d(f, g) = 0$ *precisamente cuando $f(x) = g(x)$ para casi todo x.*

Escribamos $f \sim g$ si, y sólo si, $d(f, g) = 0$. Es claro que esta es una relación de equivalencia en $L^p(\mu)$ que particiona $L^p(\mu)$ en clases de equivalencia; cada clase consta de todas las funciones equivalentes a una dada. Si F y G son

dos clases de equivalencia, tomemos $f \in F$ y $g \in G$, y definamos $d(F, G) = d(f, g)$; notemos que $f \sim f_1$ y $g \sim g_1$ implica

$$d(f, g) = d(f_1, g_1),$$

y, por tanto, $d(F, G)$ está bien definida.

Con esta definición, el conjunto de las clases de equivalencia es ahora un espacio métrico. Nótese que es también un espacio vectorial, puesto que $f \sim f_1$ y $g \sim g_1$ implica $f+g \sim f_1+g_1$ y $\alpha f \sim \alpha f_1$.

Cuando se considera $L^p(\mu)$ como un espacio métrico, el espacio que se considera realmente *no es aquél cuyos elementos son funciones, sino un espacio cuyos elementos son clases de equivalencia de funciones.* Por un deseo de simplificar el lenguaje, se acostumbra, sin embargo, a relegar esta distinción al *status* de un entendimiento tácito y se continúa hablando de $L^p(\mu)$ como de un espacio de funciones. Nosotros seguiremos esta costumbre.

Si $\{f_n\}$ es una sucesión en $L^p(\mu)$, si $f \in L^p(\mu)$, y si $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$, decimos que $\{f_n\}$ *converge a* f en $L^p(\mu)$ (o que $\{f_n\}$ converge a f en media de orden p, o que $\{f_n\}$ es L^p convergente a f). Si a todo $\epsilon > 0$ le corresponde un entero N tal que $\|f_n - f_m\|_p < \epsilon$ si $n > N$ y $m > N$, llamamos a $\{f_n\}$ una *sucesión de Cauchy* en $L^p(\mu)$. Estas definiciones son exactas a las correspondientes de cualquier espacio métrico.

Un hecho muy importante es que $L^p(\mu)$ es un espacio métrico *completo*, es decir, toda sucesión de Cauchy en $L^p(\mu)$ converge a un elemento de $L^p(\mu)$:

3.2.6. Teorema. *$L^p(\mu)$ es un espacio métrico completo, para $1 \leqslant p \leqslant \infty$ y para toda medida positiva μ.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que $1 \leqslant p < \infty$. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en $L^p(\mu)$. Existe una subsucesión $\{f_{n_i}\}$, $n_1 < n_2 < \ldots$, tal que

$$\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\| < 2^{-i} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots). \qquad [3.32]$$

Pongamos

$$g_k = \sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|, \qquad g = \sum_{i=1}^{\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|. \qquad [3.31]$$

Como se verifica [3.31], la desigualdad de Minkowski muestra que $\|g_k\|_p < 1$ para $k = 1, 2, 3, \ldots$ Por tanto, la aplicación del lema de Fatou a $\{g_k^p\}$ proporciona $\|g\|_p \leqslant 1$. En particular, $g(x) < \infty$ en c.t.p., así que la serie

$$f_{n_i}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} (f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)) \qquad [3.33]$$

converge absolutamente para casi todo $x \in X$. Denotemos por $f(x)$ la suma de [3.33] para aquellos x en los que [3.33] converge; pongamos $f(x) = 0$ en el conjunto de medida cero restante. Como

$$f_{n_1} + \sum_{i=1}^{k-1} (f_{n_{i+1}} - f_{n_i}) = f_{n_k}, \qquad [3.34]$$

vemos que

$$f(x) = \lim_{i \to \infty} f_{n_i}(x) \quad \text{en c.t.p.} \qquad [3.35]$$

Habiendo obtenido una función f que es el límite puntual en c.t.p. de $\{f_{n_i}\}$, tenemos que demostrar ahora que esta f es el límite en L^p de $\{f_n\}$. Tomemos $\epsilon > 0$. Existe un N tal que $\|f_n - f_m\|_p < \epsilon$ si $n > N$ y $m > N$. Para todo $m > N$, el lema de Fatou muestra entonces que

$$\int_X |f - f_m|^p \, d\mu \leqslant \liminf_{i \to \infty} \int_X |f_{n_i} - f_m|^p \, d\mu \leqslant \epsilon^p. \qquad [3.36]$$

Concluimos de [3.36] que $f - f_m \in L^p(\mu)$, y, por tanto, que $f \in L^p(\mu)$ [puesto que $f = (f - f_m) + f_m$], y finalmente tque $\|f - f_m\|_p \to 0$ cuando $m \to \infty$. Esto completa la completa la demostración para el caso $1 \leqslant p < \infty$.

En $L^\infty(\mu)$ la demostración es mucho más fácil. Supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^\infty(\mu)$, sean A_k y $B_{m,n}$ los conjuntos donde $|f_k(x)| > \|f_k\|_\infty$ y donde $|f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty$, y sea E la unión de estos conjuntos, para $k, m, n = 1, 2, 3, \ldots$ Entonces $\mu(E) = 0$, y sobre el complementario de E la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a una función acotada f. Definamos $f(x) = 0$ para $x \in E$. Entonces $f \in L^\infty(\mu)$, y $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ cuando $n \to \infty$. ////

La demostración anterior contiene un resultado lo bastante interesante como para ser establecido separadamente:

3.2.7. Teorema. *Si $1 \leqslant p \leqslant \infty$ y si $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(\mu)$, con límite f, entonces $\{f_n\}$ tiene una subsucesión que converge puntualmente casi en todo punto a $f(x)$.*

Las funciones simples desempeñan un papel interesante en $L^p(\mu)$:

3.2.8. Teorema. *Sea S la clase de todas las funciones simples, medibles, complejas sobre X tales que*

$$\mu(\{x : s(x) \neq 0\}) < \infty. \qquad [3.37]$$

Si $1 \leqslant p < \infty$, entonces S es denso en $L^p(\mu)$.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, es claro que $S \subset L^p(\mu)$. Supongamos $f \geqslant 0$, $f \in L^p(\mu)$, y sea $\{s_n\}$ como en el teorema 1.4.2. Como $0 \leqslant s_n \leqslant f$, tenemos $s_n \in L^p(\mu)$, y, por tanto, $s_n \in S$. Como $|f - s_n|^p \leqslant f^p$, el teorema de convergencia dominada muestra que $\|f - s_n\|_p \to 0$ cuando $n \to \infty$. Entonces f está en la adherencia en L^p de S. El caso general (f compleja) se deduce de éste. ////

3.3. APROXIMACION POR FUNCIONES CONTINUAS

Hasta ahora hemos considerado $L^p(\mu)$ sobre un espacio de medida cualquiera. Sea ahora X un espacio de Hausdorff localmente compacto, y sea μ una medida sobre una σ-álgebra $\mathcal{M}$ en X, con las propiedades enunciadas en el teorema 2.3.1. Por ejemplo, X podría ser R^k, y μ podría ser la medida de Lebesgue sobre R^k.

En estas circunstancias, tenemos entonces el siguiente análogo del teorema 3.2.8:

3.3.1. Teorema. *Para* $1 \leqslant p < \infty$, $C_c(X)$ *es denso en* $L^p(\mu)$.

DEMOSTRACIÓN. Definamos S como en el teorema 3.2.8. Si $s \in S$ y $\epsilon > 0$, existe una $g \in C_c(X)$ tal que $g(x) = s(x)$ excepto sobre un conjunto de medida $< \epsilon$, y $|g| \leqslant \|s\|_\infty$ (teorema de Lusin). Por tanto:

$$\|g - s\|_p \leqslant 2\epsilon^{1/p}\|s\|_\infty. \qquad [3.38]$$

Como S es denso en $L^p(\mu)$, esto completa la demostración. ////

3.3.2. Notas. Discutamos con algún detalle las relaciones entre los espacios $L^p(R^k)$ (los espacios L^p en los que la medida es la de Lebesgue sobre R^k) y el espacio $C_c(R^k)$. Consideramos una dimensión fija k.

Para todo $p \in [1, \infty]$ tenemos una métrica sobre $C_c(R^k)$; la distancia entre f y g es $\|f - g\|_p$. Nótese que ésta es una métrica genuina y que no tenemos que pasar a clases de equivalencia. Esto es debido a que si dos funciones continuas sobre R^k no son idénticas, difieren sobre algún conjunto abierto no vacío V, y $m(V) > 0$, puesto que V contiene una k-celda. Entonces, si dos miembros de $C_c(R^k)$ son iguales en c.t.p., son iguales. También es interesante notar que en $C_c(R^k)$ el supremo esencial coincide con el supremo: para $f \in C_c(R^k)$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in R^n} |f(x)|. \qquad [3.39]$$

Si $1 \leqslant p < \infty$, el teorema 3.3.1 dice que $C_c(R^k)$ es denso en $L^p(R^k)$, y el teorema 3.2.6 muestra que $L^p(R^k)$ es completo. Entonces $L^p(R^k)$ *es la compleción del espacio métrico obtenido dotando a* $C_c(R^k)$ *de la métrica de* L^p.

Los casos $p = 1$ y $p = 2$ son los de mayor interés. Enunciemos otra vez, en palabras diferentes, lo que dice el resultado anterior si $p = 1$ y $k = 1$; el enunciado muestra que la integral de Lebesgue es, en realidad, la «correcta» generalización de la integral de Riemann:

Si la distancia entre dos funciones continuas f y g, con soportes compactos en R^1, *se define como*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - g(t)|\, dt \qquad [3.40]$$

la compleción del espacio métrico resultante consiste precisamente en las funciones Lebesgue integrables sobre R^1, *con tal de que identifiquemos aquellas que coinciden en c.t.p.*

Por supuesto, *todo* espacio métrico S tiene una compleción S^* cuyos elementos pueden considerarse de manera abstracta como clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy en S [26], pág. 71. Lo importante de la presente situación es que las varias L^p-compleciones de $C_c(R^k)$ resultan ser otra vez espacios de funciones sobre R^k.

El caso $p = \infty$ difiere de los casos $p < \infty$. *La* L^∞*-compleción de* $C_c(R^k)$ *no es* $L^\infty(R^k)$, *sino* $C_0(R^k)$, *el espacio de todas las funciones continuas sobre* R *que «se anulan en el infinito»*, un concepto que se definirá en el apartado 3.3.3. Como [3.39] muestra que la norma en L^∞ coincide con la norma del

supremo en $C_c(R^k)$, la afirmación anterior sobre $C_0(R^k)$ es un caso especial del teorema 3.3.4.

3.3.3. Definición. Una función compleja f sobre un espacio de Hausdorff localmente compacto X se dice que *se anula en el infinito* si para todo $\epsilon > 0$ existe un conjunto compacto $K \subset X$ tal que $|f(x)| < \epsilon$ para todo x que no esté en K.

La clase de todas las funciones f sobre X que se anulan en el infinito se denota mediante $C_0(X)$.

Es claro que $C_c(X) \subset C_0(X)$, y que las dos clases coinciden si X es compacto. En ese caso escribimos $C(X)$ para cualquiera de ellas.

3.3.4. Teorema. *Si X es un espacio de Hausdorff localmente compacto, $C_0(X)$ es la compleción de $C_c(X)$, relativa a la métrica definida por la norma del supremo*

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|. \qquad [3.41]$$

DEMOSTRACIÓN. Una comprobación elemental muestra que $C_0(X)$ satisface los axiomas de un espacio métrico si la distancia entre f y g se toma como $\|f-g\|$. Tenemos que demostrar que: *a)* $C_c(X)$ es denso en $C_0(X)$, y *b)* $C_0(X)$ es un espacio métrico completo.

Dada $f \in C_0(X)$ y $\epsilon > 0$, existe un conjunto compacto K tal que $|f(x)| < \epsilon$ fuera de K. El lema de Urysohn proporciona una función $g \in C_c$ tal que $0 \leqslant g \leqslant 1$ y $g(x) = 1$ sobre K. Pongamos $h = fg$. Entonces $h \in C_c(X)$ y $\|f-h\| < \epsilon$. Esto demuestra *a)*.

Para demostrar *b)*, sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en $C_0(X)$, es decir, supongamos que $\{f_n\}$ converge uniformemente. Entonces su función límite puntual f es continua. Dado $\epsilon > 0$, existe un n de modo que $\|f_n - f\| < \epsilon/2$ y existe un conjunto compacto K tal que $|f_n(x)| < \epsilon/2$ fuera de K. Por tanto, $|f(x)| < \epsilon$ fuera de K, y hemos demostrado que f se anula en el infinito. Entonces $C_0(X)$ es completo. ////

EJERCICIOS

1. Demuéstrese que el supremo de cualquier colección de funciones convexas en (a, b) es convexo en (a, b) y que límites puntuales de sucesiones de funciones convexas son convexos. ¿Qué puede decirse acerca de los límites superior e inferior de sucesiones de funciones convexas?

2. Si φ es convexa en (a, b) y si ψ es convexa y no decreciente en el recorrido de φ, demuéstrese que $\psi \circ \varphi$ es convexa en (a, b). Para $\varphi > 0$, demuéstrese que la convexidad de $\log \varphi$ implica la convexidad de φ, pero no al revés.

3. Supóngase que φ es una función real y continua en (a, b) tal que

$$\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2}\varphi(y)$$

para todo x e $y \in (a, b)$. Demuéstrese que φ es convexa. (El resultado *no* se obtiene si se omite la continuidad en las hipótesis.)

4. Supóngase que f es una función compleja medible sobre X, μ es una medida positiva sobre X y

$$\varphi(p)=\int_X |f|^p\, d\mu=\|f\|_p^p \quad (0<p<\infty).$$

Sea $E=\{p:\varphi(p)<\infty\}$. Supóngase $\|f\|_\infty>0$.

a) Si $r<p<s$, $r\in E$ y $s\in E$, demuéstrese que $p\in E$.

b) Demuéstrese que $\log\varphi$ es convexa en el interior de E y que φ es continua en E.

c) Por *a)*, E es conexo. ¿Es E necesariamente abierto? ¿Cerrado? ¿Puede E constar de un único punto? ¿Puede ser E un subconjunto conexo cualquiera de $(0,\infty)$?

d) Si $r<p<s$, demuéstrese que $\|f_p\|\leqslant \text{máx}(\|f\|_r, \|f\|_s)$. Demuéstrese que esto implica la inclusión $L^r(\mu)\cap L^s(\mu)\subset L^p(\mu)$.

e) Supóngase que $\|f\|_r<\infty$ para algún $r<\infty$ y demuéstrese que

$$\|f\|_p\to\|f\|_\infty \quad \text{cuando} \quad p\to\infty.$$

5. Supóngase, además de las hipótesis del ejercicio 4, que

$$\mu(X)=1.$$

a) Demuéstrese que $\|f\|_r\leqslant\|f\|_s$ si $0<r<s\leqslant\infty$.

b) ¿Bajo qué condiciones sucede que $0<r<s\leqslant\infty$ y $\|f\|_r=\|f\|_s<\infty$?

c) Demuéstrese que $L^r(\mu)\supset L^s(\mu)$ si $0<r<s$. ¿Bajo qué condiciones estos dos espacios contienen las mismas funciones?

d) Supóngase que $\|f\|_r<\infty$ para algún $r>0$. Demuéstrese que

$$\lim_{p\to 0}\|f\|_p=\exp\left\{\int_X \log|f|\, d\mu\right\}$$

si $\exp\{-\infty\}$ se define como 0.

6. Sea m la medida de Lebesgue en $[0,1]$, y defínase $\|f\|_p$ con respecto a m. Obténganse todas las funciones Φ en $[0,\infty)$ tales que se verifique la relación

$$\Phi(\lim_{p\to 0}\|f\|_p)=\int_0^1 (\Phi\circ f)\, dm$$

para toda función f positiva, medible y acotada. Demuéstrese, en primer lugar, que

$$c\Phi(x)+(1-c)\Phi(1)=\Phi(x^c) \quad (x>0,\ 0\leqslant c\leqslant 1).$$

Compárese con el ejercicio 5, *d)*.

7. Para algunas medidas, la relación $r<s$ implica $L^r(\mu)\subset L^s(\mu)$; para otras, se invierte la inclusión; y existen algunas para las que $L^r(\mu)$ no contiene a $L^s(\mu)$ si $r\neq s$. Dénse ejemplos de estas situaciones, y obténganse condiciones para μ bajo las que se presenten estas situaciones.

8. Si g es una función positiva en $(0,1)$ tal que $g(x)\to\infty$ cuando $x\to 0$, entonces existe una función convexa h en $(0,1)$ tal que $h\leqslant g$ y $h(g)\to\infty$ cuando $x\to 0$. ¿Es esto cierto o falso? ¿Cambia el problema si se cambia $(0,1)$ por $(0,\infty)$ y $x\to 0$ por $x\to\infty$?

9. Supóngase que f es Lebesgue medible en $(0,1)$ y no esencialmente acotada. Por ejercicio 4, *e)*, $\|f\|_p\to\infty$ cuando $p\to\infty$. ¿Puede tender $\|f\|_p$ a infinito de forma arbitrariamente lenta? Más precimente, ¿es cierto que para cada función positiva Φ

en $(0, \infty)$ tal que $\Phi(p) \to \infty$ se puede obtener una f tal que $\|f\|_p \to \infty$ cuando $p \to \infty$, pero $\|f\|_p \leqslant \Phi(p)$ para todo p suficientemente grande?

10. Supóngase $f_n \in L^p(\mu)$, para $n=1, 2, 3, \ldots$, y $\|f_n - f\|_p \to 0$ y $f_n \to g$ en c.t.p., cuando $n \to \infty$. ¿Qué relación existe entre f y g?

11. Supóngase $\mu(\Omega)=1$, y que f y g son funciones medibles positivas sobre Ω tales que $fg \geqslant 1$. Demuéstrese que

$$\int_\Omega f\, d\mu \cdot \int_\Omega g\, d\mu \geqslant 1.$$

12. Supóngase $\mu(\Omega)=1$ y $h: \Omega \to [0, \infty]$ medible. Si

$$A = \int_\Omega h\, d\mu,$$

demuéstrese que

$$\sqrt{1+A^2} \leqslant \int_\Omega \sqrt{1+h^2}\, d\mu \leqslant 1 + A.$$

Si μ es medida de Lebesgue en $[0, 1]$ y h en continua, $h=f'$, las desigualdades anteriores tienen una interpretación geométrica simple. De éstas, conjetúrese (para Ω general) bajo qué condiciones de h puede verificarse la igualdad en cualquiera de las desigualdades anteriores, y demuéstrense esas conjeturas.

13. ¿Bajo qué condiciones para f y g se verifica la igualdad en las conclusiones de los teoremas 3.2.3 y 3.2.4? Puede ser preciso tratar separadamente los casos $p=1$ y $p=\infty$.

14. Supóngase $1 < p < \infty$, $f \in L^p = L^p((0, \infty))$, relativo a la medida de Lebesgue, y

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt \qquad (0 < x < \infty).$$

a) Demuéstrese la desigualdad de Hardy

$$\|F\|_p \leqslant \frac{p}{p-1} \|f\|_p$$

que muestra que la aplicación $f \to F$ transforma L^p en L^p.

b) Demuéstrese que se verifica la igualdad sólo si $f=0$ en c.t.p.

c) Demuéstrese que la constante $p/(p-1)$ no puede cambiarse por ninguna más pequeña.

d) Si $f > 0$ y $f \in L^1$, demuéstrese que $F \notin L^1$.

Sugerencias: a) Supóngase en primer lugar que $f \geqslant 0$ y $f \in C_c((0, \infty))$. Una integración por partes proporciona

$$\int_0^\infty F^p(x)\, dx = -p \int_0^\infty F^{p-1}(x) x F'(x)\, dx.$$

Nótese que $xF' = f - F$, y aplíquese la desigualdad de Hölder a $\int F^{p-1} f$. Entonces dedúzcase el caso general.

b) Tómese $f(x) = x^{-1/p}$ sobre $[1, A]$, $f(x)=0$ fuera de este intervalo, para A grande.

15. Supóngase que $\{a_n\}$ es una sucesión de números positivos. Demuéstrese que

$$\sum_{N=1}^{\infty}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}a_n\right)^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$$

si $1 < p < \infty$.

Sugerencia: Si $a_n \geqslant a_{n+1}$, el resultado puede obtenerse del ejercicio 14. Este caso especial implica el general.

16. Demuéstrese el teorema de Egoroff: Si $\mu(X) < \infty$, si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones complejas medibles que converge puntualmente en todo punto de X, y si $\epsilon > 0$, existe un conjunto medible $E \subset X$, con $\mu(X-E) < \epsilon$, tal que $\{f_n\}$ converge uniformemente en E.

(La conclusión del teorema es que redefiniendo las f_n sobre un conjunto de medida arbitrariamente pequeña, podemos convertir una sucesión que converge puntualmente en otra que converge uniformemente; nótese la analogía con el teorema de Lusin.)

Sugerencia: Póngase

$$S(n, k) = \bigcap_{i,j>n} \left\{x : |f_i(x) - f_j(x)| < \frac{1}{k}\right\},$$

demuéstrese que $\mu(S(n, k)) \to \mu(X)$ cuando $n \to \infty$, para cada k, y, por tanto, existe una sucesión creciente conveniente $\{n_k\}$ tal que $E = \bigcap S(n_k, k)$ posee la propiedad buscada.

Demuéstrese que el teorema no puede extenderse a espacios σ-finitos.

Demuéstrese que el teorema se extiende (con la misma demostración) a la situación en que las sucesiones $\{f_n\}$ se cambian por familias $\{f_t\}$, donde t recorre los números reales positivos, y la hipótesis es que $f_t(x) \to f(x)$, cuando $t \to \infty$, para todo $x \in X$.

17. *a)* Si $0 < p < \infty$, póngase $\gamma_p = \text{máx}\,(1, 2^{p-1})$, y demuéstrese que

$$|\alpha - \beta|^p \leqslant \gamma_p(|\alpha|^p + |\beta|^p)$$

para números complejos arbitrarios α y β.

b) Supóngase que μ es una medida positiva sobre X, $0 < p < \infty$, $f \in L^p(\mu)$, $f_n \in L^p(\mu)$, $f_n(x) \to f(x)$ en c.t.p., y $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$ cuando $n \to \infty$. Demuéstrese que entonces $\lim \|f - f_n\|_p = 0$, completando las dos demostraciones que se esbozan a continuación.

1) Por el teorema de Egoroff, $X = A \cup B$ de tal manera que $\int_A |f|^p < \epsilon$, $\mu(B) < \infty$ y $f_n \to f$ uniformemente en B. El lema de Fatou aplicado a $\int_B |f_n|^p$, conduce a

$$\limsup \int_A |f_n|^p \, d\mu \leqslant \epsilon.$$

2) Póngase $h_n = \gamma_p(|f|^p + |f_n|^p) - |f - f_n|^p$, y utilícese el lema de Fatou como en la demostración del teorema 1.9.5.

c) Demuéstrese que la conclusión de *b)* es falsa si la hipótesis $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$ se omite, incluso aunque $\mu(X) < \infty$.

18. Sea μ una medida positiva sobre X. Una sucesión $\{f_n\}$ de funciones complejas medibles sobre X se dice que *converge en medida* a la función medible f si a cada $\epsilon > 0$ le corresponde un N tal que

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) < \epsilon$$

para todo $n > N$. (Esta noción tiene importancia en teoría de probabilidad.) Supóngase $\mu(X) < \infty$ y demuéstrense los enunciados siguientes:

a) Si $f_n(x) \to f(x)$ en c.t.p., entonces $f_n \to f$ en medida.

b) Si $f_n \in L^p(\mu)$ y $\|f_n - f\|_p \to 0$, entonces $f_n \to f$ en medida; aquí $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

c) Si $f_n \to f$ en medida, entonces $\{f_n\}$ tiene una subsucesión que converge a f en c.t.p.

Investíguense los recíprocos de *a)* y *b)*. ¿Qué les sucede a *a)*, *b)* y *c)* si $\mu(X) = \infty$, por ejemplo, si μ es la medida de Lebesgue en R^1?

19. Se define el *recorrido esencial* de una función $f \in L^\infty(\mu)$ como el conjunto R_f que consiste en todos los números complejos w tales que

$$\mu(\{x : |f(x) - w| < \epsilon\}) > 0$$

para todo $\epsilon > 0$. Demuéstrese que R_f es compacto. ¿Qué relación existe entre el conjunto R_f y el número $\|f\|_\infty$?

Sea A_f el conjunto de todas las medias

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, d\mu$$

donde $E \in \mathcal{M}$ y $\mu(E) > 0$. ¿Qué relación existe entre A_f y R_f? ¿Es A_f siempre cerrado? ¿Existen medidas μ tales que A_f es convexo para toda $f \in L^\infty(\mu)$? ¿Existen medidas para las cuales A_f deja de ser convexo para alguna $f \in L^\infty(\mu)$?

¿Cómo se modifican estos resultados si se cambia $L^\infty(\mu)$ por $L^1(\mu)$, por ejemplo?

20. Supóngase que φ es una función real sobre R^1 tal que

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x)\, dx\right) \leqslant \int_0^1 \varphi(f)\, dx$$

para toda f real acotada y medible. Demuéstrese que φ es entonces convexa.

21. Un espacio métrico Y se llama una *compleción* de un espacio métrico X si X es denso en Y y Y es completo. En el apartado 3.3.2 se hizo una referencia a «la» compleción de un espacio métrico. Establézcase y demuéstrese un teorema de unicidad que justifique esta terminología.

22. Supóngase que X es un espacio métrico en el que toda sucesión de Cauchy tiene una subsucesión convergente. ¿Se deduce de ello que X es completo? (Véase la demostración del teorema 3.2.6).

23. Supóngase que μ es una medida positiva sobre X, $\mu(X) < \infty$, $f \in L^\infty(\mu)$, $\|f\|_\infty > 0$, y

$$\alpha_n = \int_X |f|^n \, d\mu \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Demuéstrese que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \|f\|_\infty.$$

24. Supóngase que μ es una medida positiva, $f \in L^p(\mu)$, $g \in L^p(\mu)$.

a) Si $0 < p < 1$, demuéstrese que

$$\int \big| |f|^p - |g|^p \big| \, d\mu \leqslant \int |f - g|^p \, d\mu$$

y que $\Delta(f, g) = \int |f - g|^p \, d\mu$ define una métrica en $L^p(\mu)$.

b) Si $1 \leqslant p < \infty$ y $\|f\|_p \leqslant R$, $\|g\|_p \leqslant R$, demuéstrese que

$$\int \big||f|^p - |g|^p\big| \, d\mu \leqslant 2pR^{p-1}\|f-g\|_p.$$

Sugerencia: Demuéstrese en primer lugar que para $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$,

$$|x^p - y^p| \leqslant \begin{cases} |x-y|^p & \text{si } 0 < p < 1. \\ p|x-y|(x^{p-1}+y^{p-1}) & \text{si } 1 \leqslant p < \infty. \end{cases}$$

Nótese que *a)* y *b)* establecen la continuidad de la aplicación $f \to |f|^p$ que transforma $L^p(\mu)$ en $L^1(\mu)$.

TEORIA ELEMENTAL DEL ESPACIO DE HILBERT

4.1. PRODUCTOS INTERIORES Y FUNCIONES LINEALES

4.1.1. Definición. Un espacio vectorial complejo H se llama un *espacio con producto interior* (o *espacio unitario)* si a cada par ordenado de vectores x e $y \in H$ hay asociado un número complejo (x, y), el llamado «producto interior» (o «producto escalar») de x e y, tal que se verifican las propiedades siguientes:

a) $(y, x) = \overline{(x, y)}$. (La barra denota conjugación compleja).
b) $(x+y, z) = (x, z) + (y, z)$ si x, y y $z \in H$.
c) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ si x e $y \in H$ y α es un escalar.
d) $(x, x) \geqslant 0$ para todo $x \in H$.
e) $(x, x) = 0$ sólo si $x = 0$.

He aquí algunas consecuencias inmediatas de estos axiomas:

c) implica que $(0, y) = 0$ para todo $y \in H$.
b) y *c)* pueden combinarse en el enunciado: *Para todo $y \in H$, la aplicación $x \to (x, y)$ es un funcional lineal sobre H.*
a) y *c)* muestran que $(x, \alpha y) = \bar{\alpha}(x, y)$.
a) y *b)* conducen a la segunda propiedad distributiva:

$$(z, x+y) = (z, x) + (z, y)$$

De *d)* podemos definir $\|x\|$, la *norma* del vector $x \in H$, como la raíz cuadrada no negativa de (x, x). Entonces

f) $$\|x\|^2 = (x, x).$$

4.1.2. La desigualdad de Schwarz. *Las propiedades* 4.1.1, *a) a d), implican*

$$(x, y) \leqslant \|x\| \, \|y\|$$

para todo x e $y \in H$.

DEMOSTRACIÓN. Pongamos $A = \|x\|^2$, $B = |(x, y)|$, y $C = \|y\|^2$. Existe un número complejo α tal que $|\alpha| = 1$ y $\alpha(y, x) = B$. Para cualquier r real, tenemos entonces

$$(x - r\alpha y, x - r\alpha y) = (x, x) - r\alpha(y, x) - r\bar{\alpha}(x, y) + r^2(y, y). \qquad [4.1]$$

La expresión del primer miembro es real y no negativa. Por tanto,

$$A-2Br+Cr^2\geqslant 0 \qquad [4.2]$$

para todo r real. Si $C=0$, ha de ser $B=0$; si no [4.2] sería falso para r positivo suficientemente grande. Si $C>0$, tomemos $r=B/C$ en [4.2], y se obtiene $B^2\leqslant AC$. ////

4.1.3. La desigualdad triangular. *Para x e $y\in H$, tenemos*

$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|.$$

DEMOSTRACIÓN. De la desigualdad de Schwarz,

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2&=(x+y,x+y)=(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)\\&\leqslant\|x\|^2+2\|x\|\,\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2.\end{aligned}$$ ////

4.1.4. Definición. Se deduce de la desigualdad triangular que

$$\|x-z\|\leqslant\|x-y\|+\|y-z\| \quad (x,y,z\in H). \qquad [4.3]$$

Si definimos la distancia entre x e y como $\|x-y\|$, todos los axiomas de un espacio métrico se satisfacen; para ello, por primera vez, utilizamos la parte *e)* de la definición 4.1.1.

El espacio H es, pues, ahora, un espacio métrico. Si este espacio métrico es *completo,* es decir, toda sucesión de Cauchy converge en H, H recibe el nombre de *espacio de Hilbert.*

En todo el resto de este capítulo, la letra H denotará un espacio de Hilbert.

4.1.5. Ejemplos

a) Para todo n fijo, el conjunto C^n de todas las n-uplas

$$x=(\xi_1,\ldots,\xi_n).$$

donde $\xi_1,\ldots,\xi_n$ son números complejos, es un espacio de Hilbert si la suma y la multiplicación por un escalar se definen componente a componente, como es habitual, y si

$$(x,y)=\sum_{j=1}^{n}\xi_j\bar{\eta}_j \qquad (y=(\eta_1,\ldots,\eta_n)).$$

b) Si μ es una medida positiva cualquiera, $L^2(\mu)$ es un espacio de Hilbert con producto interior definido por

$$(f,g)=\int_X f\bar{g}\,d\mu.$$

El integrando en el segundo miembro está en $L^1(\mu)$, por el teorema 3.2.3, de modo que (f,g) está bien definido. Nótese que

$$\|f\|=(f,f)^{1/2}=\left\{\int_X|f|^2\,d\mu\right\}^{1/2}=\|f\|_2$$

El que $L^2(\mu)$ sea completo (teorema 3.2.6) muestra que $L^2(\mu)$ es ciertamente un espacio de Hilbert. (Recordamos que $L^2(\mu)$ debe ser considerado como un espacio de *clases de equivalencia* de funciones; véase la discusión en el apartado 3.2.5.)

Para $H = L^2(\mu)$, las desigualdades 4.1.2 y 4.1.3 resultan ser casos especiales de las desigualdades de Hölder y Minkowski.

Nótese que el ejemplo *a)* es un caso especial de *b)*. ¿Cuál es la medida en *a)*?

c) El espacio vectorial de todas las funciones complejas continuas en $[0, 1]$ es un espacio con producto interior si

$$(f, g) = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\, dt$$

pero no es un espacio de Hilbert.

4.1.6. Teorema. *Para todo $y \in H$ fijo, las aplicaciones*

$$x \to (x, y), \quad x \to (y, x), \quad x \to \|x\|$$

son funciones continuas sobre H.

DEMOSTRACIÓN. La desigualdad de Schwarz implica que

$$|(x_1, y) - (x_2, y)| = |(x_1 - x_2, y)| \leqslant \|x_1 - x_2\| \, \|y\|,$$

lo que demuestra que $x \to (x, y)$ es, de hecho, uniformemente continua, y lo mismo para $x \to (y, x)$. La desigualdad triangular $\|x_1\| \leqslant \|x_1 - x_2\| + \|x_2\|$ proporciona

$$\|x_1\| - \|x_2\| \leqslant \|x_1 - x_2\|,$$

y si intercambiamos x_1 y x_2 vemos que

$$|\,\|x_1\| - \|x_2\|\,| \leqslant \|x_1 - x_2\|$$

para todo x_1 y $x_2 \in H$. Entonces $x \to \|x\|$ es uniformemente continua. ////

4.1.7. Subespacios. Un subconjunto M de un espacio vectorial V se llama un *subespacio* de V si M es él mismo un espacio vectorial, relativo a la adición y multiplicación por un escalar que están definidas en V. Una condición necesaria y suficiente para que un conjunto $M \subset V$ sea un subespacio es que $x + y \in M$ y $\alpha x \in M$ si x e $y \in M$ y α es un escalar.

En el contexto de espacios vectoriales, la palabra «subespacio» tendrá siempre este significado. A veces, para darle mayor énfasis, podemos usar el término «subespacio vectorial» en lugar de subespacio.

Por ejemplo, si V es el espacio vectorial de todas las funciones complejas sobre un conjunto S, el conjunto de todas las funciones complejas acotadas sobre S es un subespacio de V, pero el conjunto de todas las $f \in V$ con $|f(x)| \leqslant 1$ para todo $x \in S$ no lo es. El espacio vectorial real R^3 tiene los subespacios siguientes y ningún otro: *a)*, R^3; *b)*, todos los planos que pasan por el origen 0; *c)*, todas las líneas rectas que pasan por 0, y *d)*, $\{0\}$.

Un *subespacio cerrado* M de H es un subespacio que es además un conjunto cerrado con respecto a la topología inducida por la métrica de H.

4.1.8. Conjuntos convexos. Un conjunto E en un espacio vectorial V se dice *convexo* si tiene la propiedad geométrica siguiente: si $x \in E$, $y \in E$ y $0 < t < 1$, el punto

$$z_t = (1-t)x + ty$$

también está en E. Cuando t varía entre 0 y 1, se puede visualizar z_t como describiendo un segmento de línea recta en V, de x a y. La convexidad de E requiere que éste contenga los segmentos entre cualquier pareja de sus puntos.

Es claro que todo subespacio de V es convexo.

Además, si E es convexo también lo son cada uno de sus trasladados

$$E + x = \{y + x : y \in E\}.$$

4.1.9. Ortogonalidad. Si $(x, y) = 0$ para ciertos x e $y \in R$, decimos que x es ortogonal a y, y escribimos a veces $x \perp y$. Como $(x, y) = 0$ implica $(y, x) = 0$, la relación $\perp$ es simétrica.

Sea $x^\perp$ el conjunto de todos los $y \in H$ que son ortogonales a x; y si M es un subespacio de H, sea $M^\perp$ el conjunto de todos los $y \in H$ que son ortogonales a todos los $x \in M$.

Nótese que $x^\perp$ es un subespacio de H, puesto que $x \perp y$ y $x \perp y'$ implica $x \perp (y + y')$ y $x \perp \alpha y$. Además, $x^\perp$ es precisamente el conjunto de puntos en los que la función continua $y \to (x, y)$ es 0. Por tanto, $x^\perp$ es un subespacio *cerrado* de H. Como

$$M^\perp = \bigcap_{x \in M} x^\perp,$$

$M^\perp$ es una intersección de subespacios cerrados, y por ello $M^\perp$ *es un subespacio cerrado de* H.

4.1.10. Teorema. *Todo conjunto no vacío, convexo y cerrado E en un espacio de Hilbert H contiene un único elemento de norma mínima.*

En otras palabras, existe uno y sólo un $x_0 \in E$ tal que $\|x_0\| \leqslant \|x\|$ para todo $x \in E$.

DEMOSTRACIÓN. Un cálculo fácil, utilizando sólo las propiedades enumeradas en la definición 4.1.1, establece la identidad

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \qquad (x \text{ e } y \in H). \qquad [4.4]$$

Esta se conoce como *regla del paralelogramo:* Si interpretamos $\|x\|$ como la longitud del vector x, [4.4] dice que la suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus lados, una conocida proposición de geometría plana.

Sea $\delta = \inf\{\|x\| : x \in E\}$. Para cualesquiera x e $y \in E$, aplicamos [4.4] a $\frac{1}{2}x$ y $\frac{1}{2}y$ y obtenemos

$$\tfrac{1}{4}\|x-y\|^2 = \tfrac{1}{2}\|x\|^2 + \tfrac{1}{2}\|y\|^2 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2. \qquad [4.5]$$

Como E es convexo, $(x+y)/2 \in E$. Por tanto,

$$\|x-y\|^2 \leqslant 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - 4\delta^2 \qquad (x \text{ e } y \in E). \qquad [4.6]$$

Si además $\|x\|=\|y\|=\delta$, entonces [4.6] implica $x=y$, y hemos demostrado la afirmación de unicidad del teorema.

La definición de δ muestra que existe una sucesión $\{y_n\}$ en E tal que $\|y_n\|\to\delta$ cuando $n\to\infty$. Cambiemos x e y en [4.6] por y_n y y_m. Entonces, cuando $n\to\infty$ y $m\to\infty$, el segundo miembro de [4.6] tiende a 0. Esto prueba que $\{y_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Como H es completo, existe un $x_0\in H$ tal que $y_n\to x_0$, es decir, $\|y_n-x_0\|\to 0$, cuando $n\to\infty$. Puesto que $y_n\in E$ y E es cerrado, $x_0\in E$. Como la norma es una función continua sobre H (teorema 4.1.6), se tiene que

$$\|x_0\|=\lim_{n\to\infty}\|y_n\|=\delta \qquad ////$$

4.1.11. Teorema. *Sea M un subespacio cerrado de H. Existe un único par de aplicaciones P y Q tales que P aplica H en M, Q aplica H en $M^\perp$, y*

$$x=Px+Qx \qquad [4.7]$$

para todo $x\in H$. Estas aplicaciones tienen las propiedades adicionales siguientes:

$$\text{Si } x\in M, \text{ entonces } Px=x,\ Qx=0;\ \text{si } x\in M^\perp, \text{ entonces } Px=0,\ Qx=x. \qquad [4.8]$$

$$\|x-Px\|=\inf\{\|x-y\|: y\in M\} \quad \text{si } x\in H. \qquad [4.9]$$

$$\|x\|^2=\|Px\|^2+\|Qx\|^2. \qquad [4.10]$$

$$P \text{ y } Q \text{ son aplicaciones lineales.} \qquad [4.11]$$

Corolario. *Si $M\neq H$, existe un $y\in H$, $y\neq 0$, tal que $y\perp M$.*

P y Q se llaman las *proyecciones ortogonales* de H sobre M y $M^\perp$.

DEMOSTRACIÓN. Para cualquier $x\in H$, el conjunto $x+M=\{x+y: y\in M\}$ es cerrado y convexo. Definamos Qx como el único elemento de norma mínima en $x+M$; éste existe, por el teorema 4.1.10. Definamos $Px=x-Qx$. Entonces se verifica [4.7]. Como $Qx\in x+M$, es claro que $Px\in M$. Por tanto, P aplica H en M.

A continuación tenemos que demostrar que $(Qx,y)=0$ para todo $y\in M$. Supongamos $\|y\|=1$ sin pérdida de generalidad, y pongamos $z=Qx$. La propiedad de norma mínima de Qx muestra que

$$(z,z)=\|z\|^2\leqslant\|z-\alpha y\|^2=(z-\alpha y, z-\alpha y)$$

para todo escalar α. Simplificando se obtiene

$$0\leqslant -\alpha(y,z)-\bar{\alpha}(z,y)+|\alpha|^2.$$

Con $\alpha=(z,y)$, esto proporciona $0\leqslant -|(z,y)|^2$, de modo que $(z,y)=0$. Entonces Q aplica H en $M^\perp$.

Ahora bien, si $x=x_0+x_1$, con $x_0\in M$, $x_1\in M^\perp$, entonces

$$x_0-Px=Qx-x_1.$$

Como $x_0-Px\in M$, $Qx-x_1\in M^\perp$ y $M\cap M^\perp=\{0\}$ [una consecuencia inmediata del hecho de que $(x,x)=0$ implique $x=0$], tenemos $x_0=Px$, $x_1=Qx$, que demuestra la afirmación de unicidad.

La linealidad de P y Q se demuestra análogamente: aplicando [4.7] a x, a y, y a $\alpha x+\beta y$, obtenemos

$$P(\alpha x+\beta y)-\alpha Px-\beta Py=\alpha Qx+\beta Qy-Q(\alpha x+\beta y).$$

El primer miembro está en M, el segundo en $M^{\perp}$; por tanto, ambos son 0, y P y Q son lineales.

La propiedad [4.8] se deduce de [4.7]; [4.9] se utilizó para definir P; y [4.10] se sigue de [4.7], porque $(Px, Qx)=0$. Para demostrar el corolario, tómese $x \in H$, $x \notin M$, y póngase $y=Qx$; como $x \neq Px$, $y \neq 0$.

Hemos observado ya que $x \to (x, y)$ es, para cada $y \in H$, un funcional lineal continuo sobre H. Un hecho muy importante es el que *todos* los funcionales lineales continuos sobre H son de este tipo.

4.1.12. Teorema. *Si L es un funcional lineal continuo sobre H, entonces existe un único $y \in H$ tal que*

$$Lx=(x, y) \qquad (x \in H). \tag{4.12}$$

DEMOSTRACIÓN. Si $Lx=0$ para todo x, tomemos $y=0$. Si no es así, definamos

$$M=\{x : Lx=0\}. \tag{4.13}$$

La linealidad de L prueba que M es un subespacio. La continuidad de L muestra que M es cerrado. Como $Lx \neq 0$ para algún $x \in H$, el teorema 4.1.11 muestra que $M^{\perp}$ no consiste en el 0 solamente.

Por tanto, existe $z \in M^{\perp}$, con $\|z\|=1$. Pongamos

$$u=(Lx)z-(Lz)x. \tag{4.14}$$

Puesto que $Lu=(Lx)(Lz)-(Lz)(Lx)=0$, tenemos $u \in M$. Entonces $(u, z)=0$. Esto proporciona

$$Lx=(Lx)(z, z)=(Lz)(x, z). \tag{4.15}$$

Entonces [4.12] se verifica con $y=\alpha z$, donde $\bar{\alpha}=Lz$.

La unicidad de y se demuestra fácilmente, porque, si $(x, y)=(x, y')$ para todo $x \in H$, haciendo $z=y-y'$ se tiene $(x, z)=0$ para todo $x \in H$; en particular, $(z, z)=0$, y, por tanto, $z=0$. ////

4.2. CONJUNTOS ORTONORMALES

4.2.1. Definiciones. Si V es un espacio vectorial, si $x_1, \ldots, x_k \in V$ y si $c_1, \ldots, c_k$ son escalares, $c_1x_1+\ldots+c_kx_k$ se llama una combinación *lineal* de $x_1, \ldots, x_k$. El conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$ se dice *independiente* si $c_1x_1+\ldots+c_kx_k=0$ implica que $c_1=\ldots=c_k=0$. Un conjunto $S \subset V$ es independiente si todo subconjunto finito de S es independiente. El conjunto $[S]$ de todas las combinaciones lineales de todos los subconjuntos de S (también llamado el conjunto de todas las *combinaciones lineales finitas* de elementos de S) es claramente un

espacio vectorial; $[S]$ es el menor subespacio de V que contiene a S; $[S]$ se llama el espacio engendrado por S.

Un conjunto de vectores u_α en un espacio de Hilbert H, donde α recorre algún conjunto de índices A, se llama *ortonormal* si satisface las relaciones de ortogonalidad $(u_\alpha, u_\beta)=0$ para todo $\alpha \neq \beta$, $\alpha \in A$ y $\beta \in A$, y si está normalizado de modo que $\|u_\alpha\|=1$ para cada $\alpha \in A$. En otras palabras, $\{u_\alpha\}$ es ortonormal si

$$(u_\alpha, u_\beta)=\begin{cases} 1 \text{ si } \alpha=\beta, \\ 0 \text{ si } \alpha \neq \beta. \end{cases} \qquad [4.16]$$

Si $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ es ortonormal, asociamos a cada $x \in H$ una función compleja $\hat{x}$ sobre el conjunto de índices A, definida mediante

$$\hat{x}(\alpha)=(x, u_\alpha) \qquad (\alpha \in A). \qquad [4.17]$$

A veces se llama a los números $\hat{x}(\alpha)$ los *coeficientes de Fourier* de x, relativos al conjunto $\{u_\alpha\}$.

4.2.2. Teorema. *Si $u_1, \ldots, u_k$ es un conjunto ortonormal, y si $x=\sum_1^k c_n u_n$, entonces*

$$c_n=(x, u_n), \qquad \text{para} \qquad 1 \leqslant n \leqslant k, \qquad [4.18]$$

$$\|x\|^2=\sum_1^k |c_n|^2. \qquad [4.19]$$

DEMOSTRACIÓN. Aplíquense las relaciones [4.16]. ////

Corolario. *Todo conjunto ortonormal es independiente.*

DEMOSTRACIÓN. Esto se deduce de [4.19]. ////

4.2.3. Un problema de aproximación. Sean $v_1, \ldots, v_k$ un conjunto de vectores independientes en H, y supongamos $x \in H$. El problema es *obtener un método de cálculo del valor mínimo de*

$$\left\| x - \sum_{j=1}^k c_j v_j \right\|, \qquad [4.20]$$

donde $c_1, \ldots, c_k$ recorren todos los escalares, y obtener los valores correspondientes de $c_1, \ldots, c_k$.

Sea M el subespacio engendrado por $v_1, \ldots, v_k$. Si supiéramos si M es cerrado, podríamos aplicar el teorema 4.1.11 y deducir la existencia de un único elemento minimizante $x_0=Px$, donde

$$x_0=\sum_{j=1}^k c_j v_j, \qquad [4.21]$$

el cual tiene también la propiedad de que $x-x_0 \in M^\perp$. Estos hechos podrían entonces utilizarse para obtener información sobre los coeficientes $c_1, \ldots, c_k$ en [4.21].

Como M es el subespacio engendrado por un conjunto finito de vectores, puede parecer obvio que M es cerrado. Se puede demostrar esto por inducción, observando que $\{0\}$ es ciertamente cerrado y procediendo sucesivamente con ayuda del lema siguiente:

Si V es un subespacio cerrado de H, si $y \in H$, $y \notin V$, y V^* es el espacio engendrado por V e y, entonces V^* es cerrado.

Para demostrarlo, supongamos que z es un punto límite de V^*. Entonces

$$z = \lim_{n \to \infty} (x_n + \lambda_n y),$$

donde $x_n \in V$ y λ_n son escalares. Como las sucesiones convergentes en espacios métricos son acotadas, existe un $\eta < \infty$ tal que $\|x_n + \lambda_n y\| < \eta$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ Si fuera cierto que $|\lambda_n| \to \infty$, deberíamos tener

$$\|\lambda_n^{-1} x_n + y\| < \frac{\eta}{|\lambda_n|} \to 0$$

y, por tanto, $-y \in V$, puesto que V es cerrada. Pero $y \notin V$. Así, $\{\lambda_n\}$ tiene una subsucesión de Cauchy $\{\lambda_{n_i}\}$ que converge a un cierto λ, y, por ello, $\{x_{n_i}\}$, siendo la diferencia de dos sucesiones de Cauchy, es también una sucesión de Cauchy en H y converge a algún $x \in V$. Entonces $z = x + \lambda y$. Esto demuestra que V^* contiene todos sus puntos límites.

Volvemos ahora a nuestro problema. Pongamos

$$a_{ij} = (v_j, v_i), \qquad b_i = (x, v_i). \tag{4.22}$$

Entonces si x_0, dado por [4.21], es el elemento minimizante, debemos tener

$$(x - x_0, v_i) = 0$$

para $i = 1, \ldots, k$, que conduce a un conjunto de k ecuaciones lineales en las incógnitas $c_1, \ldots, c_k$:

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} c_j = b_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant k). \tag{4.23}$$

Sabemos, por el teorema 4.1.11, que x_0 existe y es único. Por tanto, el determinante de las a_{ij} no es 0, y las c_j pueden calcularse de [4.23].

Sea ahora δ el valor mínimo de [4.20]. Como $(x - x_0, v_i) = 0$, tenemos $(x - x_0, x_0) = 0$; por tanto:

$$\delta^2 = (x - x_0, x - x_0) = (x, x - x_0) = \left(x, x - \sum_{j=1}^{k} c_j v_j \right),$$

de modo que

$$\delta^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{k} \bar{c}_j b_j. \tag{4.24}$$

Esto resuelve nuestro problema, en términos de las cantidades [4.22].

Volvamos ahora a un caso especial: Cambiemos $v_1, \ldots, v_k$ por un conjunto ortonormal $u_1, \ldots, u_k$. Entonces $a_{ij}=1$ si $i=j$, $a_{ij}=0$ si $i \neq j$; por tanto, [4.23] proporciona $c_i=b_i$, y [4.24] se convierte en

$$\delta^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{k} |b_j|^2. \qquad [4.25]$$

Podemos resumir lo anterior así:

4.2.4. Teorema. *Sea $u_1, \ldots, u_k$ un conjunto ortonormal en H, y sea $x \in H$. Entonces*

$$\|x - \sum_{j=1}^{k} (x, u_j)u_j\| \leqslant \|x - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_j\| \qquad [4.26]$$

para todos los escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. La igualdad se verifica en [4.20] *si, y sólo si, $\lambda_j = (x, u_j)$ para $1 \leqslant j \leqslant k$. El vector*

$$\sum_{j=1}^{k} (x, u_j)u_j \qquad [4.27]$$

es la proyección ortogonal de x en el subespacio $[u_1, \ldots, u_k]$, y si δ es la distancia de x a este subespacio, entonces

$$\sum_{j=1}^{k} |(x, u_j)|^2 = \|x\|^2 - \delta^2. \qquad [4.28]$$

Corolario (desigualdad de Bessel). Si $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ *es un subconjunto ortonormal cualquiera en H, si $x \in H$, y si $\hat{x}(\alpha) = (x, u_\alpha)$, entonces*

$$\sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2 \leqslant \|x\|^2. \qquad [4.29]$$

Este corolario requiere alguna explicación y comentarios. El conjunto A es cualquier conjunto de índices, posiblemente incluso no numerable, y no ordenado de ninguna manera. Bajo esas condiciones, ¿qué significa la suma del primer miembro de [4.29]? Definimos así esa suma: Si $0 \leqslant \varphi(\alpha) \leqslant \infty$ para cada $\alpha \in A$, el símbolo

$$\sum_{\alpha \in A} \varphi(\alpha) \qquad [4.30]$$

denota el supremo del conjunto de todas las sumas finitas $\varphi(\alpha_1) + \varphi(\alpha_2) + \ldots + \varphi(\alpha_k)$, donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ son elementos distintos de A. Con este convenio, es claro que [4.29] se deduce de [4.28].

Una reflexión rápida muestra que *la suma* [4.30] *es precisamente la integral de Lebesgue de φ relativa a la medida discreta sobre A.* Sea $\ell^2(A)$ el espacio L^2 relativo a esta medida discreta. Entonces [4.29] establece que $\hat{x} \in \ell^2(A)$ y que $\|\hat{x}\|_2 = \|x\|$.

Una consecuencia inmediata de [4.29] debe mencionarse explícitamente:

Para todo $x \in H$ y cualquier conjunto ortonormal $\{u_\alpha\}$ en H, el conjunto de todos los α tales que $\hat{x}(\alpha) \neq 0$ es a lo sumo numerable.

Sea F la aplicación que asigna a cada $x \in H$ la función $\hat{x}$ sobre A. Para cada $\alpha \in A$, $x \to (x, u_\alpha)$ es un funcional lineal. Por tanto, F es una transformación lineal de H en $\ell^2(A)$ (véase la definición 2.1.1). Además, F no aumenta las distancias, porque $\|\hat{x}-\hat{y}\|_2 \leqslant \|x-y\|$. En particular, F es continua.

Veremos ahora que el que H sea completo implica que F aplica H *sobre* $\ell^2(A)$ y que bajo ciertas condiciones sobre $\{u_\alpha\}$, F es realmente una isometría, es decir, que $\|\hat{x}\|_2 = \|x\|$ para todo $x \in H$. Entonces, por supuesto, F será uno a uno.

4.2.5. El teorema de Riesz-Fischer. *Sea $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ un conjunto ortonormal en H. Supongamos que $\ell^2(A)$. Entonces $\varphi = \hat{x}$ para algún $x \in H$.*

DEMOSTRACIÓN. Para $n = 1, 2, 3, \ldots$, sea $A_n = \{\alpha : |\varphi(\alpha)| > 1/n\}$. Cada A_n es un conjunto finito. (De hecho, se comprueba fácilmente que A_n tiene a lo sumo $n^2\|\varphi\|_2^2$ elementos.) Pongamos

$$x_n = \sum_{\alpha \in A_n} \varphi(\alpha) u_\alpha \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{4.31}$$

Entonces $\hat{x}_n = \varphi \cdot \chi_{A_n}$, así que $\hat{x}_n(\alpha) \to \varphi(\alpha)$ para todo $\alpha \in A$, y $|\varphi - \hat{x}|^2 \leqslant |\varphi|^2$. En consecuencia, como caso elemental del teorema de la convergencia dominada, $\|\varphi - \hat{x}_n\|_2 \to 0$. Se tiene que $\{\hat{x}_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $\ell^2(A)$. Puesto que los conjuntos A_n son finitos, el teorema 4.2.2 muestra que

$$\|x_n - x_m\| = \|\hat{x}_n - \hat{x}_m\|.$$

Por tanto, $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en H, y como H es completo, existe un $x = \lim_{x \to \infty} x_n$ en H. Para cualquier $\alpha \in A$ tenemos, entonces:

$$\hat{x}(\alpha) = (x, u_\alpha) = \lim_{n \to \infty} (x_n, u_\alpha) = \lim_{n \to \infty} \hat{x}_n(\alpha) = \varphi(\alpha),$$

lo que completa la demostración. ////

4.2.6. Teorema. *Sea $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ un conjunto ortonormal en H. Cada una de las siguientes cuatro condiciones sobre $\{u_\alpha\}$ implica las otras tres:*

a) *$\{u_\alpha\}$ es un conjunto ortonormal maximal en H.*
b) *El conjunto S de todas las combinaciones lineales finitas de elementos de $\{u_\alpha\}$ es denso en H.*
c) *Para todo $x \in H$, tenemos $\|x\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2$.*
d) *Si $x \in X$ y $y \in H$, entonces $(x, y) = \sum_{\alpha \in A} \hat{x}(\alpha)\overline{\hat{y}(\alpha)}$.*

La última fórmula se conoce como *identidad de Parseval.* Obsérvese que $\hat{x} \in \ell^2(A)$ e $\hat{y} \in \ell^2(A)$, y, por tanto, $\hat{x}\bar{\hat{y}} \in \ell^1(A)$, así que la sumación en *d)* está bien definida. Por supuesto, *c)* es el caso especial de *d)* para $x = y$. Los conjuntos ortonormales maximales se llaman frecuentemente *conjuntos ortonormales completos* o *bases ortonormales.*

DEMOSTRACIÓN. Decir que $\{u_\alpha\}$ es maximal significa simplemente que ningún vector de H puede añadirse a $\{u_\alpha\}$ de tal manera que el conjunto resultante sea todavía ortonormal. Esto sucede precisamente cuando no existe ningún $x \neq 0$ en H que sea ortogonal a todos los u_α.

Demostraremos que $a) \to b) \to c) \to d) \to a)$.

Sea M la adherencia de S. Como S es un subespacio, también lo es M ($x_n \to x$ e $y_n \to y$ implica $x_n + y_n \to x + y$, $\lambda x_n \to \lambda x$), y si S no es denso en H, $M \neq H$, así que $M^\perp$ contiene algún vector no nulo, por el teorema 4.1.11. Entonces $\{u_\alpha\}$ no es maximal si S no es denso, y *a)* implica *b)*.

Supóngase que se verifica *b)*. Fijemos $x \in H$, $\epsilon > 0$. Como S es denso, existe un conjunto finito $u_{\alpha_1}, \ldots, u_{\alpha_k}$ tal que alguna combinación lineal de estos vectores dista de x menos de ϵ. Por el teorema 4.2.4, esta aproximación puede mejorarse sólo si tomamos $\hat{x}(\alpha_j)$ como coeficiente de u_{α_j}. Entonces, si

$$z = \hat{x}(\alpha_1)u_{\alpha_1} + \ldots + \hat{x}(\alpha_k)u_{\alpha_k}, \qquad [4.32]$$

tenemos $\|x - z\| < \epsilon$; por tanto, $\|x\| < \|z\| + \epsilon$, y el teorema 4.2.2 proporciona

$$(\|x\| - \epsilon)^2 < \|z\|^2 = |\hat{x}(\alpha_1)|^2 + \ldots + |\hat{x}(\alpha_k)|^2 \leqslant \sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2. \qquad [4.33]$$

Como ϵ es arbitrario, *c)* se deduce de [4.33] y de la desigualdad de Bessel.

La ecuación en *c)* también puede escribirse en la forma

$$(x, x) = (\hat{x}, \hat{x}), \qquad [4.34]$$

donde el producto interior del segundo miembro es el del espacio de Hilbert $\ell^2(A)$, como en el ejemplo 4.1.5, *b)*. Fijemos $x \in H$, $y \in H$. Si *c)* se verifica, entonces

$$(x + \lambda y, x + \lambda y) = (\hat{x} + \lambda \hat{y}, \hat{x} + \lambda \hat{y}) \qquad [4.35]$$

para todo escalar λ; por tanto:

$$\bar{\lambda}(x, y) + \lambda(y, x) = \bar{\lambda}(\hat{x}, \hat{y}) + \lambda(\hat{y}, \hat{x}). \qquad [4.36]$$

Tomemos $\lambda = 1$ y $\lambda = i$. Entonces [4.36] muestra que (x, y) y $(\hat{x}, \hat{y})$ tienen las mismas partes reales e imaginarias, y, por tanto, son iguales. De esta manera, *c)* implica *d)*.

Finalmente, si *a)* es falsa, existe un $u \neq 0$ en H de modo que $(u, u_\alpha) = 0$ para todo $\alpha \in A$. Si $x = y = u$, entonces $(x, y) = \|u\|^2 \neq 0$, pero $\hat{x}(\alpha) = 0$ para todo $\alpha \in A$, y, por tanto, *d)* no se verifica. Entonces *d)* implica *a)*, lo que completa la demostración. ////

4.2.7. Isomorfismos. Informalmente hablando, dos sistemas algebraicos se dicen isomorfos si existe una aplicación uno a uno de uno sobre otro que preserva todas las propiedades pertinentes. Por ejemplo, podríamos plantearnos si dos grupos son isomorfos o si lo son dos cuerpos. Dos espacios vectoriales son isomorfos si existe una aplicación *lineal* uno a uno de uno sobre el otro. Las aplicaciones lineales son las que preservan los conceptos pertinentes de un espacio vectorial, adición y multiplicación por un escalar.

De la misma manera, dos espacios de Hilbert H_1 y H_2 son isomorfos si existe una aplicación lineal uno a uno Λ de H_1 sobre H_2 que también preserve el producto interior: $(\Lambda x, \Lambda y) = (x, y)$ para todos los x e $y \in H_1$. Un tal Λ es un isomorfismo (o, más específicamente, un *isomorfismo de espacio de Hilbert)* de H_1 sobre H_2. Utilizando esta terminología, los teoremas 4.2.5 y 4.2.6 proporcionan el siguiente enunciado:

Si $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ es un conjunto ortonormal maximal en un espacio de Hilbert H, y si $\hat{x}(\alpha) = (x, u_\alpha)$, la aplicación $x \to \hat{x}$ es un isomorfismo de espacio de Hilbert de H sobre $\ell^2(A)$.

Se puede demostrar (aunque lo omitiremos) que $\ell^2(A)$ y $\ell^2(B)$ son isomorfos si, y sólo si, los conjuntos A y B tienen el mismo cardinal. Pero demostraremos que todo espacio de Hilbert no trivial (lo que significa que el espacio no consta sólo del cero) es isomorfo a algún $\ell^2(A)$, probando que cada uno de tales espacios contiene un conjunto ortonormal maximal (teorema 4.2.10). La demostración dependerá de una propiedad de los conjuntos parcialmente ordenados que es equivalente al axioma de elección.

4.2.8. Conjuntos parcialmente ordenados. Un conjunto $\mathfrak{P}$ se dice que está *parcialmente ordenado* por una relación binaria $\leqslant$ si

a) $a \leqslant b$ y $b \leqslant c$ implica $a \leqslant c$.
b) $a \leqslant a$ para todo $a \in \mathfrak{P}$.
c) $a \leqslant b$ y $b \leqslant a$ implica $a = b$.

Un subconjunto $\mathfrak{Q}$ de un conjunto $\mathfrak{P}$ parcialmente ordenado se dice *totalmente ordenado* (o *linealmente ordenado)* si toda pareja $a, b \in \mathfrak{Q}$ verifica que o bien $a \leqslant b$ o $b \leqslant a$.

Por ejemplo, toda colección de subconjuntos de un conjunto dado está parcialmente ordenado mediante la relación de inclusión $\subset$.

Para dar un ejemplo más específico, sea $\mathfrak{P}$ la colección de todos los subconjuntos abiertos del plano, ordenada parcialmente por la inclusión de conjuntos, y sea $\mathfrak{Q}$ la colección de todos los discos circulares abiertos con centro en el origen. Entonces $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ está totalmente ordenada por $\subset$, y $\mathfrak{Q}$ es un conjunto maximal totalmente ordenado de $\mathfrak{P}$. Esto significa que si cualquier elemento de $\mathfrak{P}$ que no esté en $\mathfrak{Q}$ se añade a $\mathfrak{Q}$, la colección de conjuntos resultante ya no está totalmente ordenada por $\subset$.

4.2.9. El teorema de maximalidad de Hausdorff. *Todo conjunto no vacío parcialmente ordenado contiene un subconjunto maximal totalmente ordenado.*

Esto es una consecuencia del axioma de elección y es, de hecho, equivalente a él; otra forma (muy semejante) de él se conoce como el lema de Zorn. Damos la demostración en el apéndice.

Entonces si H es un espacio de Hilbert no trivial, existe un $u \in H$ con $\|u\| = 1$, de modo que existe un conjunto ortonormal no vacío en H. La existencia de un conjunto maximal ortonormal es, por tanto, una consecuencia del teorema siguiente:

4.2.10. Teorema. *Todo conjunto ortonormal B en un espacio de Hilbert H está contenido en un conjunto maximal ortonormal de H.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathfrak{P}$ la clase de todos los conjuntos ortonormales en H que contiene al conjunto dado B. Ordenemos parcialmente $\mathfrak{P}$ por inclusión. Como $B \in \mathfrak{P}$, $\mathfrak{P} \neq \emptyset$. Por tanto, $\mathfrak{P}$ contiene una clase maximal totalmente ordenada Ω. Sea S la unión de todos los elementos de Ω. Es claro que $B \subset S$. Pretendemos demostrar que S es un conjunto ortonormal maximal:

Si u_1 y $u_2 \in S$, entonces $u_1 \in A_2$ y $u_2 \in A_2$ para ciertos A_1 y $A_2 \in \Omega$. Como Ω está totalmente ordenado, $A_1 \subset A_2$ (o $A_2 \subset A_1$), así que $u_1 \in A_2$ y $u_2 \in A_2$. Como A_2 es ortonormal, $(u_1, u_2) = 0$ si $u_1 \neq u_2$, $(u_1, u_2) = 1$ si $u_1 = u_2$. S es, pues, un conjunto ortonormal.

Supongamos que S no es maximal. Entonces S es un subconjunto propio de un conjunto ortonormal S^*. Es claro que $S^* \notin \Omega$, y que S^* contiene todos los elementos de Ω. En consecuencia, podemos añadir S^* a Ω y tener aún un orden total. Esto contradice la maximalidad de Ω. ////

4.3. SERIES TRIGONOMETRICAS

4.3.1. Definiciones. Sea T la circunferencia unidad en el plano complejo, es decir, el conjunto de números complejos cuyo valor absoluto es uno. Si F es una función cualquiera sobre T y f se define sobre R^1 mediante

$$f(t) = F(e^{it}), \tag{4.37}$$

entonces f es una función periódica de periodo 2π. Esto significa que $f(t+2\pi) = f(t)$ para todo t real. Recíprocamente, si f es una función sobre R^1, con periodo 2π, existe una función F sobre T tal que se verifica [4.37]. Podemos identificar, pues, funciones sobre T con funciones sobre R^1 de periodo 2π, y, por simplicidad de notación, escribiremos a veces $f(t)$ en lugar de $f(e^{it})$ aún pensando en f como definida sobre T.

Teniendo presentes estos convenios, definimos $L^p(T)$, para $1 \leqslant p < \infty$, como la clase de todas las funciones complejas, Lebesgue medibles y de periodo 2π sobre R^1 para las que la norma

$$\|f\|_p = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \, dt \right\}^{1/p} \tag{4.38}$$

es finita.

En otras palabras, consideramos $L^p(\mu)$, donde μ es la medida de Lebesgue sobre $[0, 2\pi]$ (o sobre T), dividida por 2π. $L^\infty(T)$ será la clase de los elementos de periodo 2π de $L^\infty(R^1)$, con la norma del supremo esencial, y $C(T)$ consta de todas las funciones complejas continuas sobre T (o, lo que es equivalente, de todas las funciones complejas continuas de periodo 2π sobre R^1), con norma

$$\|f\|_\infty = \sup_t |f(t)|. \tag{4.39}$$

El factor $1/(2\pi)$ en [4.38] simplifica el formalismo que vamos a desarrollar. Por ejemplo, la norma L^p de la función constante 1 es 1.

Un *polinomio trigonométrico* es una suma finita de la forma

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt) \quad (t \in R^1) \tag{4.40}$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_N$ y $b_1, \ldots, b_N$ son números complejos. Teniendo en cuenta las identidades de Euler, [4.40] puede también escribirse en la forma

$$f(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int} \qquad [4.41]$$

que resulta más conveniente para muchos propósitos. Es claro que todo polinomio trigonométrico tiene periodo 2π.

Llamaremos Z al conjunto de todos los enteros (positivos, cero y negativos), y pondremos

$$u_n(t) = e^{int} \qquad (n \in Z). \qquad [4.42]$$

Si definimos el producto interior en $L^2(T)$ mediante

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\, dt \qquad [4.43]$$

(nótese que esto concuerda con [4.38]), un cálculo fácil muestra que

$$(u_n, u_m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t}\, dt = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m. \end{cases} \qquad [4.44]$$

Entonces $\{u_n : n \in Z\}$ es un conjunto ortonormal en $L^2(T)$, habitualmente llamado *sistema trigonométrico*. Demostraremos ahora que este sistema es maximal, y obtendremos entonces versiones concretas de los teoremas abstractos deducidos previamente en el contexto del espacio de Hilbert.

4.3.2. La completitud del sistema trigonométrico. El teorema 4.2.6 muestra que la maximalidad (o completitud) del sistema trigonométrico estará demostrada tan pronto como podamos probar que el conjunto de todos los polinomios trigonométricos es denso en $L^2(T)$. Como $C(T)$ es denso en $L^2(T)$, por el teorema 3.3.1 (nótese que T es compacto), basta demostrar que para cada $f \in C(T)$ y cada $\epsilon > 0$ existe un polinomio trigonométrico P tal que $\|f - P\|_2 < \epsilon$. Como $\|g\|_2 \leqslant \|g\|_\infty$ para toda $g \in C(T)$, la estimación $\|f - P\|_2 < \epsilon$ se verificará si $\|f - P\|_\infty < \epsilon$ y, por ello, obtendremos esta estimación a continuación.

Supongamos que tuviéramos polinomios trigonométricos $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$, con las propiedades siguientes:

a)

$$Q_k(t) \geqslant 0 \quad \text{para} \quad t \in R^1.$$

b)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_k(t)\, dt = 1.$$

c) Si $\eta_k(\delta) = \sup\{Q_k(t) : \delta \leqslant |t| \leqslant \pi\}$, *entonces*

$$\lim_{n \to \infty} \eta_k(\delta) = 0$$

para todo $\delta > 0$.

Otra forma de establecer *c)* es la siguiente: Para cada $\delta > 0$, $Q_k(t) \to 0$ uniformemente en $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$.

A cada $f \in C(T)$ asociamos las funciones P_k definidas mediante

$$P_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s) Q_k(s)\, ds \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{4.45}$$

Si cambiamos s por $-s$ y a continuación por $s-t$, la periodicidad de f y Q_k muestra que el valor de la integral no varía. En consecuencia:

$$P_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) Q_k(t-s)\, ds \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{4.46}$$

Como cada Q_k es un polinomio trigonométrico, Q_k es de la forma

$$Q_k(t) = \sum_{n=-N_k}^{N_k} a_{n,k}\, e^{int} \tag{4.47}$$

y si cambiamos t por $t-s$ en [4.47] y sustituimos el resultado en [4.46], vemos que cada P_k es un polinomio trigonométrico.

Sea $\epsilon > 0$ un número dado. Como f es uniformemente continua sobre T, existe un $\delta > 0$ tal que $|f(t) - f(s)| < \epsilon$ si $|t-s| < \delta$. Por *b)*, tenemos

$$P_k(t) - f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t-s) - f(t)| Q_k(s)\, ds,$$

y *a)* implica, para todo t, que

$$|P_k(t) - f(t)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t-s) - f(t)| Q_k(s)\, ds = A_1 + A_2,$$

donde A_1 es la integral sobre $[-\delta, \delta]$ y A_2 es la integral sobre $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$. En A_2, el integrando es menor que $\epsilon Q_k(s)$, por lo que $A_1 < \epsilon$, por *b)*. En A_2, tenemos $Q_k(s) \leqslant \eta_k(\delta)$, y, por tanto,

$$A_2 \leqslant 2\|f\|_\infty \cdot \eta_k(\delta) < \epsilon \tag{4.48}$$

para k suficientemente grande, debido a *c)*. Como estas estimaciones son independientes de t, hemos demostrado que

$$\lim_{k \to \infty} \|f - P_k\|_\infty = 0. \tag{4.49}$$

Quedan por construir los Q_k. Esto puede hacerse de muchas maneras. He aquí una forma simple. Pongamos

$$Q_k(t) = c_k \left\{ \frac{1 + \cos t}{2} \right\}^k, \tag{4.50}$$

donde c_k se elige de tal manera que se verifica *b)*. Como es claro que se verifica *a)*, necesitamos sólo probar *c)*. Como Q_k es par, *b)* muestra que

$$1 = \frac{c_k}{\pi} \int_0^{\pi} \left\{ \frac{1 + \cos t}{2} \right\}^k dt > \frac{c_k}{\pi} \int_0^{\pi} \left\{ \frac{1 + \cos t}{2} \right\}^k \operatorname{sen} t\, dt = \frac{2c_k}{\pi(k+1)}.$$

Puesto que Q_k es decreciente en $[0, \pi]$, se deduce que

$$Q_k(t) \leqslant Q_k(\delta) \leqslant \frac{\pi(k+1)}{2}\left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)^k \quad (0 < \delta \leqslant |t| \leqslant \pi). \qquad [4.51]$$

Esto implica *c)*, ya que $1+\cos\delta < 2$ si $0 < \delta \leqslant \pi$.

Hemos demostrado el importante resultado siguiente:

4.3.3. Teorema. *Si $f \in C(T)$ y $\epsilon > 0$, existe un polinomio trigonométrico P tal que*

$$|f(t) - P(t)| < \epsilon$$

para todo real t.

Un resultado más preciso fue demostrado por FEJÉR (1904): *Las medias aritméticas de las sumas parciales de la serie de Fourier de cualquier función $f \in C(T)$ convergen uniformemente a f.* Para una demostración (análoga a la anterior) véase el teorema 8.15 de [26].

4.3.4. Series de Fourier. Para cualquier $f \in L^1(T)$, definimos sus *coeficientes de Fourier* mediante la fórmula

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt \qquad (n \in Z), \qquad [4.52]$$

donde, recordamos, Z es el conjunto de todos los enteros. Asociamos entonces a cada $f \in L^1(T)$ una función $\hat{f}$ sobre Z. La *serie de Fourier* de f es

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\, e^{int}, \qquad [4.53]$$

y sus *sumas parciales* son

$$s_N(t) = \sum_{-N}^{N} \hat{f}(n)\, e^{int} \qquad (N = 0, 1, 2, \ldots). \qquad [4.54]$$

Como $L^2(T) \subset L^1(T)$, [4.52] puede aplicarse a toda $f \in L^2(T)$. Comparando las definiciones hechas en los apartados 4.2.1 y 4.3.1, podemos reformular los teoremas 4.2.5 y 4.2.6 en términos concretos:

El *teorema de Riesz-Fischer* afirma que si $\{c_n\}$ es una sucesión de números complejos tales que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty, \qquad [4.55]$$

entonces existe una $f \in L^2(T)$ tal que

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt \qquad (n \in Z). \qquad [4.56]$$

El *teorema de Parseval* afirma que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt \qquad [4.57]$$

si $f \in L^2(T)$ y $g \in L^2(T)$; la serie del primer miembro de [4.57] converge absolutamente; y si s_N es como en [4.54], entonces

$$\lim_{N\to\infty} \|f - s_N\|_2 = 0, \qquad [4.58]$$

porque se verifica un caso especial de [4.57]:

$$\|f - s_N\|_2^2 = \sum_{|n|>N} |\hat{f}(n)|^2. \qquad [4.59]$$

Nótese que [4.58] dice que toda $f \in L^2(T)$ es el límite en L^2 de las sumas parciales de su serie de Fourier; es decir, la serie de Fourier de f converge a f en el sentido de L^2. La convergencia puntual presenta un problema más delicado, como veremos en el capítulo 5.

El teorema de Riesz-Fischer y el teorema de Parseval pueden resumirse diciendo que la aplicación $f \to \hat{f}$ es un isomorfismo de espacio de Hilbert de $L^2(T)$ sobre $\ell^2(Z)$.

La teoría de las series de Fourier en otros espacios de funciones, como, por ejemplo, en $L^1(T)$, es mucho más difícil que en $L^2(T)$, y sólo tocaremos algunos aspectos de ella.

Obsérvese que el ingrediente crucial en la demostración del teorema de Riesz-Fischer es el hecho de que L^2 es completo. Este hecho está tan bien aceptado que el nombre «teorema de Riesz-Fischer» se da a veces al teorema que afirma que L^2, o incluso cualquier L^p, es completo.

EJERCICIOS

En este conjunto de ejercicios, H denotará siempre un espacio de Hilbert.

1. Si M es un subespacio cerrado de H, demuéstrese que $M=(M^\perp)^\perp$. ¿Existe alguna afirmación análoga cierta para subespacios M que no son necesariamente cerrados?

2. Para $n=1, 2, 3, \ldots$, sea $\{v_n\}$ un conjunto independiente de vectores en H. Desarróllese un proceso *constructivo* que genere un conjunto ortonormal $\{u_n\}$, tal que u_n sea una combinación lineal de $v_1, \ldots, v_n$. Nótese que esto conduce a una demostración de la existencia de un conjunto ortonormal maximal en espacios de Hilbert separables, la cual no hace referencia al principio de maximalidad de Hausdorff. (Un espacio es *separable* si contiene un subconjunto denso numerable.)

3. Demuéstrese que $L^p(T)$ es separable si $1 \leqslant p < \infty$, pero que $L^\infty(T)$ no es separable.

4. Demuéstrese que H es separable si, y sólo si, H contiene un sistema ortonormal maximal que sea a lo sumo numerable.

5. Si $M=\{x : Lx=0\}$, donde L es un funcional lineal continuo sobre H, pruébese que $M^\perp$ es un espacio vectorial de dimensión 1 (a menos que $M=H$).

6. Sea $\{u_n\}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ un conjunto ortonormal en H. Demuéstrese que proporciona un ejemplo de conjunto cerrado y acotado que no es compacto. Sea Q el conjunto de $x \in H$ de la forma

$$x=\sum_1^\infty c_n u_n \quad (\text{donde } |c_n| \leqslant 1/n).$$

Demuéstrese que Q es compacto. (Q se llama el cubo de Hilbert.)

De manera más general, sea $\{\delta_n\}$ una sucesión de números positivos, y sea S el conjunto de todos los $x \in X$ de la forma

$$x=\sum_1^\infty c_n u_n \quad (\text{donde } |c_n| \leqslant \delta_n).$$

Demuéstrese que S es compacto si, y sólo si, $\Sigma_1^\infty \delta_n^2 < \infty$.

Demuéstrese que H no es localmente compacto.

7. Supongamos que $\{a_n\}$ es una sucesión de números positivos tales que $\Sigma a_n b_n < \infty$ si $b_n \geqslant 0$ y $\Sigma b_n^2 < \infty$. Demuéstrese que $\Sigma a_n^2 < \infty$.

8. Si H_1 y H_2 son dos espacios de Hilbert, demuéstrese que uno de ellos es isomorfo a un subespacio del otro. (Nótese que todo subespacio cerrado de un espacio de Hilbert es un espacio de Hilbert.)

9. Si $A \subset [0, 2\pi]$ y A es medible, demuéstrese que

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \cos nx\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_A \operatorname{sen} nx\, dx = 0.$$

10. Sean $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ enteros positivos, y sea E el conjunto de todos los $x \in [0, 2\pi]$ en los que $\{\operatorname{sen} n_k x\}$ converge. Demuéstrese que $m(E)=0$.

Sugerencia: $2 \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$, por lo que $\operatorname{sen} n_k x \to \pm 1/\sqrt{2}$ en c.t.p. de E, por el ejercicio 9.

11. Demuéstrese que la identidad

$$4(x, y) = \|x+y\|^2 \|x-y\|^2 + i\,\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2$$

es válida en todo espacio con producto interior, y pruébese que demuestra la implicación *c)* $\to$ *d)* del teorema 4.2.6.

12. Se demostró que las constantes c_k en el apartado 4.3.2 eran tales que $k^{-1}c_k$ estaba acotado. Estímese más precisamente la integral pertinente y obténgase que

$$0 < \lim_{k\to\infty} k^{-1/2} c_k < \infty.$$

13. Supóngase que f es una función continua sobre R^1, con periodo 1. Demuéstrese que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n\alpha) = \int_0^1 f(t)\, dt$$

para todo número real irracional α.

Sugerencia: Hágase primero para

$$f(t) = \exp(2\pi i k t), \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

14. Calcúlese

$$\min_{a,b,c} \int_{-1}^{1} |x^3-a-bx-cx^2|^2\,dx$$

y obténgase

$$\max \int_{-1}^{1} x^3 g(x)\,dx,$$

donde g está sometida a las restricciones

$$\int_{-1}^{1} g(x)\,dx = \int_{-1}^{1} xg(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x^2 g(x)\,dx = 0; \qquad \int_{-1}^{1} |g(x)|^2\,dx = 1.$$

15. Calcúlese

$$\min_{a,b,c} \int_{0}^{\infty} |x^3-a+bx-cx^2|^2 e^{-x}\,dx.$$

Establézcase y resuélvase el correspondiente problema de máximo, como en el ejercicio 14.

16. Si $x_0 \in H$ y M es un subespacio vectorial cerrado de H, demuéstrese que

$$\min\{\|x-x_0\| : x \in M\} = \max\{|(x_0, y)| : y \in M^{\perp},\ \|y\|=1\}.$$

17. Demuéstrese que existe una aplicación continua uno a uno γ de $[0, 1]$ en H tal que $\gamma(b)-\gamma(a)$ es ortogonal a $\gamma(d)-\gamma(c)$ si $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant 1$ (γ podría llamarse una «curva con incrementos ortogonales»).

Sugerencia: Tómese $H=L^2$, y considérense funciones características de ciertos subconjuntos de $[0, 1]$.

18. Dese una demostración directa del teorema 4.2.4, es decir, una que no dependa de las consideraciones más generales del apartado 4.2.3.

19. Defínase $u_s(t)=e^{ist}$ para todo $s \in R^1$, $t \in R^1$. Sea X el espacio vectorial complejo que consiste en todas las combinaciones lineales finitas de esstas funciones u_s. Si $f \in X$ y $g \in X$, demuéstrese que existe

$$(f, g) = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^{A} f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

Demuéstrese que este producto interior convierte a X en un espacio unitario cuya compleción es un espacio de Hilbert no separable H. Demuéstrese también que $\{u_s : s \in R^1\}$ es un conjunto ortonormal maximal en H.

EJEMPLOS DE TECNICAS DE ESPACIOS DE BANACH

5.1. ESPACIOS DE BANACH

En el capítulo precedente vimos cómo pueden hacerse surgir, de consideciones esencialmente geométricas en espacios de Hilbert generales, ciertos hechos analíticos sobre series trigonométricas, relacionando las nociones de convexidad, subespacios, ortogonalidad y completitud. Hay muchos problemas en análisis que pueden atacarse con mayor facilidad cuando se sitúan dentro de un marco abstracto convenientemente elegido. La teoría de espacios de Hilbert no es siempre conveniente, porque la ortogonalidad es algo bastante especial. La clase de los espacios de Banach permite una mayor variedad. En este capítulo desarrollaremos algunas de las propiedades básicas de los espacios de Banach y las ilustraremos mediante aplicaciones a problemas concretos.

5.1.1. Definición. Un espacio vectorial complejo se llama *espacio vectorial normado* si a cada $x \in X$ está asociado un número real no negativo $\|x\|$, llamado la *norma* de x, tal que

a) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ para todo x e $y \in X$.
b) $\|\alpha x\| = |\alpha|\ \|x\|$ si $x \in X$ y α es un escalar.
c) $\|x\| = 0$ implica $x = 0$.

Por *a)*, se verifica la desigualdad triangular

$$\|x+y\| \leqslant \|x-z\| + \|z-y\| \qquad (x, y, z \in X)$$

Combinada con *b)* (tomando $\alpha = 0$, $\alpha = -1$) y *c)* muestra que todo espacio vectorial normado puede ser considerado como un espacio métrico, donde la distancia entre x e y es $\|x-y\|$.

Un espacio de Banach es un espacio vectorial normado que es completo en la métrica definida por su norma.

Por ejemplo, todo espacio de Hilbert es un espacio de Banach, y, por tanto, lo es todo $L^p(\mu)$ normado mediante $\|f\|_p$ (si identificamos las funciones que son iguales en c.t.p.) si $1 \leqslant p \leqslant \infty$, y también lo es $C_0(X)$ con la norma del supremo. El espacio de Banach más simple es, por supuesto, el mismo cuerpo complejo normado mediante $\|x\| = |x|$.

Igualmente bien pueden discutirse los espacios de Banach *reales;* la definición es exactamente la misma, salvo que los escalares se suponen reales.

5.1.2. Definición. Consideremos una transformación lineal Λ de un espacio vectorial normado X en otro espacio vectorial normado Y, y definamos su norma mediante

$$\|\Lambda\| = \sup\left\{\frac{\|\Lambda x\|}{\|x\|} : x \in X,\ x \neq 0\right\}. \qquad [5.1]$$

Si $\|\Lambda\| < \infty$, entonces Λ se llama una *transformación lineal acotada.*

En [5.1], $\|x\|$ es la norma de $\|x\|$ en X, $\|\Lambda x\|$ es la norma de Λx en Y; sucederá frecuentemente que varias normas aparezcan juntas y será el contexto el que aclarará cuál es cuál.

Obsérvese que en [5.1] podríamos restringirnos a *vectores unitarios* x, es decir, a x con $\|x\| = 1$, sin cambiar el supremo, puesto que

$$\|\Lambda(\alpha x)\| = \|\alpha \Lambda x\| = |\alpha|\ \|\Lambda x\|. \qquad [5.2]$$

Obsérvese que $\|\Lambda\|$ es el menor número tal que la desigualdad

$$\|\Lambda x\| \leqslant \|\Lambda\|\ \|x\| \qquad [5.3]$$

se verifica para todo $x \in X$.

La siguiente representación geométrica es de utilidad: Λ transforma la *bola unidad cerrada* de X, es decir, el conjunto

$$\{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}, \qquad [5.4]$$

en la bola cerrada en Y de centro en 0 y radio $\|\Lambda\|$.

Un caso especial importante se obtiene tomando como Y el cuerpo complejo; en este caso hablamos de *funcionales lineales acotados.*

5.1.3. Teorema. *Para una transformación lineal Λ de un espacio vectorial normado X en un espacio vectorial normado Y, cada una de las siguientes tres condiciones implica las otras dos:*

a) *Λ es acotada.*
b) *Λ es continua.*
c) *Λ es continua en un punto de X.*

Demostración. Como $\|\Lambda(x_1 - x_2)\| \leqslant \|\Lambda\|\ \|x_1 - x_2\|$, es claro que *a)* implica *b)*, y *b)* implica *c)* trivialmente. Supongamos que Λ es continua en x_0. Para cada $\epsilon > 0$ se puede entonces obtener un $\delta > 0$ de modo que $\|x - x_0\| < \delta$ implica $\|\Lambda x - \Lambda x_0\| < \epsilon$. En otras palabras, $\|x\| < \delta$ implica

$$\Lambda(x_0 + x) - \Lambda(x_0)\| < \epsilon.$$

Pero entonces la linealidad de Λ muestra que $\|\Lambda x\| < \epsilon$. Por tanto, $\|\Lambda\| \leqslant \epsilon/\delta$, y *c)* implica *a).* ////

5.2. CONSECUENCIAS DEL TEOREMA DE BAIRE

La forma en que se explota frecuentemente el que un espacio de Banach es completo, depende del siguiente teorema sobre espacios métricos completos, que tiene también otras muchas aplicaciones en otras partes de las matemáticas. Implica dos de los tres teoremas más importantes que hacen de los espacios de Banach herramientas útiles en análisis, el *teorema de Banach-Steinhaus* y el *teorema de la aplicación abierta.* El tercero es el *teorema de extensión de Hahn-Banach,* en el cual el hecho de que el espacio en cuestión sea completo no desempeña ningún papel.

5.2.1. Teorema de Baire. *Si X es un espacio métrico completo, la intersección de toda colección numerable de subconjuntos abiertos densos de X es densa en X.*

En particular (excepto en el caso trivial $X=\emptyset$), la intersección es no vacía. Este es, a menudo, el significado principal del teorema.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que V_1, V_2, V_3, ... son abiertos y densos en X. Sea W cualquier conjunto abierto en X. Tenemos que demostrar que $\cap V_n$ tiene un punto en W si $W \neq \emptyset$.

Sea ρ la métrica de X; escribamos

$$S(x, r)=\{y \in X: \rho(x, y) < r\} \qquad [5.5]$$

y sea $\bar{S}(x, r)$ la adherencia de $S(x, r)$.

NOTA: Existen situaciones en las que $\bar{S}(x, r)$ no contiene a todos los y tales que $\rho(x, y)=r$.

Como V_1 es denso, $W \cap V_1$ es un conjunto abierto no vacío, y podemos, por tanto, encontrar x_1 y r_1 tales que

$$\bar{S}(x_1, r_1) \subset W \cap V_1 \quad \text{y} \quad 0 < r_1 < 1. \qquad [5.6]$$

Si $n \geqslant 2$ y se escogen x_{n-1} y r_{n-1}, la densidad de V_n muestra que $V_n \cap S(x_{n-1}, r_{n-1})$ es no vacío, y podemos, así, encontrar x_n y r_n tales que

$$\bar{S}(x_n, r_n) \subset V_n \cap S(x_{n-1}, r_{n-1}) \quad \text{y} \quad 0 < r_n < \frac{1}{n}. \qquad [5.7]$$

Por inducción, este proceso genera una sucesión $\{x_n\}$ en X. Si $i > n$ y $j > n$, la construcción muestra que x_i y x_j están ambos en $S(x_n, r_n)$, de modo que $\rho(x_i, x_j) < 2r_n < 2/n$, y en consecuencia $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Como X es completo, existe un punto $x \in X$ tal que $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Como x_i está en el conjunto cerrado $\bar{S}(x_n, r_n)$ si $i > n$, se deduce que x está en cada $\bar{S}(x_n, r_n)$, y [5.7] demuestra que x está en cada V_n. Por [5.6], $x \in W$. Esto completa la demostración. ////

Corolario. *En un espacio métrico completo, la intersección de cualquier colección numerable de conjuntos G_δ densos es también un conjunto G_δ denso.*

Esto se deduce del teorema, puesto que cada G_δ es la intersección de una colección numerable de conjuntos abiertos, y la unión numerable de conjuntos numerables también es numerable.

5.2.2. Comentario. El teorema de Baire se llama a veces el *teorema de categoría,* por la razón siguiente.

Llamamos a un conjunto $E \subset X$ *diseminado* si su adherencia $\bar{E}$ no contiene ningún subconjunto abierto no vacío de X. Cualquier unión numerable de conjuntos diseminados se dice un conjunto de *primera categoría;* todos los otros subconjuntos de X son de *segunda categoría* (terminología de Baire). El teorema 5.2.1 es equivalente al resultado de que *ningún espacio métrico completo es de primera categoría.* Para ver esto, tómense complementarios en el enunciado del teorema 5.2.1.

5.2.3. El teorema de Banach-Steinhaus. *Supongamos que X es un espacio de Banach, que Y es un espacio vectorial normado, y $\{\Lambda_\alpha\}$ es una colección de transformaciones lineales acotadas de X en Y, donde α recorre algún conjunto de índices A. Entonces, o bien existe un $M < \infty$ tal que*

$$\|\Lambda_\alpha\| \leqslant M \qquad [5.8]$$

para todo $\alpha \in A$, o

$$\sup_{\alpha \in A} \|\Lambda_\alpha x\| = \infty \qquad [5.9]$$

para todo x que pertenezca a algún G_δ denso en X.

En terminología geométrica, las alternativas son las siguientes: *o* existe una bola B en Y (con radio M y centro 0) tal que todo Λ_α aplica la bola unidad de X en B, o existe $x \in X$ (de hecho, todo un G_δ denso de ellos) tal que ninguna bola en Y contiene a $\Lambda_\alpha x$ para todo α.

El teorema se conoce a veces como el *principio de la acotación uniforme.*

DEMOSTRACIÓN. Pongamos

$$\varphi(x) = \sup_{\alpha \in A} \|\Lambda_\alpha x\| \qquad (x \in X) \qquad [5.10]$$

y sea

$$V_n = \{x : \varphi(x) > n\} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \qquad [5.11]$$

Como cada Λ_α es continua y la norma de Y es una función continua sobre Y (una consecuencia inmediata de la desigualdad triangular, como en la demostración del teorema 4.1.6), cada función $x \to \|\Lambda_\alpha x\|$ es continua sobre X. En consecuencia, φ es semicontinua inferiormente, y cada V_n es abierto.

Si uno de estos conjuntos, digamos V_N, no es denso en X, entonces existe un $x_0 \in X$ y un $r > 0$ tales que $\|x\| \leqslant r$ implica $x_0 + x \notin V$; esto significa que $\varphi(x_0 + x) \leqslant N$, o

$$\|\Lambda_\alpha(x_0 + x)\| \leqslant N \qquad [5.12]$$

para todo $\alpha \in A$ y todo x con $\|x\| \leqslant r$. Como $x = (x_0 + x) - x_0$, tenemos entonces

$$\|\Lambda_\alpha\| \leqslant \|\Lambda_\alpha(x_0 + x)\| + \|\Lambda_\alpha x_0\| \leqslant 2N, \qquad [5.13]$$

y se obtiene [5.5] con $M = 2N/r$.

La otra posibilidad es que cada V_n sea denso en X. En ese caso, $\bigcap V_n$ es un G_δ denso en X, por el teorema de Baire; como $\varphi(x)=\infty$ para todo $x \in \bigcap V_n$, la demostración está completa. ////

5.2.4. El teorema de la aplicación abierta. *Sean U y V las bolas unidad abiertas de los espacios de Banach X e Y. A toda transformación lineal acotada Λ de X sobre Y le corresponde un $\delta > 0$ de modo que*

$$\Lambda(U) \supset \delta V \qquad [5.14]$$

Nótese la palabra «sobre» en la hipótesis. El símbolo δV significa el conjunto $\{\delta y : y \in V\}$, es decir, el conjunto de todos los $y \in Y$ con $\|y\| < \delta$.

Se deduce de [5.14] y de la linealidad de Λ que la imagen de toda bola abierta en X con centro en x_0, por ejemplo, contiene una bola abierta en Y con centro en Λx_0. En consecuencia, la imagen de todo conjunto abierto es abierta. Esto explica el nombre del teorema.

He aquí otra manera de establecer [5.5]: *A todo y con $\|y\| < \delta$ le corresponde un x con $\|x\| < 1$ tal que $\Lambda x = y$.*

Demostración. Dado $y \in Y$, existe un $x \in X$ tal que $\Lambda x = y$; si $\|x\| < k$, se tiene que $y \in \Lambda(kU)$. Por tanto, Y es la unión de los conjuntos $\Lambda(kU)$, para $k = 1, 2, 3, \ldots$ Como Y es completo, el teorema de Baire implica que existe un conjunto abierto no vacío W en la adherencia de algún $\Lambda(kU)$. Esto significa que todo punto de W es el límite de una sucesión $\{\Lambda x_i\}$, donde $x_i \in kU$; de ahora en adelante, k y W serán fijos.

Tomemos $y_0 \in W$ y $\eta > 0$ de modo que $y_0 + y \in W$ si $\|y\| < \eta$. Para uno cualquiera de esos y existen sucesiones $\{x_i'\}$, $\{x_i''\}$ en kU tales que

$$\Lambda x_i' \to y_0, \qquad \Lambda x_i'' \to y_0 + y \qquad (i \to \infty). \qquad [5.15]$$

Haciendo $x_i = x_i'' - x_i'$, tenemos $\|x_i\| < 2k$ y $\Lambda x_i \to y$. Como esto se verifica para todo y con $\|y\| < \eta$, la linealidad de Λ muestra que se verifica lo siguiente, si $\delta = \eta/2k$:

A todo $y \in Y$ y todo $\epsilon > 0$ le corresponde un $x \in X$ tal que

$$\|x\| \leqslant \delta^{-1}\|y\| \quad y \quad \|y - \Lambda x\| < \epsilon. \qquad [5.16]$$

Esta es casi la conclusión deseada, como se enunció antes de comenzar la demostración, salvo que allí se tenía $\epsilon = 0$.

Fijemos $y \in \delta V$, y $\epsilon > 0$. Por [5.16] existe un x_1 con $\|x_1\| < 1$ y

$$\|y - \Lambda x_1\| < \frac{1}{2}\delta\epsilon \qquad [5.17]$$

Supongamos que se eligen $x_1, \ldots, x_n$ de modo que

$$\|y - \Lambda x_1 - \ldots - \Lambda x_n\| < 2^{-n}\delta\epsilon. \qquad [5.18]$$

Utilizando [5.16] cambiando y por el vector del primer miembro de [5.18], obtenemos un x_{n+1} de modo que [5.18] se verifica con $n+1$ en lugar de n, y

$$\|x_{n+1}\| < 2^{-n}\epsilon \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \qquad [5.19]$$

Si hacemos $s_n = x_1 + \ldots + x_n$, [5.19] muestra que $\{s_n\}$ es una sucesión de Cauchy en X. Como X es completo, existe un $x \in X$ de manera que $s_n \to x$. La desigualdad $\|x_1\| < 1$, junto con [5.19], muestra que $\|x\| < 1 + \epsilon$. Como Λ es continua, $\Lambda s_n \to \Lambda x$. Por [5.18], $\Lambda s_n \to y$. Por tanto, $\Lambda x = y$.

Hemos demostrado, pues, que

$$\Lambda((1+\epsilon)U) \supset \delta V \qquad [5.20]$$

o

$$\Lambda(U) \supset (1+\epsilon)^{-1}\,\delta V, \qquad [5.21]$$

para todo $\epsilon > 0$. La unión de los conjuntos del segundo miembro de [5.21], tomada sobre todos los $\epsilon > 0$, es δV. Esto demuestra [5.14]. ////

5.2.5. Teorema. *Si X e Y son espacios de Banach y Λ es una transformación lineal acotada de X sobre Y que es también uno a uno, existe un $\delta > 0$ tal que*

$$\|\Lambda x\| \geqslant \delta \|x\| \qquad (x \in X). \qquad [5.22]$$

En otras palabras, Λ^{-1} et una transformación lineal acotada de Y sobre X.

DEMOSTRACIÓN. Si se elige δ como en el enunciado del teorema 5.2.4, la conclusión de ese teorema, junto con el hecho de que Λ es ahora uno a uno, muestra que $\|\Lambda x\| < \delta$ implica $\|x\| < 1$. Por tanto, $\|x\| \geqslant 1$ implica $\|\Lambda x\| \geqslant \delta$, y [5.22] queda demostrado.

La transformación Λ^{-1} está definida sobre Y mediante la condición de que $\Lambda^{-1}y = x$ si $y = \Lambda x$. Una comprobación trivial muestra que $\Lambda^{-1}y = x$ si $y = \Lambda x$. Una comprobación trivial muestra que Λ^{-1} es lineal, y [5.22] implica que $\|\Lambda^{-1}\| \leqslant 1/\delta$.

5.3. SERIES DE FOURIER DE FUNCIONES CONTINUAS

5.3.1. Un problema de convergencia. *¿Es cierto que para toda $f \in C(T)$ la serie de Fourier de f converge a $f(x)$ en todo punto x?*

Recordemos que la n-ésima suma parcial de la serie de Fourier de f en el punto x viene dada por

$$s_n(f;\, x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t)\, dt \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \qquad [5.23]$$

donde

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} \qquad [5.24]$$

Esto se desprende directamente de las fórmulas [4.52] y [4.54].

El problema es determinar si

$$\lim_{n\to\infty} s_n(f;\, x) = f(x) \qquad [5.25]$$

para toda $f \in C(T)$ y todo x real. Ya observamos en el apartado 4.3.4 que las sumas parciales convergen efectivamente a f en la norma L^2, y, en consecuen-

cia, el teorema 3.2.7 implica que cada $f \in L^2(T)$ (y, por tanto, toda $f \in C(T)$) es el límite puntual en c.t.p. de alguna subsucesión de la sucesión total de sumas parciales. Pero esto no responde la presente pregunta.

Veremos que el teorema de Banach-Steinhaus responde la pregunta *negativamente*. Pongamos

$$s^*(f;\, x) = \sup_n |s_n(f;\, x)|. \qquad [5.26]$$

Para comenzar, tomemos $x=0$, y definamos

$$\Lambda_n f = s_n(f;\, 0) \qquad (f \in C(\mathrm{T});\ n=1, 2, 3, \ldots). \qquad [5.27]$$

Sabemos que $C(T)$ es un espacio de Banach, relativo a la norma del supremo $\|f\|_\infty$. Se deduce de [5.23] que cada Λ_n es un funcional lineal acotado sobre $C(T)$, de norma

$$\|\Lambda_n\| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\, dt = \|D_n\|_1. \qquad [5,28]$$

Pretendemos obtener que

$$\|\Lambda_n\| \to \infty \qquad \text{cuando } n \to \infty. \qquad [5.29]$$

Esto se demostrará probando que se verifica la igualdad en [5.28] y que

$$\|D_n\|_1 \to \infty \qquad \text{cuando } n \to \infty. \qquad [5.30]$$

Multipliquemos [5.24] por $e^{it/2}$ y por $e^{-it/2}$ y restemos una de las dos ecuaciones resultantes de la otra, para obtener

$$D_n(t) = \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\operatorname{sen}(t/2)}. \qquad [5.31]$$

Como $|\operatorname{sen} x| \leqslant |x|$ para todo x real, muestra que

$$\|D_n\|_1 > \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left|\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right| \frac{dt}{t} = \frac{2}{\pi}\int_0^{(n+1/2)\pi} |\operatorname{sen} t|\, \frac{dt}{t}$$

$$> \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\operatorname{sen} t|\, dt = \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \to \infty,$$

lo que demuestra [5.30].

A continuación, fijemos n, y pongamos $g(t)=1$ si $D_n(t) \geqslant 0$, $g(t)=-1$ si $D_n(t) < 0$. Existen $f_j \in C(T)$ tales que $-1 \leqslant f_j \leqslant 1$ y $f_j(t) \to g(t)$ para todo t, cuando $j \to \infty$. Por el teorema de la convergencia dominada,

$$\lim_{j\to\infty} \Lambda_n(f_j) = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_j(-t) D_n(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(-t) D_n(t)\, dt = \|D_n\|_1.$$

Por tanto, se verifica la igualdad en [5.28] y hemos demostrado [5.29].

Como se verifica la ecuación [5.29], el teorema de Banach-Steinhaus afirma que $s^*(f;\,0)=\infty$ para toda f en algún conjunto G_δ denso en $C(T)$.

Escogemos $x=0$ sólo por conveniencia. Es claro que el mismo resultado se verifica para cualquier otro x:

A cada número real x le corresponde un conjunto $E_x \subset C(T)$ que es un G_δ denso en $C(T)$, tal que $s^*(f;\,x)=\infty$ para toda $f \in E_x$.

En particular, la serie de Fourier de cada $f \in E_x$ diverge en x y tenemos una respuesta negativa a nuestra pregunta.

Es interesante observar que el resultado anterior puede reforzarse mediante otra aplicación del teorema de Baire. Tomemos un conjunto numerable de puntos x_i, y sea E la intersección de los correspondientes conjuntos

$$E_{x_i} \subset C(T).$$

Por el teorema de Baire, E es un G_δ denso en $C(T)$. Toda $f \in E$ es tal que

$$s^*(f;\,x_i)=\infty$$

en todo punto x_i.

Para cada f, $s^*(f;\,x)$ es una función de x semicontinua inferiormente, porque [5.26] la define como el supremo de una colección de funciones continuas. Por tanto, $\{x : s^*(f;\,x)=\infty\}$ es un G_δ en R^1, para cada f. Si los puntos x_i anteriores se toman de tal forma que su unión sea densa en $(-\pi, \pi)$, obtenemos el resultado siguiente:

5.3.2. Teorema. *Existe un conjunto $E \subset C(T)$ que es un G_δ denso en $C(T)$ y que posee la siguiente propiedad: Para cada $f \in E$, el conjunto*

$$Q_f=\{x : s^*(f;\,x)=\infty\}$$

es un G_δ denso en R^1.

El interés de esto es mayor si consideramos que E y cada uno de los Q_f son conjuntos no numerables:

5.3.3. Teorema. *En un espacio métrico completo X que no contiene puntos aislados, ningún conjunto denso numerable es un G_δ.*

DEMOSTRACIÓN. Sean x_k los puntos de un conjunto denso numerable E en X. Supongamos que E es un G_δ. Entonces $E=\bigcap V_n$, donde cada V_n es denso y abierto. Sea

$$W_n=V_n-\bigcup_{k=1}^{n}\{x_n\}$$

Entonces cada W_n es también un conjunto abierto y denso, pero $\bigcap W_n=\phi$, en contradicción con el teorema de Baire. ////

NOTA: Un ligero cambio en la demostración del teorema de Baire muestra efectivamente que todo G_δ denso contiene un conjunto perfecto si X es como anteriormente.

5.4. COEFICIENTES DE FOURIER DE FUNCIONES EN L^1

Como se hizo en el apartado 4.3.4, asociamos a toda $f \in L^1(T)$ una función $\hat{f}$ sobre Z definida mediante

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\, dt \qquad (n \in Z). \tag{5.32}$$

Es fácil demostrar que $\hat{f}(n) \to 0$ cuando $|n| \to \infty$, para toda $f \in L^1$. En efecto, sabemos que $C(T)$ es denso en $L^1(T)$ (teorema 3.3.1) y que los polinomios trigonométricos son densos en $C(T)$ (teorema 4.3.3). Si $\epsilon > 0$ y $f \in L^1(T)$, existe, pues, una $g \in C(T)$ y un polinomio trigonométrico P tales que $\|f-g\|_1 < \epsilon$ y $\|g-P\|_\infty < \epsilon$. Como

$$\|g-P\|_1 \leqslant \|g-P\|_\infty$$

se tiene que $\|f-P\|_1 < 2\epsilon$; y si $|n|$ es suficientemente grande (dependiendo de P), entonces

$$|\hat{f}(n)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{f(t) - P(t)\} e^{-int}\, dt \right| \leqslant \|f-P\|_1 < 2\epsilon. \tag{5.33}$$

Entonces $\hat{f}(n) \to 0$ cuando $n \to \pm\infty$. Este resultado se conoce como el lema de Riemann-Lebesgue.

Nos ocuparemos a continuación de si el recíproco es cierto. Es decir, si $\{a_n\}$ es una sucesión de números complejos tales que $a_n \to 0$ cuando $n \to \pm\infty$; ¿existe alguna $f \in L^1(T)$ tal que $\hat{f}(n) = a_n$ para todo $n \in Z$? En otras palabras, ¿se verifica en esta ocasión algo parecido al teorema de Riesz-Fischer?

Puede fácilmente responderse en forma negativa con ayuda del teorema de la aplicación abierta.

Sea c_0 el espacio de todas las funciones complejas φ sobre Z tales que $\varphi(n) \to 0$ cuando $n \to \pm\infty$, con la norma del supremo,

$$\|\varphi\|_\infty = \sup\{|\varphi(n)| : n \in Z\}. \tag{5.34}$$

Se ve fácilmente que c_0 es un espacio de Banach. De hecho, si consideramos abierto todo subconjunto de Z, éste resulta ser un espacio de Hausdorff localmente compacto, y c_0 es entonces $C_0(Z)$.

El teorema siguiente recoge el resultado anunciado:

5.4.1. Teorema. *La aplicación $f \to \hat{f}$ es una transformación lineal acotada uno a uno de $L^1(T)$ en (pero no sobre) c_0.*

DEMOSTRACIÓN. Definamos Λ mediante $\Lambda f = \hat{f}$. Es claro que Λ es lineal. Acabamos de demostrar que Λ aplica $L^1(T)$ en c_0, y la fórmula [5.32] muestra que $|\hat{f}(n)| \leqslant \|f\|_1$, por lo que $\|\Lambda\| \leqslant 1$. (En realidad $\|\Lambda\| = 1$; para verlo, basta tomar $f = 1$.) Demostremos ahora que Λ es uno a uno. Supongamos $f \in L^1(T)$ y $\hat{f}(n) = 0$ para todo $n \in Z$. Entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, g(t)\, dt = 0 \tag{5.35}$$

si g es un polinomio trigonométrico cualquiera. Por el teorema 4.3.3 y el teorema de la convergencia dominada, la fórmula [5.35] se verifica para toda $g \in C(T)$. Aplicando el teorema de la convergencia dominada una vez más, junto con el corolario del teorema de Lusin, se concluye que [5.35] se verifica si g es la función característica de cualquier conjunto medible en T. El teorema 1.10.5, *b*) muestra que $f=0$ en c.t.p.

Si el recorrido de Λ fuera todo c_0, el teorema 5.2.5 implicaría la existencia de un $\delta > 0$ tal que

$$\|\hat{f}\|_\infty \geqslant \delta \|f\|_1 \qquad [5.36]$$

para toda $f \in L^1(T)$. Pero si se define $D_n(t)$ como en el apartado 5.3.1, $D_n \in L^1(T)$, $\|D_n\|_\infty = 1$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, y $\|D_n\|_1 \to \infty$ cuando $n \to \infty$. En consecuencia, no existe ningún $\delta > 0$ tal que las desigualdades

$$\|\widehat{D}_n\|_\infty \geqslant \delta \|D_n\|_1 \qquad [5.37]$$

se verifiquen para todo n.

Esto completa la demostración. ////

5.5. EL TEOREMA DE HAHN-BANACH

5.5.1. Teorema. *Si M es un subespacio de un espacio vectorial normado X y f es un funcional lineal acotado sobre M, entonces f puede ser extendido como funcional lineal acotado F sobre X de tal manera que $\|F\| = \|f\|$.*

Nótese que M no necesita ser cerrado.

Antes de ocuparse de la demostración, parece indicado hacer algunos comentarios. En primer lugar, decir (en el caso más general) que una función F es una *extensión* de f significa que el dominio de F incluye el de f y que $F(x) = f(x)$ para todo x del dominio de f. En segundo lugar, las normas F y f se calculan con relación a los dominios de F y f; explícitamente,

$$\|f\| = \sup\left\{\frac{|f(x)|}{\|x\|} : x \in M\right\}, \qquad \|F\| = \sup\left\{\frac{|F(x)|}{\|x\|} : x \in X\right\}.$$

El tercer comentario se refiere al cuerpo de escalares. Hasta ahora todo se ha establecido para escalares complejos, pero podría haberse cambiado el cuerpo complejo por el real sin ningún cambio en enunciados o demostraciones. El teorema de Hahn-Banach es también cierto en ambos casos; sin embargo, resulta ser esencialmente un teorema «real». El hecho de que el caso complejo no estuviera todavía demostrado cuando Banach escribió su clásica obra *Opérations linéaires* puede ser la principal razón para que en su trabajo se consideren sólo escalares reales.

Será util introducir alguna terminología. Recordemos que V es un espacio vectorial complejo (real) si $x+y \in V$ para x e $y \in V$, y si $\alpha x \in V$ para todo número α complejo (real). Se deduce trivialmente que *todo espacio vectorial complejo es también un espacio vectorial real.* Una función compleja φ

sobre un espacio vectorial complejo V se denomina *funcional lineal complejo* si

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y) \quad \text{y} \quad \varphi(\alpha x)=\alpha\varphi(x), \qquad [5.38]$$

para todo x e $y \in V$ y todo α complejo. Una función a valores reales φ sobre un espacio vectorial complejo (real) V se dice un *funcional lineal real* si se verifica [5.38] para todo α *real.*

Si u es la parte real de un funcional lineal complejo f, es decir, si $u(x)$ es la parte real del número complejo $f(x)$ para todo $x \in V$, se ve fácilmente que u es un funcional lineal real. Entre f y u se verifica la siguiente relación:

5.5.2. Proposición. *Sea V un espacio vectorial complejo.*

a) *Si u es la parte real de un funcional lineal complejo f sobre V, entonces:*

$$f(x)=u(x)-iu(ix) \quad (x \in V). \qquad [5.39]$$

b) *Si u es un funcional lineal real sobre V y si f está definida por* [5.39], *entonces f es un funcional lineal complejo sobre V.*

c) *Si V es un espacio vectorial normado y f y u están relacionadas como en* [5.39], *entonces* $\|f\|=\|u\|$.

DEMOSTRACIÓN. Si α y β son números reales y $z=\alpha+i\beta$, la parte real de iz es $-\beta$. Esto proporciona la identidad

$$z=\operatorname{Re} z-i \operatorname{Re}(iz) \qquad [5.40]$$

para todos los números complejos z. Como

$$\operatorname{Re}(if(x))=\operatorname{Re} f(ix)=u(ix), \qquad [5.41]$$

[5.39] se deduce de [5.40] con $z=f(x)$.

Bajo las hipótesis *b)*, es claro que $f(x+y)=f(x)+f(y)$ y que $f(\alpha x)=\alpha f(x)$ para todo α real. Pero tenemos también

$$f(ix)=u(ix)-iu(-x)=u(ix)+iu(x)=if(x), \qquad [5.42]$$

que demuestra que f es lineal complejo.

Como $|u(x)| \leqslant |f(x)|$, tenemos $\|u\|=\|f\|$. Por otra parte, a todo $x \in V$ le corresponde un número complejo α, $|\alpha|=1$, de modo que $\alpha f(x)=|f(x)|$. Entonces

$$|f(x)|=f(\alpha x)=u(\alpha x) \leqslant \|u\| \cdot \|\alpha x\|=\|u\| \cdot \|x\|, \qquad [5.43]$$

que demuestra que $\|f\| \leqslant \|u\|$. ////

5.5.3. Demostración del teorema 5.5.1. Supondremos, en primer lugar, que X es un espacio vectorial real normado y, consecuentemente, que f es un funcional lineal real acotado sobre M. Si $\|f\|=0$, la extensión deseada es $F=0$. Omitiendo este caso, no se pierde generalidad suponiendo que $\|f\|=1$.

Tomemos $x_0 \in X$, $x_0 \notin M$, y sea M_1 el espacio vectorial engendrado por M y x_0. Entonces M_1 consta de todos los vectores de la forma $x+\lambda x_0$, donde

$x \in M$ y λ es un escalar real. Si definimos $f_1(x+\lambda x_0)=f(x)+\lambda\alpha$, donde α es un número real fijo cualquiera, es trivial comprobar que se ha obtenido una extensión de f a un funcional lineal sobre M_1. El problema es elegir α tal que el funcional extendido tenga también norma 1. Este será el caso si

$$|f(x)+\lambda\alpha| \leqslant \|x+\lambda x_0\| \qquad (x \in M,\ \lambda \text{ real}). \tag{5.44}$$

Cambiemos x por $-\lambda x$ y dividamos ambos miembros de [5.44] por $|\lambda|$. Se requiere entonces que

$$|f(x)-\alpha| \leqslant \|x-x_0\| \qquad (x \in M), \tag{5.45}$$

es decir, que $A_x \leqslant \alpha \leqslant B_x$ para todo $x \in M$, donde

$$A_x = f(x) - \|x-x_0\| \quad \text{y} \quad B_x = f(x) + \|x-x_0\|. \tag{5.46}$$

Existe un tal α si, y sólo si, todos los intervalos $[A_x, B_x]$ tienen un punto común, es decir, si, y sólo si,

$$A_x \leqslant B_y \tag{5.47}$$

para todo x e $y \in M$. Pero

$$f(x)-f(y)=f(x-y) \leqslant \|x-y\| \leqslant \|x-x_0\| + \|y-x_0\|, \tag{5.48}$$

y, por tanto, [5.47] se deduce de [5.46].

Hemos demostrado, pues, que existe una extensión f_1 de f sobre M_1 que preserva la norma.

Sea $\mathfrak{P}$ la colección de todos los pares ordenados (M', f'), donde M' es un subespacio de X que contiene a M y donde f' es una extensión lineal real de f a M', con $\|f'\|=1$. Ordenemos parcialmente $\mathfrak{P}$ significando con $(M', f') \leqslant (M'', f'')$ el que $M' \subset M''$ y $f''(x)=f'(x)$ para todo $x \in M'$. Los axiomas de un orden parcial se satisfacen claramente, $\mathfrak{P}$ es no vacío puesto que contiene a (M, f), y, por tanto, el teorema de maximalidad de Hausdorff afirma la existencia de una subcolección maximal totalmente ordenada Ω de $\mathfrak{P}$.

Sea Φ la colección de todos los M' tales que $(M', f) \in \Omega$. Entonces Φ está totalmente ordenado por la relación de inclusión de conjuntos, y, *en consecuencia,* la unión $\tilde{M}$ de todos los elementos de Φ es un subespacio de X. (Nótese que, en general, la unión de dos subespacios no es un subespacio. Como ejemplo, considérense dos planos que pasan por el origen en R^3.) Si $x \in \tilde{M}$, $x \in M'$ para algún $M' \in \Phi$; definamos $F(x)=f'(x)$, donde f' es la función que aparece en la pareja $(M', f') \in \Omega$. Nuestra definición del orden parcial en Ω muestra que no tiene importancia cuál $M' \in \Omega$ escojamos para definir $F(x)$, con tal que M' contenga a x.

Ahora es fácil comprobar que F es un funcional lineal sobre $\tilde{M}$, con $\|F\|=1$. Si $\tilde{M}$ fuera un subespacio propio de X, la primera parte de la demostración nos proporcionaría una extensión adicional de F, lo que contradiría la maximalidad de Ω. Entonces $\tilde{M}=X$, y la demostración está completa para el caso de escalares reales.

Sea ahora f un funcional lineal complejo sobre el subespacio M del espacio vectorial normado X. Sea u la parte real de f. Utilizando el teorema de

Hahn-Banach real para extender u a un funcional lineal real U sobre X, con $\|U\| = \|u\|$, y definiendo:

$$F(x) = U(x) - iU(ix) \qquad (x \in X), \tag{5.49}$$

de la proposición 5.5.2 se deduce que F es una extensión lineal compleja de f, y

$$\|F\| = \|U\| = \|u\| = \|f\|,$$

lo que completa la demostración. ////

Mencionemos dos consecuencias importantes del teorema de Hahn-Banach:

5.5.4. Teorema. *Sea M un subespacio vectorial de un espacio vectorial normado X, y sea $x_0 \in X$. Entonces x_0 está en la adherencia $\bar{M}$ de M si, y sólo si, no existe ningún funcional lineal f sobre X tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in M$ pero $f(x_0) \neq 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $x_0 \in \bar{M}$, f es un funcional lineal acotado sobre X, y $f(x) = 0$ para todo $x \in M$, la continuidad de f muestra que tenemos también $f(x_0) = 0$.

Recíprocamente, supongamos $x_0 \notin \bar{M}$. Entonces existe un $\delta > 0$ tal que $\|x - x_0\| > \delta$ para todo $x \in M$. Sea M' el subespacio generado por M y x, y definamos $f(x + \lambda x_0) = \lambda$ si $x \in M$ y λ es un escalar. Como

$$\delta|\lambda| \leqslant |\lambda| \; \|x_0 + \lambda^{-1}x\| = \|\lambda x_0 + x\|,$$

vemos que f es un funcional lineal sobre M' cuya norma es, a lo sumo, δ^{-1}. Además $f(x) = 0$ sobre M, $f(x_0) = 1$. El teorema de Hahn-Banach nos permite extender esta f de M' a X.

5.5.5. Teorema. *Si X es un espacio vectorial normado y si $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$, existe un funcional lineal acotado f sobre X, de norma 1, tal que $f(x_0) = \|x_0\|$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $M = \{\lambda x_0\}$, y definamos $f(\lambda x_0) = \lambda \|x_0\|$. Entonces f es un funcional lineal de norma 1 sobre M, y puede aplicarse otra vez el teorema de Hahn-Banach.

5.5.6. Notas. Si X es un espacio vectorial normado, sea X^* la colección de todos los funcionales lineales acotados sobre X. Si se definen en forma obvia la suma y multiplicación por escalares de funcionales lineales, es fácil ver que X^* es también un espacio vectorial normado. De hecho, X^* es un espacio de Banach; esto se deduce del hecho de que el cuerpo de escalares es un espacio métrico completo. Dejamos como ejercicio la verificación de estas propiedades de X.

Una de las consecuencias del teorema 5.5.5 es que X^* no es el espacio vectorial trivial (es decir, X consta de más vectores que el 0) si X no es trivial. De hecho, X^* *separa puntos en* X. Esto significa que si $x_1 \neq x_2$ en X, existe un $f \in X^*$ tal que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Para demostrar esto, basta tomar $x_0 = x_2 - x_1$ en el teorema 5.5.5.

Otra consecuencia es que, para $x \in X$,

$$\|x\| = \sup\{|f(x)| : f \in X^*, \; \|f\| = 1\}.$$

Por tanto, para $x \in X$ fijo, la aplicación $f \to f(x)$ es un funcional lineal acotado sobre X^*, de norma $\|x\|$.

Esta interacción entre X y X^* (el llamado «espacio dual» de X) constituye la base de una amplia porción de esa considerable zona de las matemáticas que se conoce como *análisis funcional.*

5.6. UN ENFOQUE ABSTRACTO DE LA INTEGRAL DE POISSON

Las aplicaciones del teorema de Hahn-Banach a problemas concretos dependen por supuesto del conocimiento de los funcionales lineales acotados sobre el espacio vectorial normado que se está considerando. Hasta aquí hemos determinado sólo los funcionales lineales acotados sobre un espacio de Hilbert (donde existe una demostración mucho más simple del teorema de Hahn-Banach; véase el ejercicio 6), y conocemos cuáles son los funcionales lineales positivos sobre $C_c(X)$.

Describiremos ahora una situación general en la que aparecen naturalmente los citados funcionales.

Sea K un espacio de Hausdorff compacto, H un subconjunto compacto de K, y sea A un subespacio de $C(K)$ tal que $1 \in A$ (1 representa la función que asigna el número 1 a cada $x \in K$) y tal que

$$\|f\|_K = \|f\|_H \qquad (f \in A). \tag{5.50}$$

Aquí hemos utilizado la notación

$$\|f\|_E = \sup\{|f(x)| : x \in E\}. \tag{5.51}$$

Debido al ejemplo discutido en el apartado 5.6.1, H se llama a veces una *frontera* de K, correspondiente al espacio A.

Si $f \in A$ y $x \in K$, [5.50] expresa que

$$|f(x)| \leqslant \|f\|_H. \tag{5.52}$$

En particular, si $f(y)=0$ para todo $y \in H$, entonces $f(x)=0$ para todo $x \in K$. Por tanto, si f_1 y $f_2 \in A$ y $f_1(y)=f_2(y)$ para todo $y \in H$, entonces $f_1=f_2$; para verlo, póngase $f=f_1-f_2$.

Sea M el conjunto de todas las funciones sobre H que sean restricciones a H de elementos de A. Es claro que M es un subespacio de $C(H)$. La observación anterior muestra que cada elemento de M posee una única extensión a un elemento de A. Entonces tenemos una correspondencia natural uno a uno entre M y A, que preserva la norma, por [5.50]. Por tanto, no será motivo de confusión el utilizar la misma letra para designar un elemento de A y su restricción a H.

Fijemos un punto $x \in K$. La desigualdad [5.52] muestra que la aplicación $f \to f(x)$ es un funcional lineal acotado sobre M, de norma 1 (puesto que se verifica la igualdad en [5.52] si $f=1$). Por el teorema de Hahn-Banach existe un funcional lineal Λ sobre $C(H)$, de norma 1, tal que

$$\Lambda f = f(x) \qquad (f \in M). \tag{5.53}$$

Pretendemos probar que las propiedades

$$\Lambda 1 = 1, \qquad \|\Lambda\| = 1 \tag{5.54}$$

implican que Λ es un funcional lineal *positivo* sobre $C(H)$.

Para demostrarlo, supongamos $f \in C(H)$, $0 \leqslant f \leqslant 1$, pongamos $g = 2f - 1$, y $\Lambda g = \alpha + i\beta$, donde α y β son reales. Nótese que $-1 \leqslant g \leqslant 1$, así que $|g + ir|^2 \leqslant \leqslant 1 + r^2$ para toda constante real r. En consecuencia [5.54] implica que

$$(\beta + r)^2 \leqslant |\alpha + i(\beta + r)|^2 = |\Lambda(g + ir)|^2 \leqslant 1 + r^2. \tag{5.55}$$

Por tanto, $\beta^2 + 2r\beta \leqslant 1$ para todo r real, lo que obliga a que $\beta = 0$. Como $\|g\|_H \leqslant 1$, tenemos $|\alpha| \leqslant 1$; por tanto:

$$\Lambda f = \frac{1}{2}\Lambda(1 + g) = \frac{1}{2}(1 + \alpha) \geqslant 0. \tag{5.56}$$

Ahora puede aplicarse el teorema 2.3.1, el cual muestra que existe una medida de Borel positiva regular μ_x sobre H tal que

$$\Lambda f = \int_H f \, d\mu_x \qquad (f \in C(H)). \tag{5.57}$$

En particular, obtenemos la fórmula de representación

$$f(x) = \int_H f \, d\mu_x \qquad (f \in A). \tag{5.58}$$

Lo que hemos demostrado es que *a cada $x \in K$ le corresponde una medida positiva μ_x sobre la «frontera» H, que «representa» a x en el sentido de que se verifica* [5.58] *para toda $f \in A$.*

Nótese que Λ determina a μ_x de manera única; pero no hay razón para esperar que la extensión de Hahn-Banach sea única. En consecuencia, no podemos decir mucho, en general, sobre la unicidad de las medidas representantes. Bajo circunstancias especiales, obtenemos efectivamente unicidad, como veremos a continuación.

5.6.1. Ejemplo. Como paradigma de la situación precedente, sea $U = \{z: |z| < 1\}$ el disco unidad abierto en el plano complejo, $K = \bar{U}$ (el disco unidad cerrado), y tomemos como H la frontera T de U. Pretendemos probar que todo polinomio f, es decir, toda función de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n, \tag{5.59}$$

donde $a_0, \ldots, a_N$ son números complejos, satisface la relación

$$\|f\|_U = \|f\|_T \tag{5.60}$$

(Nótese que la continuidad de f muestra que el supremo de $|f|$ sobre U es el mismo que sobre $\bar{U}$.)

Como $\bar{U}$ es compacto, existe un $z_0 \in \bar{U}$ tal que $|f(z_0)| \geqslant |f(z)|$ para todo $z \in \bar{U}$. Supongamos que $z_0 \in U$. Entonces

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N} b_n (z - z_0)^n, \qquad [5.61]$$

y si $0 < r < 1 - |z_0|$, obtenemos

$$\sum_{n=0}^{N} |b_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^2 \, d\theta \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(z_0)|^2 \, d\theta = |b_0|^2,$$

así que $b_1 = b_2 = \ldots = b_N = 0$; es decir, f es constante. Por tanto, $z_0 \in T$ para todo polinomio no constante f, lo que demuestra [5.60].

(Acabamos de probar un caso especial del *teorema del módulo máximo;* veremos más adelante que esta es una propiedad importante de las funciones holomorfas.)

5.6.2. La integral de Poisson. Sea A un subespacio cualquiera de $C(\bar{U})$ (donde $\bar{U}$ es, como antes, el disco unidad cerrado) tal que contiene a todos los polinomios y tal que

$$\|f\|_U = \|f\|_T \qquad [5.62]$$

se verifica para todo $f \in A$. No excluimos la posibilidad de que A conste sólo de los polinomios, pero podría también ser más amplio.

El resultado general obtenido al principio de la sección 5.6 puede aplicarse a A y muestra que a cada $z \in U$ le corresponde una medida de Borel positiva μ_z sobre T tal que

$$f(z) = \int_T f \, d\mu_z \quad (f \in A). \qquad [5.63]$$

(Esto también se verifica para $z \in T$, pero entonces es trivial; μ_z es simplemente la masa unidad concentrada en el punto z.)

Fijamos ahora $z \in U$ y escribimos $z = re^{i\theta}$, $0 \leqslant r < 1$, θ real.

Si $u_n(w) = w^n$, entonces $u_n \in A$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$; por tanto, [5.63] muestra que

$$r^n e^{in\theta} = \int_T u_n \, d\mu_z \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \qquad [5.64]$$

Como $u_{-n} = \bar{u}_n$ sobre T, [5.64] lleva a que

$$\int_T u_n \, d\mu_z = r^{|n|} e^{in\theta} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \qquad [5.65]$$

Este resultado sugiere que consideremos la función real

$$P_r(\theta - t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta - t)}, \quad (t \text{ real}) \qquad [5.66]$$

puesto que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)e^{int}\,dt = r^{|n|}e^{in\theta} \qquad (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots). \qquad [5.67]$$

Nótese que la serie [5.66] está dominada por la serie geométrica convergente $\Sigma r^{|n|}$, así que es legítimo introducir la serie en la integral [5.67] e integrar término a término, lo que proporciona [5.67]. Comparando [5.65] y [5.67] se tiene:

$$\int_T f\,d\mu_z = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})P_r(\theta-t)\,dt \qquad [5.68]$$

para $f=u_n$, y, por tanto, para todo polinomio trigonométrico f. Aplicando ahora el teorema 4.3.3 se obtiene que [5.68] se verifica para toda $f \in C(T)$. (Esto muestra que μ_z estaba determinada en forma única por [5.63]. ¿Por qué?)

En particular, [5.63] se verifica si $f \in A$, y entonces dicha ecuación proporciona la representación

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})P_r(\theta-t)\,dt \qquad (f \in A). \qquad [5.69]$$

La serie [5.66] puede sumarse explícitamente, porque es la parte real de

$$1+2\sum_{1}^{\infty}(ze^{-it})^n = \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} = \frac{1-r^2+2ir\,\mathrm{sen}\,(\theta-t)}{|1-ze^{-it}|^2}.$$

Por tanto:

$$P_r(\theta-t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}, \qquad [5.70]$$

que es el llamado «núcleo de Poisson». Nótese que $P_r(\theta-t) \geqslant 0$ si $0 \leqslant r < 1$.

Resumimos a continuación los resultados obtenidos:

5.6.3. Teorema. *Sea A un espacio vectorial de funciones complejas continuas sobre el disco unidad cerrado $\bar{U}$. Si A contiene a todos los polinomios, y si*

$$\sup_{z\in U}|f(z)| = \sup_{z\in T}|f(z)| \qquad [5.71]$$

para toda $f \in A$ (donde T es la circunferencia unidad, la frontera de U), entonces la representación integral de Poisson

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}f(e^{it})\,dt \qquad (z=re^{i\theta}) \qquad [5.72]$$

es válida para toda $f \in A$ y para todo $z \in U$.

EJERCICIOS

1. Sea X tal que consta de dos puntos a y b, pongamos $\mu(\{a\})=\mu(\{b\})=1/2$, y sea $L^p(\mu)$ el espacio *real* L^p resultante. Identifiquemos cada función real f sobre X con el punto $(f(a), f(b))$ del plano, y dibujemos las bolas unidades de $L^p(\mu)$, para $0 < p \leqslant \infty$. Nótese que son convexas si, y sólo si, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. ¿Para qué valor de p es un cuadrado esta bola unidad? ¿Y una circunferencia? Si $\mu(\{a\}) \neq \mu(\{b\})$, ¿en qué se diferencia esta situación de la anterior?

2. Demuéstrese que la bola unidad (abierta o cerrada) es convexa en todo espacio vectorial normado.

3. Si $1 < p < \infty$, demuéstrese que la bola unidad de $L^p(\mu)$ es *estrictamente convexa;* esto significa que, si

$$\|f\|_p = \|g\|_p = 1, \qquad f \neq g, \qquad h = \tfrac{1}{2}(f+g),$$

entonces $\|h\|_p < 1$. (Geométricamente, la superficie de la bola no contiene líneas rectas.) Demuéstrese que esta propiedad no se verifica en ningún $L^1(\mu)$, $L^\infty(\mu)$, ni en C(X). (Ignórense trivialidades, como espacios que consten de un solo punto.)

4. Sea C el espacio de todas las funciones continuas en $[0, 1]$, con la norma del supremo. Sea M el conjunto de todas las $f \in C$ para las cuales

$$\int_0^{1/2} f(t)\,dt - \int_{1/2}^1 f(t)\,dt = 1.$$

Demuéstrese que M es un subconjunto convexo cerrado de C que no contiene ningún elemento de norma mínima.

5. Sea M el conjunto de todas las $f \in L^1([0, 1])$, relativo a la medida de Lebesgue, tales que

$$\int_0^1 f(t)\,dt = 1.$$

Demuéstrese que M es un subconjunto convexo cerrado de $L^1([0, 1])$ que contiene un número infinito de elementos de norma mínima. (Compárese esto y el ejercicio 4 con el teorema 4.1.10).

6. Sea f un funcional lineal acotado sobre un subespacio M de un espacio de Hilbert H. Demuéstrese que f posee una *única* extensión a un funcional lineal acotado sobre H que preserva la norma, y que esta extensión se anula sobre $M^\perp$.

7. Constrúyase un funcional lineal acotado sobre cierto subespacio de algún $L^1(\mu)$ que tenga dos (y, por tanto, infinitas) extensiones lineales distintas de $L^1(\mu)$ que preserven la norma.

8. Sea X un espacio vectorial normado, y X^* su espacio dual, como fue definido en el apartado 5.5.6, con la norma

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| \leqslant 1\}.$$

a) Demuésrtese que X^* es un espacio de Banach.

b) Demuéstrese que la aplicación $f \to f(x)$ es, para cada $x \in X$, un funcional lineal acotado sobre X^*, de norma $\|x\|$. (Esto proporciona una inyección natural de X en su «segundo dual» X^{**}, el espacio dual de X^*.)

c) Demuéstrese que $\{\|x_n\|\}$ está acotada si $\{x_n\}$ es una sucesión en X tal que $\{f(x_n)\}$ está acotada para todo $f \in X^*$.

9. Sean c_0, ℓ^1 y ℓ^∞ los espacios de Banach consistentes en todas las sucesiones complejas $x=\{\xi_i\}$, $i=1, 2, 3, \ldots$, definidas así:

$x \in \ell^1$ si, y sólo si, $\|x\|_1=\Sigma|\xi_i| < \infty$.
$x \in \ell\infty$ si, y sólo si, $\|x\|_\infty=\sup|\xi_i| < \infty$.
c_0 es el subespacio de ℓ^∞ que consiste en todas las $x \in \ell^\infty$ para las que $\xi_i \to 0$ cuando $i \to \infty$.

Demuéstrense los siguientes cuatro enunciados.

a) Si $y=\{\eta_i\} \in \ell^1$ y $\Lambda x=\Sigma\xi_i\eta_i$ para todo $x \in c_0$, entonces Λ es un funcional lineal acotado sobre c_0, y $\|\Lambda\|=\|y\|_1$. Más todavía, todo $\Lambda \in (c_0)^*$ se obtiene de esta manera. Brevemente, $(c_0)^*=\ell^1$.

(Más precisamente, estos dos espacios no son iguales; el enunciado precedente muestra un isomorfismo de espacios vectoriales, isométrico entre ellos.)

b) En el mismo sentido, $(\ell^1)^*=\ell^\infty$.

c) Toda $y \in \ell^1$ induce un funcional lineal acotado sobre ℓ^∞, como en *a)*. Sin embargo, esto no proporciona todos los elementos de $(\ell^\infty)^*$, puesto que $(\ell^\infty)^*$ contiene funcionales no triviales que se anulan sobre todo c_0.

d) c_0 y ℓ^1 son separables pero ℓ^∞ no lo es.

10. Si $\Sigma\alpha_i\xi_i$ converge para toda sucesión $\{\xi_i\}$ tal que $\xi_i \to 0$ cuando $i \to \infty$, demuéstrese que $\Sigma|\alpha_i| < \infty$.

11. Para $0 < \alpha \leqslant 1$, denotamos mediante $\operatorname{Lip}\alpha$ el espacio de todas las funciones continuas f sobre $[a, b]$ para las que

$$M_f = \sup_{s \neq t} \frac{|f(s)-f(t)|}{|s-t|^\alpha} < \infty.$$

Demuéstrese que $\operatorname{Lip}\alpha$ es un espacio de Banach, si $\|f\|=|f(a)|+M_f$; también, si

$$\|f\|=M_f+\sup|f(x)|.$$

(Se dice que los elementos de $\operatorname{Lip}\alpha$ satisfacen una *condición de Lipschitz* de orden α.)

12. Sea K un triángulo (figura bidimensional) en el plano, sea H el conjunto que consiste en los vértices de K, y sea A el conjunto de todas las funciones reales f sobre K, de la forma

$$f(x, y)=\alpha x+\beta y+\gamma \qquad (\alpha,\ \beta \text{ y } \gamma \text{ reales}).$$

Demuéstrese que a cada $(x_0, y_0) \in K$ le corresponde una medida única μ sobre H tal que

$$f(x_0, y_0)=\int_H f\, d\mu.$$

(Compárese con la sección 5.6.)

Cambiemos K por un cuadrado, sea H otra vez el conjunto de sus vértices y A como anteriormente. Demuéstrese que a cada punto de K también le corresponde una medida sobre H, con la propiedad anterior, pero que ahora se ha perdido aquella unicidad.

¿Se puede extrapolar un teorema más general? (Piénsese en otras figuras, espacios de más dimensiones.)

13. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones complejas continuas sobre un espacio métrico completo (no vacío) X, tal que $f(x)=\lim f_n(x)$ existe (como número complejo) para todo $x \in X$.

a) Demuéstrese que existe un conjunto abierto $V \neq \emptyset$ y un número $M < \infty$ tal que $|f_n(x)| < M$ para todo $x \in V$ y para $n=1, 2, 3, \ldots$

b) Si $\epsilon > 0$, demuéstrese que existe un conjunto abierto $V \neq \emptyset$ y un entero N tal que $|f(x)-f_n(x)| \leqslant \epsilon$ si $x \in V$ y $n \geqslant N$.

Sugerencia para b): Para $N=1, 2, 3, \ldots$, pongamos

$$A_N=\{x: |f_m(x)-f_n(x)| \leqslant \text{ si } m \geqslant N \text{ y } n \geqslant N\}$$

Como $X=\bigcup A_N$, algún A_N tiene un interior no vacío.

14. Sea C el espacio de todas las funciones reales continuas sobre $I=[0, 1]$ con la norma del supremo. Sea X_n el subconjunto de C que consiste en aquellas f para las que existe un $t \in I$ tal que $|f(s)-f(x)| \leqslant n|s-t|$ para todo $s \in I$. Fíjese n y demuéstrese que cada conjunto abierto en C contiene un conjunto abierto que no intersecta a X_n. (Cada $f \in C$ puede ser aproximada uniformemente por una función en zig-zag g con pendientes muy grandes, y si $\|g-h\|$ es pequeño, $h \notin X_n$.) Demuéstrese que esto implica la existencia de un G_δ denso en C que consta enteramente de funciones que no son diferenciables en ningún punto.

15. Sea $A=(a_{nj})$ una matriz infinita de elementos complejos, donde $i, j=1, 2, \ldots$ A asocia a cada sucesión $\{s_j\}$ una sucesión $\{\sigma_i\}$, definida mediante

$$\sigma_i=\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}s_j \qquad (i=1, 2, 3, \ldots),$$

si esas series convergen.

Demuéstrese que A transforma toda sucesión convergente $\{s_j\}$ en una sucesión $\{\sigma_i\}$ que converge al mismo límite si, y sólo si, se satisfacen las siguientes condiciones:

a) $$\lim_{i \to \infty} a_{ij}=0 \quad \text{para cada } j$$

b) $$\sup_i \sum_{j=0}^{\infty} |a_{ij}| < \infty.$$

c) $$\lim_{i \to \infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}=1.$$

El proceso de paso de $\{s_j\}$ a $\{\sigma_i\}$ se llama un *método de sumabilidad.* He aquí dos ejemplos:

$$a_{ij}=\begin{cases} 1/(i+1) & \text{si } 0 \leqslant j \leqslant i, \\ 0 & \text{si } i < j, \end{cases}$$

y

$$a_{ij}=(1-r_i)r_i^j, \quad 0 < r_i < 1, \quad r_i \to 1.$$

Demuéstrese que cada una de éstas transforma algunas sucesiones divergentes $\{s_j\}$ (incluso algunas no acotadas) en sucesiones convergentes $\{\sigma_i\}$.

16. Supóngase que X e Y son espacios de Banach, y que Λ es una aplicación lineal de X en Y, con la propiedad siguiente: Para toda sucesión $\{x_n\}$ en X para la que existen $x=\lim x_n$ e $y=\lim \Lambda x_n$, se verifica que $y=\Lambda x$. Demuéstrese que Λ es continuo.

Este es el llamado «teorema del gráfico cerrado».

Sugerencia: Sea $X \oplus Y$ el conjunto de todos los pares ordenados (x, y), $x \in X$ e $y \in Y$, con la suma y multiplicación por escalares definidas componente a componente. Demuéstrese que $X \oplus Y$ es un espacio de Banach, si $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$. El gráfico G de Λ es el subconjunto de $X \oplus Y$ formado por los pares $(x, \Lambda x)$, $x \in X$. Nótese que nuestras hipótesis dicen que G es cerrado; por tanto, G es un espacio de Banach. Nótese que $(x, \Lambda x) \to x$ es continua, uno a uno y lineal y que aplica G sobre X.

Obsérvese que existen aplicaciones *no lineales* (de R^1 sobre R^1, por ejemplo) cuyo gráfico es cerrado aunque no son continuas: $f(x) = 1/x$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

17. Si μ es una medida positiva, cada $f \in L^\infty(\mu)$ define un operador de multiplicación M_f de $L^2(\mu)$ en $L^2(\mu)$, tal que $M_f(g) = fg$. Demuéstrese que $\|M_f\| \leqslant \|f\|_\infty$. ¿Para qué medidas μ es cierto que $\|M_f\| = \|f\|_\infty$ para toda $f \in L^\infty(\mu)$? ¿Para cuáles $f \in L^\infty(\mu)$ aplica M_f el espacio $L^2(\mu)$ sobre $L^2(\mu)$.

18. Supóngase que $\{\Lambda_n\}$ es una sucesión de transformaciones lineales acotadas de un espacio vectorial normado X a un espacio de Banach Y, que $\|\Lambda_n\| \leqslant M < \infty$ para todo n, y que existe un conjunto denso $E \subset X$ tal que $\{\Lambda_n x\}$ converge para cada $x \in E$. Demuéstrese que $\{\Lambda_n x\}$ converge para cada $x \in X$.

19. Si s_n es la suma parcial n-ésima de la serie de Fourier de una función $f \in C(T)$, demuéstrese que $s_n/\log n \to 0$ uniformemente, cuando $n \to \infty$, para cada $f \in C(T)$. Esto es, pruébese que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\|s_n\|_\infty}{\log n} = 0.$$

Por otra parte, si $\lambda_n/\log n \to 0$, demuéstrese que existe una $f \in C(T)$ tal que la sucesión $\{s_n(f; 0)/\lambda_n\}$ es no acotada.

Sugerencia: Aplíquese el razonamiento del ejercicio 18 y el del apartado 5.3.1, con una mejor estimación de $\|D_n\|_1$ que la que se obtuvo entonces.

20. ¿Es válido el lema del apartado 4.2.3 en todo espacio de Banach? ¿Y en todo espacio vectorial normado?

21. *a)* ¿Existe alguna sucesión de funciones positivas continuas f_n sobre R^1 tal que $\{f_n(x)\}$ es no acotada si, y sólo si, x es racional?

b) Cámbiese «racional» por «irracional» en *a)* y respóndase la pregunta resultante.

c) Cámbiese «$\{f_n(x)\}$ es no acotada» por «$f_n(x) \to \infty$ cuando $n \to \infty$» y respóndanse las preguntas análogas resultantes en *a)* y *b)*.

MEDIDAS COMPLEJAS

6.1. VARIACION TOTAL

6.1.1. Introducción. Sea $\mathcal{M}$ una σ-álgebra en un conjunto X. Llamaremos *partición de* E a una colección numerable $\{E_i\}$ de elementos de $\mathcal{M}$ tales que $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$, y si $E = \bigcup E_i$. Una *medida compleja* μ sobre $\mathcal{M}$ es, entonces, una función compleja sobre $\mathcal{M}$ tal que

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \qquad (E \in \mathcal{M}) \qquad [6.1]$$

para toda partición $\{E_i\}$ de E.

Obsérvese que la convergencia de la serie en [6.1] es ahora parte de los requisitos de la definición (a diferencia de lo requerido para medidas positivas, donde la serie podía ser o no convergente). Puesto que la unión de los conjuntos E no cambia si se permutan los subíndices, toda reordenación de la serie [6.1] debe ser también convergente. Por tanto ([26], teorema 3.56), la serie converge absolutamente en realidad.

Consideremos el problema de obtener una medida positiva λ que domine a una medida compleja μ dada sobre $\mathcal{M}$, en el sentido de que $|\mu(E)| \leqslant \lambda(E)$ para todo $E \in \mathcal{M}$, e intentemos mantener λ tan pequeña como podamos. Toda solución a nuestro problema (si existe alguna) debe satisfacer

$$\lambda(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i) \geqslant \sum_{1}^{\infty} |\mu(E_i)|, \qquad [6.2]$$

para toda partición $\{E_i\}$ de cualquier conjunto $E \in \mathcal{M}$, así que $\lambda(E)$ es al menos igual al supremo de las sumas del segundo miembro de [6.2], cuando éste se toma sobre todas las particiones de E. Este hecho sugiere el que *definamos una función de conjunto* $|\mu|$ *sobre* $\mathcal{M}$ *mediante*

$$|\mu|(E) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)| \qquad (E \in \mathcal{M}). \qquad [6.3]$$

donde el supremo está tomado sobre todas las particiones $\{E_i\}$ *de* E.

Esta notación no es quizá la mejor pero es la habitual. Nótese que $|\mu|(E) \geqslant |\mu(E)|$, pero que, en general, $|\mu|(E)$ no es igual a $|\mu(E)|$.

Como se demostrará más adelante, $|\mu|$ *es* realmente una medida, así que nuestro problema tiene, en efecto, una solución. La discusión que condujo a [6.3] muestra entonces claramente que $|\mu|$ es una solución minimal, en el sentido de que en cualquier otra solución λ tiene la propiedad $\lambda(E) \geqslant |\mu|(E)$ para todo $E \in \mathcal{M}$.

La función de conjunto $|\mu|$ recibe el nombre de *variación total* de μ, y, a veces, para evitar malentendidos, *medida de variación total.* El término «variación total de μ» se utiliza también frecuentemente para designar al número $|\mu|(X)$.

Si μ es una medida positiva, entonces es claro que $|\mu| = \mu$.

Además de ser una medida, $|\mu|$ tiene otra propiedad inesperada: $|\mu|(X) < \infty$. Puesto que $|\mu(E)| \leqslant |\mu|(E) \leqslant |\mu|(X)$, esto implica que toda medida compleja μ sobre cualquier σ-álgebra es acotada: Si el recorrido de μ está en el plano complejo, entonces ha de estar en realidad en algún círculo de radio finito. Esta propiedad (demostrada en el teorema 6.1.4) se expresa a veces diciendo que μ *es de variación acotada.*

6.1.2. Teorema. *La variación total $|\mu|$ de una medida compleja μ sobre $\mathcal{M}$ es una medida positiva sobre $\mathcal{M}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{E_i\}$ una partición de $E \in \mathcal{M}$. Sean t_i números reales tales que $t_i < |\mu|(E)$. Entonces cada E_i tiene una partición $\{A_{ij}\}$ tal que

$$\sum_j |\mu(A_{ij})| > t_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots). \tag{6.4}$$

Puesto que $\{A_{ij}\}$ $(i, j = 1, 2, 3, \ldots)$ es una partición de E, se deduce que

$$\sum_i t_i \leqslant \sum_{i,j} |\mu(A_{ij})| \leqslant |\mu|(E). \tag{6.5}$$

Tomando el supremo del primer miembro de [6.2] sobre todas las elecciones admisibles de $\{t_i\}$, vemos que

$$\sum_i |\mu|(E_i) \leqslant |\mu|(E). \tag{6.6}$$

Para demostrar la desigualdad opuesta, sea $\{A_j\}$ una partición cualquiera de E. Para cualquier j fijo, $\{A_j \cap E_i\}$ es entonces una partición de A_j, y para cualquier i fijo, $\{A_j \cap E_i\}$ es una partición de E_i. Por tanto:

$$\begin{aligned} \sum_j |\mu(A_j)| &= \sum_j \left| \sum_i \mu(A_j \cap E_i) \right| \\ &\leqslant \sum_j \sum_i |\mu(A_j \cap E_i)| \qquad [6.7] \\ &= \sum_i \sum_j |\mu(A_j \cap E_i)| \leqslant \sum_i |\mu|(E_i). \end{aligned}$$

Puesto que [6.7] se verifica para toda partición $\{A_j\}$ de E, tenemos

$$|\mu|(E) \leqslant \sum_i |\mu|(E_i). \qquad [6.8]$$

De [6.6] y [6.8] se deduce que $|\mu|$ es numerablemente aditiva.

Nótese que en [6.5] y [6.7] se ha utilizado el corolario del teorema 1.8.5.

Que $|\mu|$ no es ∞ idénticamente es una consecuencia trivial del teorema 6.1.4, pero puede también deducirse inmediatamente de que $|\mu|(\varnothing)=0$. ////

6.1.3. Lema. *Si $z_1, z_2, \ldots, z_n$ son números complejos, existe un subconjunto S de $\{1, \ldots, n\}$ tal que*

$$\left|\sum_{j\in S} z_j\right| \geqslant \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{n} |z_j|. \qquad [6.9]$$

DEMOSTRACIÓN. Pongamos $w=|z_1|+\ldots+|z_n|$. El plano complejo es la unión de cuatro cuadrantes cerrados, limitados por las rectas $y=\pm x$, y al menos uno de esos cuadrantes Q tiene la propiedad de que la suma de los $|z_j|$ tales que $z_j \in Q$ es al menos $w/4$ (se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que es el cuadrante definido por $|y| \leqslant |x|$). Para $z \in Q$, tenemos

$$\operatorname{Re} z \geqslant |z|/\sqrt{2};$$

si S es el conjunto de los j tales que $z \in Q$, se deduce que

$$\left|\sum_{j\in S} z_j\right| \geqslant \sum_{j\in S} \operatorname{Re} z_j \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{j\in S}|z_j| \geqslant \frac{w}{4\sqrt{2}} \geqslant \frac{w}{6}. \qquad ////$$

6.1.4. Teorema. *Si μ es una medida compleja sobre X, entonces*

$$|\mu|(X) < \infty. \qquad [6.10]$$

DEMOSTRACIÓN. Demostraremos primero lo siguiente: si $E \in \mathfrak{M}$ y $|\mu|(E)=\infty$, entonces $E=A \cup B$, donde A y $B \in \mathfrak{M}$, $A \cap B=\varnothing$, y

$$|\mu(A)| > 1, \qquad |\mu|(B)=\infty. \qquad [6.11]$$

La definición de $|\mu|$ muestra que a cada $t<\infty$ le corresponde una partición $\{E_j\}$ de E tal que $\Sigma|\mu(E_j)| > t$. Tomemos $t=6(1+|\mu(E)|)$. Entonces

$$\sum_{j=1}^{n} |\mu(E_j)| > t \qquad [6.12]$$

para algún n; si aplicamos el lema 6.1.3 con $z_j=\mu(E_j)$ y ponemos

$$A=\bigcup_{j\in S} E_j, \qquad [6.13]$$

se tiene que $A \subset E$ y $|\mu(A)| > t/6 \geqslant 1$. Si $B=E-A$, entonces

$$|\mu(B)| = |\mu(E)-\mu(A)| \geqslant |\mu(A)| - |\mu(E)| > \frac{t}{6} - |\mu(E)| = 1. \qquad [6.14]$$

Puesto que $|\mu|(E)=|\mu|(A)+|\mu|(B)$, por el teorema 6.1.2, tenemos $\mu(A)=\infty$ o $|\mu|(B)=\infty$ (o ambas), y obtenemos [6.11], intercambiando A y B si es necesario.

Supongamos ahora que $|\mu|(X)=\infty$. Pongamos $B=X$. Sea $n\geqslant 0$, y B_n elegido de tal manera que $|\mu|(B_n)=\infty$. Aplicando [6.11] con B_n en lugar de E, vemos que B_n es la unión de dos conjuntos disjuntos A_{n+1} y B_{n+1}, tales que $|\mu(A_{n+1})|>1$ y $|\mu|(B_{n+1})=\infty$. Obtenemos entonces por inducción conjuntos disjuntos A_1, A_2, A_3, ..., con $|\mu(A_n)|>1$. Si $C=\cup A_n$, la aditividad numerable de μ muestra que

$$\mu(C)=\sum_1^\infty \mu(A_n). \qquad [6.15]$$

Esta serie no converge, porque $\mu(A_n)$ no tiende a cero cuando $n\to\infty$. Esta contradicción demuestra que debe verificarse [6.10].

6.1.5. Definición. Si μ y λ son medidas complejas sobre la misma σ-álgebra $\mathcal{M}$, definimos $\mu+\lambda$ y $c\mu$ mediante

$$\begin{aligned}(\mu+\lambda)(E)&=\mu(E)+\lambda(E)\\ (c\mu)(E)&=c\mu(E)\end{aligned} \qquad (E\in\mathcal{M}) \qquad [6.16]$$

para todo escalar c, de la manera habitual. Es entonces trivial comprobar que $\mu+\lambda$ y $c\mu$ son medidas complejas. La colección de todas las medidas complejas sobre $\mathcal{M}$ es, pues, un espacio vectorial. Si hacemos

$$\|\mu\|=|\mu|(X). \qquad [6.17]$$

es fácil comprobar que se satisfacen todos los axiomas de un espacio vectorial normado.

6.1.6. Variaciones positiva y negativa. Vamos ahora a concretar; consideremos una medida real μ sobre una σ-álgebra $\mathcal{M}$. (Tales medidas se llaman a veces *con signo.)* Definamos $|\mu|$ como antes, y definamos

$$\mu^+=\frac{1}{2}(|\mu|+\mu), \qquad \mu^-=\frac{1}{2}(|\mu|-\mu). \qquad [6.18]$$

Entonces tanto μ^+ como μ^- son medidas positivas sobre $\mathcal{M}$, y son acotadas, por el teorema 6.1.4. Además

$$\mu=\mu^+-\mu^-, \qquad |\mu|=\mu^++\mu^-. \qquad [6.19]$$

Las medidas μ^+ y μ^- se llaman las *variaciones positiva* y *negativa* de μ, respectivamente. Esta representación de μ como diferencia de las medidas positivas μ^+ y μ^- se conoce como la *descomposición de Jordan* de μ. Entre todas las representaciones de μ como diferencia de dos medidas positivas, la descomposición de Jordan posee una cierta propiedad de mínimo que se establecerá como corolario del teorema 6.3.3.

6.2. CONTINUIDAD ABSOLUTA

6.2.1. Definiciones. Sea μ una medida positiva sobre una σ-álgebra $\mathcal{M}$, y sea λ una medida arbitraria sobre $\mathcal{M}$; λ puede ser positiva o compleja. (Recordemos que una medida compleja tiene su recorrido en el plano complejo, pero que nuestro uso del término «medida positiva» incluye ∞ como valor admisible. Por tanto, las medidas positivas no forman un subconjunto de las complejas.)

Decimos que λ es absolutamente continua con respecto a μ, y escribimos

$$\lambda \ll \mu \qquad [6.20]$$

si $\lambda(E)=0$ para todo $E \in \mathcal{M}$ para el que $\mu(E)=0$.

Si existe algún conjunto $A \in \mathcal{M}$ tal que $\lambda(E)=\lambda(A \cap E)$ para todo $E \in \mathcal{M}$, decimos que λ está *concentrada en* A. Esto es equivalente a la hipótesis de que $\lambda(E)=0$ si $E \cap A=\varnothing$.

Supongamos que λ_1 y λ_2 son medidas sobre $\mathcal{M}$, y que existe un par de conjuntos disjuntos A y B tales que λ_1 está concentrada en A y λ_2 está concentrada en B. Decimos entonces que λ_1 y λ_2 son *singulares mutuamente*, y escribimos

$$\lambda_1 \perp \lambda_2. \qquad [6.21]$$

He aquí algunas propiedades elementales de estos conceptos.

6.2.2. Proposición. *Supongamos que μ, λ, λ_1 y λ_2 son medidas sobre una σ-álgebra $\mathcal{M}$, y que μ es positiva.*

a) *Si λ está concentrada en A, también lo está $|\lambda|$.*
b) *Si $\lambda_1 \perp \lambda_2$, entonces $|\lambda_1| \perp |\lambda_2|$.*
c) *Si $\lambda_1 \perp \mu$ y $\lambda_2 \perp \mu$, entonces $\lambda_1+\lambda_2 \perp \mu$.*
d) *Si $\lambda_1 \ll \mu$ y $\lambda_2 \ll \mu$, entonces $\lambda_1+\lambda_2 \ll \mu$.*
e) *Si $\lambda \ll \mu$, entonces $|\lambda| \ll \mu$.*
f) *Si $\lambda_1 \ll \mu$ y $\lambda_2 \perp \mu$, entonces $\lambda_1 \perp \lambda_2$.*
g) *Si $\lambda \ll \mu$ y $\lambda \perp \mu$, entonces $\lambda=0$.*

DEMOSTRACIÓN.

a) Si $E \cap A=\varnothing$ y $\{E_j\}$ es una partición cualquiera de E, entonces $\lambda(E_j)=0$ para todo j. Por tanto, $|\lambda|(E)=0$.

b) Se deduce inmediatamente de *a)*.

c) Existen conjuntos disjuntos A_1 y B_1 tales que λ_1 está concentrada sobre A_1 y μ sobre B_1, y existen conjuntos disjuntos A_2 y B_2 tales que λ_2 está concentrada en A_2 y μ en B_2. Por tanto, $\lambda_1+\lambda_2$ está concentrada en $A=A_1 \cup A_2$, μ está concentrada en $B=B_1 \cap B_2$, y $A \cap B=\varnothing$.

d) Es obvio.

e) Supongamos que $\mu(E)=0$, y que $\{E_j\}$ es una partición de E. Entonces $\mu(E_j)=0$; como $\lambda \ll \mu$, $\lambda(E_j)=0$ para todo j, y $\Sigma|\lambda(E_j)|=0$. Esto implica $|\lambda|(E)=0$.

f) Como $\lambda_2 \perp \mu$, existe un conjunto A con $\mu(A)=0$ sobre el que está concentrada λ_2. Puesto que $\lambda_1 \ll \mu$, $\lambda_1(E)=0$ para todo $E \subset A$. Por tanto, λ_1 está concentrada sobre el complementario de A.

g) Por *f)*, las hipótesis de *g)* implican que $\lambda \perp \lambda$, y esto obliga claramente a que $\lambda=0$. ////

Volvemos ahora al teorema principal que se refiere a la continuidad absoluta. De hecho, es probablemente el teorema más importante en teoría de la medida. Lo enunciamos en primer lugar para medidas finitas positivas.

6.2.3. El teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym. *Sean μ y λ medidas positivas acotadas sobre una σ-álgebra $\mathcal{M}$ en un conjunto X.*

a) *Existe un par único de medidas λ_a y λ_s sobre $\mathcal{M}$ tal que*

$$\lambda=\lambda_a+\lambda_s, \qquad \lambda_a \ll \mu, \qquad \lambda_s \perp \mu. \tag{6.22}$$

Estas medidas son positivas, y $\lambda_a \perp \lambda_s$.

b) *Existe una única $h \in L^1(\mu)$ tal que*

$$\lambda_a(E)=\int_E h\, d\mu \qquad (E \in \mathcal{M}). \tag{6.23}$$

El par (λ_a, λ_s) se llama la *descomposición de Lebesgue* de λ relativa a μ. La unicidad de la descomposición se comprueba fácilmente, porque si (λ_a', λ_s') es otro par que satisface [6.22], entonces

$$\lambda_a'-\lambda_a=\lambda_s-\lambda_s', \tag{6.24}$$

$\lambda_a'-\lambda_a \ll \mu$, y $\lambda_s-\lambda_s' \perp \mu$, y, por tanto, ambos miembros de [6.24] son 0; hemos utilizado 6.2.2, *c)*, *d)* y *g)*.

La *existencia* de la descomposición es la parte significativa de *a)*.

La afirmación *b)* se conoce como el teorema de Radon-Nikodym. También aquí la unicidad de h es inmediata, a partir del teorema 1.10.5, *b)*. Además, si h es un miembro *cualquiera* de $L^1(\mu)$, la integral en [6.23] define una medida sobre $\mathcal{M}$ (teorema 1.8.8) que es claramente absolutamente continua con respecto a μ. El interés del teorema de Radon-Nikodym es el recíproco: *Toda* $\lambda \ll \mu$ (en cuyo caso $\lambda_a=\lambda$) se obtiene de esta forma.

La función h que aparece en [6.23] se llama la *derivada de Radon-Nikodym* de λ_a con respecto a μ. Como se observó después del teorema 1.8.8, podemos expresar [6.23] en la forma $d\lambda_a=h\, d\mu$, o también en la forma $h=d\lambda_a/d\mu$.

La idea de la demostración siguiente, que proporciona de una vez tanto *a)* como *b)*, se debe a VON NEUMANN.

DEMOSTRACIÓN. Pongamos $\phi=\lambda+\mu$. Entonces ϕ es una medida positiva acotada sobre $\mathcal{M}$. La definición de la suma de dos medidas muestra que

$$\int_X f\, d\phi=\int_X f\, d\lambda+\int_X f\, d\mu \tag{6.25}$$

para $f=\chi_E$; por tanto, para f simple, y, de este modo, para cualquier f medible no negativa. Si $f \in L^2(\phi)$, la desigualdad de Schwarz proporciona

$$\left|\int_X f\, d\lambda\right| \leqslant \int_X |f|\, d\lambda \leqslant \int_X |f|\, d\phi \leqslant \left\{\int_X |f|^2\, d\phi\right\}^{1/2} \{\phi(X)\}^{1/2};$$

como $\phi(X) < \infty$, la aplicación

$$f \to \int_X f\, d\lambda \qquad [6.26]$$

es un funcional lineal acotado sobre $L^2(\phi)$.

Sabemos que todo funcional lineal acotado sobre un espacio de Hilbert H viene dado mediante un producto interior con un elemento de H. Por tanto, existe un $g \in L^2(\phi)$ tal que

$$\int_X f\, d\lambda = \int_X fg\, d\phi \qquad (f \in L^2(\phi)). \qquad [6.27]$$

Obsérvese cómo el que $L^2(\phi)$ sea completo se ha utilizado para garantizar la existencia de la función g. Obsérvese también que aunque g está definida de manera única como elemento de $L^2(\lambda)$, g está determinada sólo en c.t.p. $[\phi]$ como una función de punto sobre X.

Pongamos $f = \chi_E$ en [6.27], para cualquier $E \in \mathcal{M}$ con $\phi(E) > 0$. El primer miembro de [6.27] es entonces $\lambda(E)$; y como $0 \leqslant \lambda \leqslant \phi$, tenemos

$$0 \leqslant \frac{1}{\phi(E)} \int_E g\, d\phi \leqslant 1. \qquad [6.28]$$

Por tanto, $g(x) \in [0, 1]$ para casi todo x (con respecto a ϕ), por el teorema 1.10.6. Podemos suponer en consecuencia que $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$ para todo $x \in X$, sin afectar a [6.27], y escribimos de nuevo [6.27] en la forma

$$\int_X (1-g) f\, d\lambda = \int_X fg\, d\mu \qquad (f \in L^2(\phi)). \qquad [6.29]$$

Pongamos

$$A = \{x : 0 \leqslant g(x) < 1\}, \qquad B = \{x : g(x) = 1\}, \qquad [6.30]$$

y definamos

$$\lambda_a(E) = \lambda(A \cap E), \qquad \lambda_s(E) = \lambda(B \cap E) \qquad (E \in \mathcal{M}). \qquad [6.31]$$

Si tomamos $f = \chi_B$ en [6.29], vemos que $\mu(B) = 0$. Entonces $\lambda_s \perp \mu$. Como g es acotada, se verifica [6.29] si cambiamos f por

$$(1 + g + \ldots + g^n)\chi_E,$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots, E \in \mathcal{M}$. Obtenemos entonces

$$\int_E (1 - g^{n+1})\, d\lambda = \int_E g(1 + g + \ldots + g^n)\, d\mu. \qquad [6.32]$$

En todo punto de B, $g(x) = 1$, y, por tanto, $1 - g^{n+1}(x) = 0$. En todo punto de A, $g^{n+1}(x) \to 0$ monótonamente. El primer miembro de [6.22] converge, por tanto, a $\lambda(A \cap E) = \lambda_a(E)$, cuando $n \to \infty$.

El integrando en el segundo miembro de [6.32] crece monótonamente a un

límite h medible no negativo, y el teorema de la convergencia monótona muestra que este segundo miembro tiende a $\int_E h\, d\mu$, cuando $n \to \infty$.

Hemos probado, pues, que [6.23] se verifica para todo $E \in \mathcal{M}$. Tomando $E = X$, vemos que $h \in L^1(\mu)$, ya que $\lambda_a(X) < \infty$.

Finalmente, [6.23] muestra que $\lambda_a \ll \mu$, lo que completa la demostración. ////

6.2.4. Extensiones del teorema 6.2.3. La demostración del teorema 6.2.3 dependía fuertemente de la hipótesis de que $\phi(X) < \infty$, es decir, que tanto μ como λ fueran medidas acotadas.

Si μ es σ-finita, entonces (por definición) X es una unión numerable de conjuntos X_n tales que $\mu(X_n) < \infty$. Podemos suponer que los X_n son disjuntos, porque si no lo fueran cambiaríamos $\{X_n\}$ por $\{Y_n\}$, donde $Y_1 = X_1$, y

$$Y_n = X_n - (Y_1 \cup \ldots \cup Y_{n-1}).$$

Para $n \geqslant 2$. Si es $\lambda(X) < \infty$, podemos aplicar el teorema 6.2.3 a cada X_n. Las descomposiciones de Lebesgue de las medidas $\lambda(E \cap X_n)$ se suman dando una descomposición de Lebesgue de λ; obtenemos funciones h_n sobre X_n que definen una función h sobre X, haciendo $h(x) = h_n(x)$ si $x \in X_n$; y como $\lambda(X) < \infty$, se deduce fácilmente que $h \in L^1(\mu)$.

Por otra parte, conservemos μ σ-finita y sea λ una medida compleja sobre $\mathcal{M}$; entonces $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, con λ_1 y λ_2 reales, y podemos aplicar el resultado precedente a las variaciones positiva y negativa de λ_1 y λ_2 (véase el apartado 6.1.6).

Se puede resumir lo anterior de la forma siguiente:

El teorema de descomposición de Lebesgue y el teorema de Radon-Nikodym son válidos si μ es una medida positiva σ-finita sobre $\mathcal{M}$ y si λ es una medida compleja sobre $\mathcal{M}$.

Si μ y λ son ambas positivas y σ-finitas, la mayor parte del teorema 6.2.3 se sigue verificando. Escribimos ahora $X = \cup X_n$, donde $\mu(X_n) < \infty$ y $\lambda(X_n) < \infty$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$ Las descomposiciones de Lebesgue de las medidas $\lambda(E \cap X_n)$ proporcionan también una descomposición de Lebesgue de λ, y seguimos obteniendo una función h que satisface [6.23]; sin embargo, deja de ser cierto que $h \in L^1(\mu)$, aunque h está «localmente en L^1», es decir, $\int_{X_n} h\, d\mu < \infty$ para cada n.

Finalmente, si prescindimos de la σ-finitud, encontramos situaciones en las que no se verifican los dos teoremas considerados. Por ejemplo, sea μ la medida de Lebesgue en $(0, 1)$ y sea λ la medida discreta sobre la σ-álgebra de todos los conjuntos Lebesgue medibles en $(0, 1)$. *Entonces λ no admite descomposición de Lebesgue relativa a μ, y aunque $\mu \ll \lambda$ y μ es acotada, no existe ninguna $h \in L^1(\lambda)$ tal que $d\mu = h\, d\lambda$.* Omitimos la fácil demostración.

El teorema siguiente puede explicar por qué la palabra «continuidad» se utiliza en conexión con la relación $\lambda \ll \mu$. Véase también el ejercicio 9, *b)*.

6.2.5. Teorema. *Supongamos que μ y λ son medidas sobre una σ-álgebra $\mathcal{M}$, μ positiva, y λ compleja. Entonces son equivalentes las siguientes dos condiciones:*

a) $\lambda \ll \mu$.

b) *A cada $\epsilon > 0$ le corresponde un $\delta > 0$ tal que $|\lambda(E)| < \epsilon$ para todo $E \in \mathcal{M}$ con $\mu(E) < \delta$.*

La propiedad *b)* se utiliza a veces como definición de continuidad absoluta. Sin embargo, *a)* no implica *b)* si λ es una medida positiva no acotada. Por ejemplo, sea μ la medida de Lebesgue en $(0, 1)$, y pongamos

$$\lambda(E) = \int_E t^{-1}\, dt$$

para todo conjunto Lebesgue medible $E \subset (0, 1)$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que se verifica *b)*. Si $\mu(E) = 0$, entonces $\mu(E) < \delta$ para todo $\delta > 0$, y, por tanto, $|\lambda(E)| < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$, con lo que $\lambda(E) = 0$. Así, *b)* implica *a)*.

Supongamos que *b)* es falso. Entonces existe un $\epsilon > 0$ y existen conjuntos $E_n \in \mathfrak{M}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ tales que $\mu(E_n) < 2^{-n}$ pero $|\lambda(E_n)| \geqslant \epsilon$. Por tanto, $|\lambda|(E_n) \geqslant \epsilon$. Pongamos

$$A_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} E_i, \qquad A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n. \tag{6.33}$$

Entonces $\mu(A_n) < 2^{-n+1}$, $A_n \supset A_{n+1}$, y, de este modo, el teorema 1.5.2, *e)* muestra que $\mu(A) = 0$ y que

$$|\lambda|(A) = \lim_{n \to \infty} |\lambda|(A_n) \geqslant \epsilon > 0,$$

ya que $|\lambda|(A_n) \geqslant |\lambda|(E_n)$.

Se deduce que no tenemos $|\lambda| \ll \mu$, y, por tanto, *a)* es falso, por la proposición 6.2.2, *e)*.

6.3. CONSECUENCIAS DEL TEOREMA DE RADON-NIKODYM

6.3.1. Teorema. *Sea μ una medida compleja sobre una σ-álgebra $\mathfrak{M}$ en X. Entonces existe una función medible h tal que $|h(x)| = 1$ para todo $x \in X$ y*

$$d\mu = h\, d|\mu|. \tag{6.34}$$

Por analogía con la representación de un número complejo como el producto de su valor absoluto por un número de valor absoluto igual a 1, la ecuación [6.34] se llama a veces la *representación polar* (o *descomposición polar)* de μ.

DEMOSTRACIÓN. Es trivial que $\mu \ll |\mu|$, y en consecuencia el teorema de Radon-Nikodym garantiza la existencia de alguna $h \in L^1(|\mu|)$ que verifica [6.34].

Sea $A_r = \{x : |h(x)| < r\}$, donde r es algún número positivo, y sea $\{E_j\}$ una partición de A_r. Entonces

$$\sum_j |\mu(E_j)| = \sum_j \left| \int_{E_j} h\, d|\mu| \right| \ll \sum_j r|\mu|(E_j) = r|\mu|(A_r),$$

así que $|\mu|(A_r) \leqslant r|\mu|(A_r)$. Si $r < 1$, se ha de tener $|\mu|(A_r) = 0$. Entonces $|h| \geqslant 1$ en c. t. p.

Por otra parte, si $|\mu|(E) > 0$, [6.34] muestra que

$$\left| \frac{1}{|\mu|(E)} \int_E h \, d|\mu| \right| = \frac{|\mu(E)|}{|\mu|(E)} \leqslant 1.$$

Aplicamos ahora el teorema 1.10.6 (con el disco unidad cerrado en lugar de S) y concluimos que $|h| \leqslant 1$ en c.t.p.

Sea $B = \{x \in X : |h(x)| \neq 1\}$. Hemos demostrado que $|\mu|(B) = 0$, y si volvemos a definir h sobre B de tal modo que $h(x) = 1$ sobre B, obtenemos una función con las propiedades buscadas. ////

6.3.2. Teorema. *Supongamos que μ es una medida positiva sobre $\mathcal{M}$, $g \in L^1(\mu)$, y*

$$\lambda(E) = \int_E g \, d\mu \qquad (E \in \mathcal{M}). \tag{6.35}$$

Entonces

$$|\lambda|(E) = \int_E |g| \, d\mu \qquad (E \in \mathcal{M}). \tag{6.36}$$

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema 6.3.1, existe una función h, de valor absoluto igual 1, tal que $d\lambda = h \, d|\lambda|$. Por hipótesis, $d\lambda = g \, d\mu$. En consecuencia,

$$h \, d|\lambda| = g \, d\mu.$$

Esto proporciona $d|\lambda| = \bar{h} g \, d\mu$. (Compárese con el teorema 1.8.8.)

Como $|\lambda| \geqslant 0$ y $\mu \geqslant 0$, se tiene que $\bar{h} g \geqslant 0$ en c.t.p. $[\mu]$, de modo que $\bar{h} g = |g|$ en c.t.p. $[\mu]$.

6.3.3. El teorema de descomposición de Hahn. *Sea μ una medida real sobre una σ-álgebra $\mathcal{M}$ en un conjunto X. Entonces existen conjuntos A y $B \in \mathcal{M}$ tales que $A \cup B = X$, $A \cap B = \varnothing$, y de modo que las variaciones positiva y negativa, μ^+ y μ^-, de μ verifican*

$$\mu^+(E) = \mu(A \cap E), \qquad \mu^-(E) = -\mu(B \cap E) \qquad (E \in \mathcal{M}). \tag{6.37}$$

En otras palabras, X es la unión de dos conjuntos medibles disjuntos A y B, tales que «A lleva toda la masa positiva de μ» [puesto que [6.37] implica que $\mu(E) \geqslant 0$ si $E \subset A$] y «B lleva toda la masa negativa de μ" [puesto que $\mu(E) \leqslant 0$ si $E \subset B$]. El par (A, B) se llama descomposición de Hahn de X, inducida por μ.

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema 6.3.1, $d\mu = h \, d|\mu|$, donde $|h| = 1$. Como μ es real, se tiene que h es real (en c.t.p., y, por tanto, en todo punto, volviéndola a definir sobre un conjunto de medida 0), en consecuencia, $h = \pm 1$. Pongamos

$$A = \{x : h(x) = 1\}, \qquad B = \{x : h(x) = -1\}. \tag{6.38}$$

Como $\mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu)$, y

$$\tfrac{1}{2}(1 + h) = \begin{cases} h & \text{en } A \\ 0 & \text{en } B \end{cases} \tag{6.39}$$

tenemos, para cualquier $E \in \mathcal{M}$,

$$\mu^+(E) = \tfrac{1}{2}\int_E (1+h)\, d|\mu| = \int_{E\cap A} h\, d|\mu| = \mu(E \cap A). \qquad [6.40]$$

Puesto que $\mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \cap B)$ y como $\mu = \mu^+ - \mu^-$, la segunda mitad mitad de [6.37] se deduce de la primera. ////

Corolario. *Si $\mu = \lambda_1 - \lambda_2$, donde λ_1 y λ_2 son medidas positivas, entonces $\lambda_1 \geqslant \mu^+$ y $\lambda_2 = \mu^-$.*

Esta es la propiedad de mínimo de la descomposición de Jordan que se mencionó en el apartado 6.1.6.

DEMOSTRACIÓN. Como $\mu \leqslant \lambda_1$, tenemos

$$\mu^+(E) = \mu(E \cap A) \leqslant \lambda_1(E \cap A) \leqslant \lambda_1(E).$$

6.4. FUNCIONALES LINEALES ACOTADOS SOBRE L^p

6.4.1. Ejemplo. Sea μ una medida positiva, supongamos $1 \leqslant p \leqslant \infty$, y sea q el exponente conjugado a p. La desigualdad de Hölder (teorema 3.2.3) muestra que si $g \in L^q(\mu)$ y si Φ_g se define mediante

$$\Phi_g(f) = \int_X fg\, d\mu, \qquad [6.41]$$

entonces Φ_g es un funcional lineal acotado sobre $L^p(\mu)$, cuya norma es a lo sumo $\|g\|_q$. Surge naturalmente la cuestión de si todos los funcionales lineales acotados sobre $L^p(\mu)$ tienen esta forma, y si esa representación es única.

Para $p = \infty$, la respuesta es negativa: $L^1(\mu)$ no suministra todos los funcionales lineales acotados sobre $L^\infty(\mu)$. Para $1 < p < \infty$, la respuesta es afirmativa. Es también afirmativa para $p = 1$, si se excluyen algunas patologías de teoría de la medida. Para espacios de medida σ-finitos, no surge ninguna dificultad, y nos limitaremos a este caso.

6.4.2. Teorema. *Supongamos que $1 \leqslant p < \infty$, que μ es una medida positiva σ-finita sobre X, y que Φ es un funcional lineal acotado sobre $L^p(\mu)$. Entonces existe una única $g \in L^q(\mu)$, donde q es el exponente conjugado de p, tal que*

$$\Phi(f) = \int_X fg\, d\mu \qquad (f \in L^p(\mu)). \qquad [6.42]$$

Además, si Φ y g están relacionados como en [6.42], *tenemos*

$$\|\Phi\| = \|g\|_q. \qquad [6.43]$$

En otras palabras, bajo las condiciones enunciadas, $L^q(\mu)$ es isométricamente isomorfo al espacio dual de $L^p(\mu)$.

DEMOSTRACIÓN. La unicidad de g es clara, porque si g y g' satisfacen [6.42], la integral de $g - g'$ sobre cualquier conjunto medible E de medida finita es 0

(como podemos ver tomando χ_E como f), y el que μ sea σ-finita implica en consecuencia que $g-g'=0$ en c.t.p.

Por otro lado, si se verifica [6.42], la desigualdad de Hölder implica

$$\|\Phi\| \leqslant \|g\|_q. \qquad [6.44]$$

Por tanto, queda por demostrar que g existe y que se verifica la igualdad en [6.44]. Si $\|\Phi\|=0$, [6.42] y [6.43] se verifican con $g=0$. Por tanto, suponemos $\|\Phi\| > 0$.

Consideramos primero el caso $\mu(X) < \infty$.

Para cualquier conjunto medible $E \subset X$, definimos

$$\lambda(E)=\Phi(\chi_E).$$

Como Φ es lineal, y $\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B$ si A y B son disjuntos, vemos que λ es aditiva. Para demostrar la aditividad numerable, supongamos que E es la unión numerable de conjuntos medibles disjuntos E_i, pongamos $A_k=E_1 \cup \ldots \cup E_k$, y notemos que

$$\|\chi_E-\chi_{A_k}\|_p=[\mu(E-A_k)]^{1/p} \to 0 \qquad (k \to \infty); \qquad [6.45]$$

la continuidad de Φ muestra que $\lambda(A_k) \to \lambda(E)$. Por tanto, λ es una medida compleja. (En [6.45] se ha utilizado la hipótesis $p < \infty$.) Es claro que $\lambda(E)=0$ si $\mu(E)=0$, porque entonces $\|\chi_E\|_p=0$. Por tanto, $\lambda \ll \mu$, y el teorema de Radon-Nikodym asegura la existencia de una función $g \in L^1(\mu)$ tal que, para todo conjunto medible $E \subset X$,

$$\Phi(\chi_E)=\int_E g\, d\mu=\int_X \chi_E g\, d\mu. \qquad [6.46]$$

Se deduce por linealidad que la expresión

$$\Phi(f)=\int_X fg\, d\mu \qquad [6.47]$$

se verifica para toda f simple medible, y, por tanto, también para toda $f \in L^\infty(\mu)$, puesto que toda $f \in L^\infty(\mu)$ es un límite uniforme de funciones simples f_i. Nótese que la convergencia uniforme de f_i a f implica que $\|f_i-f\| \to 0$, y entonces $\Phi(f_i) \to \Phi(f)$, cuando $i \to \infty$.

Queremos concluir que $g \in L^q(\mu)$ y que se verifica [6.43]; lo mejor es dividir en razonamiento en dos casos.

Caso 1. $p=1$. Aquí [6.46] muestra que

$$\left|\int_E g\, d\mu\right| \leqslant \|\Phi\| \cdot \|\chi_E\|_1=\|\Phi\| \cdot \mu(E)$$

para todo $E \in \mathcal{M}$. Por el teorema 1.10.6 $|g(x)| \leqslant \|\Phi\|$ en c.t.p., de modo que $\|g\|_\infty \leqslant \|\Phi\|$.

Caso 2. $1 < p < \infty$. Existe una función medible α, $|\alpha|=1$, tal que $\alpha g=|g|$ [proposición 1.2.8, *e*)]. Sea $E_n=\{x: |g(x)| \leqslant n\}$, y definamos $f=\chi_{E_n}|g|^{q-1}\alpha$. En-

tonces $|f|^p = |g|^q$ en E_n, $f \in L^\infty(\mu)$, y [6.47] proporciona

$$\int_{E_n} |g|^q \, d\mu = \int_X fg \, d\mu = \Phi(f) \leqslant \|\Phi\| \left\{ \int_{E_n} |g|^q \right\}^{1/p},$$

de modo que

$$\int_X \chi_{E_n} |g|^q \, d\mu \leqslant \|\Phi\|^q \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \qquad [6.48]$$

Si aplicamos el teorema de la convergencia monótona a [6.48], obtenemos $\|g\|_q \leqslant \|\Phi\|$.

Entonces [6.43] se verifica y $g \in L^q(\mu)$. Se deduce que ambos miembros de [6.47] son funciones continuas sobre $L^p(\mu)$. Estas funciones coinciden sobre el subconjunto denso $L^\infty(\mu)$ de $L^p(\mu)$; por tanto, coinciden sobre todo el espacio $L^p(\mu)$, lo que completa la demostración si $\mu(X) < \infty$.

Si $\mu(X) = \infty$ pero μ es σ-finita, X es la unión numerable de conjuntos disjuntos X_n con $0 < \mu(X_n) < \infty$. Definamos $h : X \to (0, \infty)$ mediante

$$h(x) = 1/n^2 \mu(X_n) \qquad \text{si } x \in X_n. \qquad [6.49]$$

Entonces $h \in L^1(\mu)$ y

$$\tilde{\mu}(E) = \int_E h \, d\mu \qquad (E \in \mathcal{M}) \qquad [6.50]$$

define una medida finita $\tilde{\mu}$. Notemos que $F \to h^{1/2} F$ es una isometría lineal de $L^p(\tilde{\mu})$ sobre $L^p(\mu)$. En consecuencia

$$\Psi(F) = \Phi(h^{1/p} F) \qquad [6.51]$$

define un funcional lineal acotado Ψ sobre $L^p(\tilde{\mu})$, con $\|\Psi\| = \|\Phi\|$.

La primera parte de la demostración muestra ahora que existe $G \in L^q(\tilde{\mu})$ tal que

$$\Psi(F) = \int_X FG \, d\tilde{\mu} \qquad (F \in L^p(\tilde{\mu})). \qquad [6.52]$$

Pongamos $g = h^{1/q} G$. (Si $p = 1$, $g = G$.) Entonces

$$\int_X |g|^q \, d\mu = \int_X |G|^q \, d\tilde{\mu} = \|\Psi\|^q = \|\Phi\|^q \qquad [6.53]$$

si $p > 1$, mientras que $\|g\|_\infty = \|G\|_\infty = \|\Psi\| = \|\Phi\|$ si $p = 1$. Entonces [6.43] se verifica, y como $G \, d\tilde{\mu} = h^{1/p} g \, d\mu$, obtenemos finalmente

$$\Phi(f) = \Psi(h^{-1/p} f) = \int_X h^{-1/p} f G \, d\tilde{\mu} = \int_X fg \, d\mu \qquad [6.54]$$

para toda $f \in L^p(\mu)$. ////

6.4.3. Nota. Hemos encontrado ya el caso especial $p = q = 2$ del teorema 6.4.2. De hecho, la demostración del caso general se ha basado en este

caso especial, porque hemos utilizado nuestro conocimiento de los funcionales lineales acotados sobre $L^2(\mu)$ en la demostración del teorema de Radon-Nikodym, y éste ha sido la clave en la demostración del teorema 6.4.2. El caso especial $p=2$, a su vez, depende de que $L^2(\mu)$ es completo, por el hecho de que entonces es un espacio de Hilbert y en él los funcionales lineales acotados vienen dados mediante productos interiores.

Volvemos ahora a la versión compleja del teorema 2.3.1.

6.5. EL TEOREMA DE REPRESENTACION DE RIESZ

6.5.1. Definición. Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto. El teorema 2.3.1 caracteriza los funcionales lineales *positivos* sobre $C_c(X)$. Estamos ahora en condiciones de caracterizar los funcionales lineales acotados Φ sobre $C_c(X)$. Como $C_c(X)$ es un subespacio denso de $C_0(X)$, relativo a la norma del supremo, cada uno de estos funcionales Φ posee una única extensión a un funcional lineal acotado sobre $C_0(X)$. En consecuencia, podemos también suponer desde el principio que estamos tratando con el espacio de Banach $C_0(X)$.

Si μ es una medida de Borel compleja, el teorema 6.3.1 afirma que existe una función de Borel compleja h con $|h|=1$ tal que $d\mu=h\,d|\mu|$. Es razonable, por tanto, el definir la integración con respecto a una medida compleja μ mediante

$$\int f\,d\mu=\int fh\,d|\mu|. \qquad [6.55]$$

La relación $\int \chi_E\,d\mu=\mu(E)$ es un caso especial de [6.55]. Entonces

$$\int_X \chi_E d(\mu+\lambda)=(\mu+\lambda)(E)=\mu(E)+\lambda(E)=\int_X \chi_E\,d\mu+\int_X \chi_E\,d\lambda \qquad [6.56]$$

si μ y λ son medidas complejas sobre $\mathcal{M}$ y $E\in\mathcal{M}$. Esto lleva a la fórmula de adición

$$\int_X fd(\mu+\lambda)=\int_X f\,d\mu+\int_X f\,d\lambda, \qquad [6.57]$$

que es válida (por ejemplo) para toda f medible acotada.

Llamaremos *regular* a una medida de Borel compleja μ sobre X, si $|\mu|$ es regular en el sentido de la definición 2.4.1. Si μ es una medida de Borel compleja sobre X, es claro que la aplicación

$$f\to\int_X f\,d\mu \qquad [6.58]$$

es un funcional lineal acotado sobre $C_0(X)$, cuya norma no es mayor que $|\mu|(X)$. Que *todo* funcional lineal acotado sobre $C_0(X)$ se obtenga de esta forma, es el contenido del teorema de Riesz:

6.5.2. Teorema. *A cada funcional lineal acotado Φ sobre $C_0(X)$, donde X es un espacio de Hausdorff localmente compacto, le corresponde una única medida de Borel compleja regular μ tal que*

$$\Phi(f)=\int_X f\,d\mu \qquad (f\in C_0(X)). \tag{6.59}$$

Además, si Φ y μ están relacionados mediante [6.59], *entonces*

$$\|\Phi\|=|\mu|(X). \tag{6.60}$$

DEMOSTRACIÓN. Establezcamos en primer lugar la cuestión de la unicidad. Supongamos que μ es una medida de Borel compleja regular sobre X y que $\int f\,d\mu=0$ para toda $f\in C_0(X)$. Por el teorema 6.3.1, existe una función de Borel h, con $|\mu|=1$, tal que $d\mu=h\,d|\mu|$. Para cualquier sucesión $\{f_n\}$ en $C_0(X)$ tenemos entonces

$$|\mu|(X)=\int_X(\bar{h}-f_n)h\,d|\mu|\leqslant\int_X|\bar{h}-f_n|\,d|\mu|, \tag{6.61}$$

y como $C_c(X)$ es denso en $L^1(|\mu|)$ (teorema 3.3.1), puede elegirse $\{f_n\}$ de tal forma que la última expresión en [6.61] tienda a 0 cuando $n\to\infty$. Entonces $|\mu|(X)=0$ y $\mu=0$. Es fácil ver que la diferencia entre dos medidas de Borel complejas regulares sobre X es regular. Esto prueba que a lo sumo una μ corresponde a cada Φ.

Consideremos ahora un funcional lineal acotado dado Φ sobre $C_0(X)$. Supongamos $\|\Phi\|=1$ sin pérdida de generalidad. Construiremos un funcional lineal *positivo* Λ sobre $C_c(X)$, tal que

$$|\Phi(f)|\leqslant\Lambda(|f|)\leqslant\|f\| \qquad (f\in C_c(X)), \tag{6.62}$$

donde $\|f\|$ denota la norma del supremo.

Una vez que tenemos este Λ, le asociamos una medida de Borel positiva λ, como en el teorema 2.3.1. La conclusión del teorema muestra que λ es regular si $\lambda(X)<\infty$. Como

$$\lambda(X)=\sup\{\Lambda f\colon 0\leqslant f\leqslant 1,\ f\in C_c(X)\}$$

y puesto que $|\Lambda f|\leqslant 1$ si $\|f\|\leqslant 1$, vemos que realmente $\lambda(X)\leqslant 1$.

Deducimos también de [6.62] que

$$|\Phi(f)|\leqslant\Lambda(|f|)=\int_X|f|\,d\lambda=\|f\|_1 \qquad (f\in C_c(X)). \tag{6.63}$$

La última norma se refiere al espacio $L^1(\lambda)$. Entonces Φ es un funcional lineal sobre $C_c(X)$ de norma 1 a lo sumo, *con respecto a la norma $L^1(\lambda)$ sobre $C_c(X)$*. Existe una extensión de Φ a un funcional lineal sobre $L^1(\lambda)$ que preserva la norma, y, en consecuencia, el teorema 6.4.2 (el caso $p=1$) proporciona una función de Borel g, con $|g|\leqslant 1$, tal que

$$\Phi(f)=\int_X fg\,d\lambda \qquad (f\in C_c(X)). \tag{6.64}$$

Cada miembro de [6.64] es un funcional lineal sobre $C_0(X)$, y $C_c(X)$ es denso en $C_0(X)$. Por tanto, [6.64] se verifica para toda $f \in C_0(X)$, y obtenemos la representación [6.59] con $d\mu = g\, d\lambda$.

Como $\|\Phi\| = 1$, [6.64] muestra que

$$\int_X |g|\, d\lambda \geqslant \sup\{|\Phi(f)| : f \in C_0(X), \|f\| \leqslant 1\} = 1. \qquad [6.65]$$

Sabemos también que $\lambda(X) \leqslant 1$ y $|g| \leqslant 1$. Estos hechos son compatibles sólo si $\lambda(X) = 1$ y $|g| = 1$ en c.t.p. $[\lambda]$. Entonces $d|\mu| = |g|\, d\lambda = d\lambda$, por el teorema 6.3.2, y

$$|\mu|(X) = \lambda(X) = 1 = \|\Phi\|, \qquad [6.66]$$

que demuestra [6.60].

Por tanto, todo depende de obtener un funcional lineal positivo Λ que satisfaga [6.62]. Si $f \in C_c^+(X)$ (la clase de todos los elementos no negativos de $C_c(X)$), definimos

$$\Lambda f = \sup\{|\Phi(h)| : h \in C_c(X), |h| \leqslant f\}. \qquad [6.67]$$

Entonces $\Lambda f \geqslant 0$, Λ satisface [6.62], $0 \leqslant f_1 \leqslant f_2$ implica $\Lambda f_1 \leqslant \Lambda f_2$, y $\Lambda(cf) = c\Lambda f$ si c es una constante positiva. Tenemos que probar que

$$\Lambda(f+g) = \Lambda f + \Lambda g \qquad (f \text{ y } g \in C_c^+(X)), \qquad [6.68]$$

y, por tanto, tenemos que extender Λ como funcional lineal sobre $C_c(X)$.

Fijemos f y $g \in C_c^+(X)$. Si $\epsilon > 0$, existen h_1 y $h_2 \in C_c(X)$ tales que $|h_1| \leqslant f$, $|h_2| \leqslant g$, y

$$\Lambda f \leqslant |\Phi(h_1)| + \epsilon, \qquad \Lambda g \leqslant |\Phi(h_2)| + \epsilon. \qquad [6.69]$$

Existen números complejos α_i, $|\alpha_i| = 1$, de modo que $\alpha_i \Phi(h_i) = |\Phi(h_i)|$, $i = 1, 2, \ldots$ Entonces

$$\begin{aligned} \Lambda f + \Lambda g &\leqslant |\Phi(h_1)| + |\Phi(h_2)| + 2\epsilon \\ &= \Phi(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2) + 2\epsilon \\ &\leqslant \Lambda(|h_1| + |h_2|) + 2\epsilon \\ &\leqslant \Lambda(f+g) + 2\epsilon, \end{aligned}$$

de manera que en [6.68] se verifica la desigualdad $\geqslant$.

Por otra parte, tomemos $h \in C_c(X)$, sujeta solamente a la condición $|h| = f + g$, sea $V = \{x : f(x) + g(x) > 0\}$, y definamos

$$\begin{aligned} &h_1(x) = \frac{f(x)h(x)}{f(x)+g(x)}, \qquad h_2(x) = \frac{g(x)h(x)}{f(x)+g(x)} \qquad (x \in V), \\ &h_1(x) = h_2(x) = 0 \qquad (x \notin V). \end{aligned} \qquad [6.70]$$

Es claro que h es continua en todo punto de V. Si $x_0 \notin V$, se tiene $h(x_0) = 0$; como h es continua y $|h_1(x)| \leqslant |h(x)|$ para todo $x \in X$, se deduce que x_0 es un punto de continuidad de h_1. Por tanto, $h_1 \in C_c(X)$, y lo mismo ocurre con h_2.

Puesto que $h_1+h_2=h$ y $|h_1|\leqslant f$, $|h_2|\leqslant g$, tenemos

$$|\Phi(h)|=|\Phi(h_1)+\Phi(h_2)|\leqslant|\Phi(h_1)|+|\Phi(h_2)|\leqslant\Lambda f+\Lambda g.$$

En consecuencia, $\Lambda(f+g)=\Lambda f+\Lambda g$, y [6.68] queda demostrado.

Si f es ahora una función real, $f\in C_c(X)$, entonces $2f^+=|f|+f$, así que $f^+\in C_c^+(X)$; de la misma manera, $f^-\in C_c^+(X)$; como $f=f^+-f^-$, es natural definir

$$\Lambda f=\Lambda f^+-\Lambda f^- \qquad (f\in C_c(X),\ f \text{ real}) \tag{6.71}$$

y

$$\Lambda(u+iv)=\Lambda u+i\Lambda v. \tag{6.72}$$

Manipulaciones algebraicas simples, como las de la demostración del teorema 1.9.3, muestran que el funcional extendido Λ es lineal sobre $C_c(X)$.

Esto completa la demostración. ////

EJERCICIOS

1. Si μ es una medida compleja sobre una σ-álgebra $\mathcal{M}$, defínase

$$\lambda(E)=\sup\Sigma\,|\mu(E_i)|,$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones *finitas* $\{E_i\}$ de E. ¿Puede deducirse que $\lambda=|\mu|$?

2. Demuéstrese que el ejemplo dado al final del apartado 6.2.4 tiene las propiedades enunciadas.

3. Demuéstrese que el espacio vectorial $M(X)$ de todas las medidas de Borel complejas regulares sobre un espacio de Hausdorff localmente compacto es un espacio de Banach si $\|\mu\|=|\mu|(X)$.

Sugerencia: Compárese con el ejercicio 8 del capítulo 5. (Que la diferencia de dos elementos cualesquiera de $M(X)$ está en $M(X)$ se utilizó en el primer parágrafo de la demostración del teorema 6.5.2; dese una demostración de ello.)

4. Supóngase que $1\leqslant p\leqslant\infty$, y que q es el exponente conjugado de p. Supóngase que μ es una medida σ-finita y g una función medible tal que $fg\in L^1(\mu)$ para toda $f\in L^p(\mu)$. Pruébese que entonces $g\in L^q(\mu)$.

5. Supóngase que X consta de dos puntos a y b; defínase $\mu(\{a\})=1$, $\mu(\{b\})=\mu(X)=\infty$, y $\mu(\varnothing)=0$. ¿Es cierto, para esta μ, que $L^\infty(\mu)$ es el espacio dual de $L^1(\mu)$?

6. Supóngase $1<p<\infty$ y demuésetrese que $L^q(\mu)$ es el espacio dual de $L^p(\mu)$ aunque μ no sea σ-finita. (Como siempre, $1/p+1/q=1$.)

7. Supóngase que μ es una medida de Borel compleja en $[0, 2\pi]$ (o sobre la circunferencia unidad T) y defínanse los coeficientes de Fourier de μ mediante

$$\hat{\mu}(n)=\int e^{-int}\,d\mu(t) \qquad (n=0, \pm1, \pm2, \ldots).$$

Supóngase que $\hat{\mu}(n)\to0$ cuando $n\to+\infty$ y demuéstrese que entonces $\hat{\mu}(n)\to0$ cuando $n\to-\infty$.

Sugerencia: La hipótesis también se verifica para $f\,d\mu$ en lugar de $d\mu$ si f es un polinomio trigonométrico cualquiera, y, por tanto, si f es continua, así como si f es una función de Borel acotada cualquiera, y, en consecuencia, también se verifica si $d\mu$ se cambia por $d|\mu|$.

8. En la terminología del ejercicio 7, obténganse todas las μ tales que $\hat{\mu}$ sea periódica con periodo k. (Esto significa que $\hat{\mu}(n+k)=\hat{\mu}(n)$ para todo entero n; por supuesto, se supone que k es también un entero.)

9. Supóngase que μ es una medida *finita* positiva sobre una σ-álgebra $\mathcal{M}$. Si $A \in \mathcal{M}$ y $B \in \mathcal{M}$, defínase

$$\rho(A, B)=\int |\chi_A-\chi_B|\, d\mu=\mu(A \,\Delta\, B),$$

donde la *diferencia simétrica* $A \,\Delta\, B$ viene dada por

$$A \,\Delta\, B=(A-B) \cup (B-A).$$

a) Demuéstrese que ρ es una métrica y que $(\mathcal{M}, \rho)$ es un espacio métrico *completo.*

b) Si λ es una medida compleja sobre $\mathcal{M}$, demuéstrese que cada uno de los siguientes tres enunciados implica los otros dos:

1) λ es una función continua sobre $\mathcal{M}$.
2) λ es continua en $\varnothing$.
3) $\lambda \ll \mu$.

10. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida positiva. Un conjunto $\Phi \subset L^1(\mu)$ se llama *uniformemente integrable* si a cada $\epsilon > 0$ le corresponde un $\delta > 0$ tal que

$$\left| \int_E f\, d\mu \right| < \epsilon$$

si $f \in \Phi$ y $\mu(E) < \delta$.

a) Pruébese que todo subconjunto finito de $L^1(\mu)$ es uniformemente integrable.

b) Demuéstrese el siguiente teorema de convergencia de Vitali:

Si 1) $\mu(X) < \infty$, 2) $\{f_n\}$ *es uniformemente integrable,* 3) $f_n(x) \to f(x)$ *en c.t.p. cuando* $n \to \infty$, *y* 4) $|f(x)| < \infty$ *en c.t.p., entonces* $f \in L^1(\mu)$ *y*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n-f|\, d\mu=0.$$

Sugerencia: Utilícese el teorema de Egoroff.

c) Demuéstrese que *b)* no se verifica si μ es la medida de Lebesgue en $(-\infty, \infty)$, aunque se suponga que $\{\|f_n\|_1\}$ es acotada. En consecuencia, la hipótesis 1) no puede omitirse en *b).*

d) Demuéstrese que la hipótesis 4) es redundante en *b)* para alguna μ (por ejemplo, para la medida de Lebesgue sobre un intervalo acotado), pero que existen medidas finitas para las que la omisión de 4) haría falso *b).*

e) Demuéstrese que el teorema de Vitali implica el teorema de la convergencia dominada en Lebesgue, para espacios de medida finita. Constrúyase un ejemplo en el que pueda aplicarse el teorema de Vitali aunque no se verifiquen las hipótesis del teorema de Lebesgue.

f) Constrúyase una sucesión $\{f_n\}$, por ejemplo en $[0, 1]$, tal que $f_n(x) \to 0$ para todo x, $\int f_n \to 0$, pero que $\{f_n\}$ no sea uniformemente integrable (con respecto a la medida de Lebesgue).

g) Sin embargo, es cierto el siguiente recíproco del teorema de Vitali: *Supón-*

gase que $\mu(X) < \infty$, $f \in L^1(\mu)$, $\{f_n\} \subset L^1(\mu)$, $f_n(x) \to f(x)$ *en c.t.p., y*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu$$

para todo $E \in \mathcal{M}$. *Entonces* $\{f_n\}$ *es uniformemente integrable.*

Demuéstrese completando el siguiente esquema.

Tómese $f=0$. Fíjese $\epsilon > 0$. Defínase ρ como en el ejercicio 9. Para cada n,

$$E \to \int_E f_n d\mu$$

es una función continua sobre $(\mathcal{M}, \rho)$. Por el ejercicio 13, *b)*, del capítulo 5, existe $E_0 \in \mathcal{M}$, $\delta > 0$ y N, tales que

$$\left| \int_E f_n \, d\mu \right| < \epsilon \quad \text{si} \quad n \geqslant N \quad \text{y} \quad \rho(E, E_0) < \delta.$$

Tómese $A \in \mathcal{M}$ con $\mu(A) < \delta$, y póngase $B = E_0 - A$, $C = E_0 \cup A$. La desigualdad precedente se verifica entonces con B y C en lugar de E. Nótese que $\chi_A = \chi_C - \chi_B$. Conclúyase que

$$\left| \int_A f_n \, d\mu \right| < 2\epsilon \text{ si } n \geqslant N.$$

si $n \geqslant N$. Finalmente, acúdase a *a)*.

11. Supóngase que μ es una medida positiva sobre X, $\mu(X) < \infty$, $f_n \in L^1(\mu)$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, $f_n(x) \to f(x)$ en c.t.p., y que existe $p > 1$ y $C < \infty$ tales que

$$\int_X |f_n|^p \, d\mu < C \text{ para todo } n.$$

Demuéstrese que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f - f_n| \, d\mu = 0.$$

Sugerencia: $\{f_n\}$ es uniformemente integrable.

INTEGRACION EN ESPACIOS PRODUCTO

Este capítulo está dedicado a la demostración y discusión del teorema de Fubini, relativo a la integración de funciones de dos variables. Presentamos en primer lugar el teorema en su forma abstracta.

7.1. MEDIBILIDAD EN PRODUCTOS CARTESIANOS

7.1.1. Definiciones. Si X e Y son dos conjuntos, su *producto cartesiano* $X \times Y$ es el conjunto de todos los pares ordenados (x, y), con $x \in X$ e $y \in Y$. Si $A \subset X$ y $B \subset Y$, se tiene que $A \times B \subset X \times Y$. A cualquier conjunto de la forma $A \times B$ lo llamaremos un *rectángulo* en $X \times Y$.

Supongamos ahora que $(X, \mathcal{S})$ y $(Y, \mathcal{T})$ son espacios medibles. Recordemos que esto significa simplemente que $\mathcal{S}$ es una σ-álgebra en X y que $\mathcal{T}$ es una σ-álgebra en Y.

Un *rectángulo medible* es un conjunto cualquiera de la forma $A \times B$, donde $A \in \mathcal{S}$ y $B \in \mathcal{T}$.

Si $Q = R_1 \cup \ldots \cup R_n$, donde cada R_i es un rectángulo medible y $R_i \cap R_j = \varnothing$ para $i \neq j$, decimos que $Q \in \mathcal{E}$, la clase de los *conjuntos elementales.*

$\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ se define como la más pequeña σ-álgebra en $X \times Y$ que contiene a todo rectángulo medible.

Una *clase monótona* $\mathcal{M}$ es una colección de conjuntos con las propiedades siguientes: Si $A_i \in \mathcal{M}$, $B_i \in \mathcal{M}$, $A_i \subset A_{i+1}$, $B_i \supset B_{i+1}$, para $i = 1, 2, 3, \ldots$, y si

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \qquad B = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i, \tag{7.1}$$

entonces $A \in \mathcal{M}$ y $B \in \mathcal{M}$.

Si $E \subset X \times Y$, $x \in X$, $y \in Y$, definimos

$$E_x = \{y : (x, y) \in E\}, \quad E^y = \{x : (x, y) \in E\}. \tag{7.2}$$

Llamamos a E_x y E^y las *x-sección* e *y-sección,* respectivamente, de E. Nótese que $E_x \subset Y$, $E^y \subset X$.

7.1.2. Teorema. *Si $E \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$, entonces $E_x \in \mathcal{T}$ y $E^y \in \mathcal{S}$, para todo $x \in X$ e $y \in Y$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea Ω la clase de todos los $E \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$ tales que $E_x \in \mathcal{T}$ para todo $x \in X$. Si $E = A \times B$, entonces $E_x = B$ si $x \in A$, $E_x = \varnothing$ si $x \notin A$. Por

tanto, todo rectángulo medible pertenece a Ω. Como $\mathcal{J}$ es una σ-álgebra, los siguientes tres enunciados se verifican. Demuestran que Ω es una σ-álgebra y que $\Omega = \mathcal{S} \times \mathcal{J}$:

a) $X \times Y \in \Omega$.
b) Si $E \in \Omega$, entonces $(E^c)_x = (E_x)^c$, y, por tanto, $E^c \in \Omega$.
c) Si $E_i \in \Omega$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ y $E = \bigcup E_i$, entonces $E_x = \bigcup (E_i)_x$, por lo que $E \in \Omega$.

La demostración es la misma para E^y. ////

7.1.3. Teorema. *$\mathcal{S} \times \mathcal{J}$ es la clase monótona más pequeña que contiene a todos los conjuntos elementales.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{M}$ la clase monótona más pequeña que contiene a $\mathcal{E}$; la demostración de que esta clase existe es exactamente igual que la del teorema 1.2.9. Como $\mathcal{S} \times \mathcal{J}$ es una clase monótona, tenemos $\mathcal{M} \subset \mathcal{S} \times \mathcal{J}$.

Las identidades

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2),$$
$$(A_1 \times B_1) - (A_2 \times B_2) = [(A_1 - A_2) \times B_1] \cup [(A_1 \cap A_2) \times (B_1 - B_2)]$$

muestran que la intersección de dos rectángulos medibles también lo es y que su diferencia es la unión de dos rectángulos medibles disjuntos, y, por tanto, que es un conjunto elemental. Si $P \in \mathcal{E}$ y $Q \in \mathcal{E}$, se deduce fácilmente que $P \cap Q \in \mathcal{E}$ y $P - Q \in \mathcal{E}$. Como

$$P \cup Q = (P - Q) \cup Q$$

y $(P - Q) \cap Q = \emptyset$, tenemos también $P \cup Q \in \mathcal{E}$.

Para un conjunto cualquiera $P \subset X \times Y$, definimos $\Omega(P)$ como la clase de todos los

$$Q \subset X \times Y$$

tales que $P - Q \in \mathcal{M}$, $Q - P \in \mathcal{M}$ y $P \cup Q \in \mathcal{M}$. Son obvias las siguientes propiedades:

a) $Q \in \Omega(P)$ si, y sólo si, $P \in \Omega(Q)$.
b) Puesto que $\mathcal{M}$ es una clase monótona, también lo es cada $\Omega(P)$.

Fijemos $P \in \mathcal{E}$. Nuestras observaciones anteriores sobre $\mathcal{E}$ muestran que $Q \in \Omega(P)$ para todo $Q \in \mathcal{E}$; por tanto, $\mathcal{E} \subset \Omega(P)$, y *b)* implica que $\mathcal{M} \subset \Omega(P)$.

Por otra parte, fijemos $Q \in \mathcal{M}$. Acabamos de ver que $Q \in \Omega(P)$ si $P \in \mathcal{E}$. Por *a)*, $P \in \Omega(Q)$; por tanto, $\mathcal{E} \subset \Omega(Q)$, y si acudimos a *b)* una vez más obtenemos que $\mathcal{M} \subset \Omega(Q)$.

Resumiendo: Si P y $Q \in \mathcal{M}$, entonces $P - Q \in \mathcal{M}$ y $P \cup Q \in \mathcal{M}$.

Se tiene, pues, que $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra en $X \times Y$:

1) $X \times Y \in \mathcal{E}$; por tanto, $X \times Y \in \mathcal{M}$.
2) Si $Q \in \mathcal{M}$, entonces $Q^c \in \mathcal{M}$, puesto que la diferencia de dos elementos cualesquiera en $\mathcal{M}$ está en $\mathcal{M}$.

3) Si $P_i \in \mathcal{M}$ para $i=1, 2, 3, \ldots$, y $P=\bigcup P_i$, pongamos

$$Q_n=P_1 \cup \ldots \cup P_n.$$

Como $\mathcal{M}$ es cerrada con respecto a la formación de uniones finitas, $Q_n \in \mathcal{M}$.

Puesto que $Q_n \subset Q_{n+1}$ y $P=\bigcup Q_n$, la monotonía de $\mathcal{M}$ muestra que $P \in \mathcal{M}$.

Entonces $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra, $\mathcal{E} \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{S} \times \mathcal{T}$, y (por definición) $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ es la σ-álgebra más pequeña que contiene a $\mathcal{E}$. Por tanto, $\mathcal{M}=\mathcal{S} \times \mathcal{T}$. ////

7.1.4. Definición. A cada función f sobre $X \times Y$ y a cada $x \in X$ asociamos una función f_x definida sobre Y mediante $f_x(y)=f(x, y)$.

Análogamente, si $y \in Y$, f^y es la función definida sobre X mediante $f^y(x)=f(x, y)$.

Como ahora estamos tratando con tres σ-álgebras, $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ y $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$, indicaremos en lo sucesivo, para mayor claridad, a cuál de estas tres σ-álgebras se refiere la palabra «medible».

7.1.5. Teorema. *Sea f una función $(\mathcal{S} \times \mathcal{T})$-medible sobre $X \times Y$. Entonces:*

a) *Para cada $x \in X$, f_x es una función $\mathcal{T}$-medible.*
b) *Para cada $y \in Y$, f^y es una función $\mathcal{S}$-medible.*

DEMOSTRACIÓN. Para cualquier conjunto abierto V, pongamos

$$Q=\{(x, y)\}: f(x, y) \in V\}.$$

Entonces $Q \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$, y

$$Q_x=\{y: f_x(y) \in V\}.$$

El teorema 7.1.2 muestra que $Q_x \in \mathcal{T}$. Esto demuestra *a)*; la demostración de *b)* es análoga. ////

7.2. MEDIDAS PRODUCTO

7.2.1. Teorema. *Sean $(X, \mathcal{S}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{T}, \lambda)$ espacios de medida σ-finita. Supongamos que $Q \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$. Si*

$$\varphi(x)=\lambda(Q_x), \qquad \psi(y)=\mu(Q^y) \tag{7.3}$$

para todo $x \in X$ e $y \in Y$, entonces φ es $\mathcal{S}$-medible, ψ es $\mathcal{T}$-medible y

$$\int_X \varphi \, d\mu=\int_Y \psi \, d\lambda. \tag{7.4}$$

Notas: Las hipótesis sobre los espacios de medida son, más explícitamente, que μ y λ son medidas positivas sobre $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$, respectivamente, que X es la unión numerable de conjuntos disjuntos X_n con $\mu(X_n) < \infty$, y que Y es la unión numerable de conjuntos disjuntos Y_m con $\lambda(Y_m) < \infty$.

El teorema 7.1.2 muestra que tienen sentido las definiciones [7.3]. Como

$$\lambda(Q_x) = \int_Y \chi_Q(x, y)\, d\lambda(y) \qquad (x \in X), \tag{7.5}$$

y una expresión análoga para $\mu(Q^y)$, la conclusión [7.4] puede escribirse en la forma

$$\int_X d\mu(x) \int_Y \chi_Q(x, y)\, d\lambda(y) = \int_X d\lambda(y) \int_Y \chi_Q(x, y)\, d\mu(x). \tag{7.6}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea Ω la clase de todos los $Q \in \mathcal{S} \times \mathcal{J}$ para los que se verifican las conclusiones del teorema. Pretendemos probar que Ω posee las siguientes cuatro propiedades:

a) Todo rectángulo medible pertenece a Ω.

b) Si $Q_1 \subset Q_2 \subset Q_3 \subset \ldots$, si cada $Q_i \in \Omega$, y si $Q = \bigcup Q_i$, entonces $Q \in \Omega$.

c) Si $\{Q_i\}$ es una colección numerable disjunta de elementos de Ω, y si $Q = \bigcup Q_i$, entonces $Q \in \Omega$.

d) Si $\mu(A) < \infty$ y $\lambda(B) < \infty$, si

$$A \times B \supset Q_1 \supset Q_2 \supset Q_3 \supset \ldots,$$

si $Q = \bigcap Q_i$ y $Q_i \in \Omega$ para $i = 1, 2, 3, \ldots$, entonces $Q \in \Omega$.

Si $Q = A \times B$, donde $A \in \mathcal{S}$, $B \in \mathcal{J}$, entonces

$$\lambda(Q_x) = \lambda(B)\chi_A(x) \quad \text{y} \quad \mu(Q^y) = \mu(A)\chi_B(y), \tag{7.7}$$

y, por tanto, cada una de las integrales en [7.4] es igual a $\mu(A)\lambda(B)$. Esto proporciona *a)*.

Para demostrar *b)*, sean φ_i y ψ_i las asociadas a Q_i en la forma en que [7.3] asocia φ y ψ a Q. La aditividad numerable de μ y λ muestra que

$$\varphi_i(x) \to \varphi(x), \qquad \psi_i(y) \to \psi(y) \qquad (i \to \infty), \tag{7.8}$$

en donde la convergencia es monótona creciente en todo punto. Como se supone que φ_i y ψ_i satisfacen la conclusión del teorema, *b)* se deduce del teorema de convergencia monótona.

Para uniones finitas de conjuntos *disjuntos, c)* es claro, porque la función característica de una unión de conjuntos disjuntos es la suma de sus funciones características. El caso general de *c)* se deduce entonces de *b)*.

La demostración de *d)* es como la de *b)*, excepto que utilizamos el teorema de convergencia dominada en lugar del de convergencia monótona. Esto se puede hacer porque $\mu(A) < \infty$ y $\lambda(B) < \infty$.

Definamos ahora

$$Q_{mn} = Q \cap (X_n \times Y_m) \qquad (m, n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{7.9}$$

y sea $\mathcal{M}$ la clase de todos los $Q \in \mathcal{S} \times \mathcal{J}$ tales que $Q_{mn} \in \Omega$ para todos los valores de m y n. Entonces *b)* y *d)* muestran que $\mathcal{M}$ es una clase monótona; *a)* y *c)* muestran que $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}$; y como $\mathcal{M} \subset \mathcal{S} \times \mathcal{J}$, el teorema 7.1.3 implica que $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{J}$.

Entonces $Q_{mn} \in \Omega$ para todo $Q \in \mathcal{S} \times \mathcal{J}$ y para todos los valores de m y n. Como Q es la unión de los conjuntos Q_{mn} y estos conjuntos son disjuntos, concluimos de *c)* que $Q \in \Omega$, lo que completa la demostración. ////

7.2.2. Definición. Si $(X, \mathcal{S}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{J}, \lambda)$ son como en el teorema 7.2.1, y si $Q \in \mathcal{S} \times \mathcal{J}$, definimos

$$(\mu \times \lambda)(Q) = \int_X \lambda(Q_x)\, d\mu(x) = \int_Y \mu(Q^y)\, d\lambda(y). \qquad [7.10]$$

La igualdad de las integrales anteriores es el contenido del teorema 7.2.1. Llamamos a $\mu \times \lambda$ el *producto* de las medidas μ y λ. Del teorema 1.8.5 se desprende inmediatamente que $\mu \times \lambda$ es realmente una medida (es decir, que $\mu \times \lambda$ es numerablemente aditiva sobre $\mathcal{S} \times \mathcal{J}$).

Obsérvese también que $\mu \times \lambda$ es σ-finita.

7.3. EL TEOREMA DE FUBINI

7.3.1. Teorema. *Sean $(X, \mathcal{S}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{J}, \lambda)$ espacios de medida σ-finita, y sea f una función $(\mathcal{S} \times \mathcal{J})$-medible sobre $X \times Y$.*

a) *Si $0 \leqslant f \leqslant \infty$, y si*

$$\varphi(x) = \int_Y f_x\, d\lambda, \qquad \psi(y) = \int_X f^y\, d\mu \qquad (x \in X,\ y \in Y), \qquad [7.11]$$

entonces φ es $\mathcal{S}$-medible, ψ es $\mathcal{J}$-medible, y

$$\int_X \varphi\, d\mu = \int_{X \times Y} f\, d(\mu \times \lambda) = \int_Y \psi\, d\lambda. \qquad [7.12]$$

b) *Si f es compleja y si*

$$\varphi^*(x) = \int_Y |f|_x\, d\lambda \quad \text{y} \quad \int_X \varphi^*\, d\mu < \infty. \qquad [7.13]$$

entonces $f \in L^1(\mu \times \lambda)$.

c) *Si $f \in L^1(\mu \times \lambda)$, entonces $f_x \in L^1(\lambda)$ para casi todo $x \in X$, $f^y \in L^1(\mu)$ para casi todo $y \in Y$; las funciones φ y ψ, definidas mediante* [7.11] *en c.t.p., están en $L^1(\mu)$ y $L^1(\lambda)$, respectivamente, y se verifica* [7.12].

Notas: La primera y últimas integrales de [7.12] pueden escribirse también en la forma más habitual:

$$\int_X d\mu(x) \int_Y f(x, y)\, d\lambda(y) = \int_Y d\lambda(y) \int_X f(x, y)\, d\mu(x). \qquad [7.14]$$

Estas son las llamadas «integrales iteradas» de f. La segunda integral en [7.12] se llama a menudo *integral doble.*

La combinación de *b)* y *c)* proporciona el útil resultado siguiente: *Si f es $(\mathcal{S}\times\mathcal{Y})$-medible y si*

$$\int_X d\mu(x)\int_Y |f(x,y)|\,d\lambda(y) < \infty, \qquad [7.15]$$

entonces las dos integrales iteradas [7.14] *son finitas e iguales.*

En otras palabras, «puede intercambiarse el orden de integración» para funciones f $(\mathcal{S}\times\mathcal{Y})$-medibles si $f\geqslant 0$ y también si una de las integrales iteradas de $|f|$ es finita.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos en primer lugar *a)*. Por el teorema 7.1.5, tienen sentido las definiciones de φ y ψ. Supongamos que $Q\in\mathcal{S}\times\mathcal{Y}$ y $f=\chi_Q$. Por la definición 7.2.2, [7.12] es entonces exactamente la conclusión del teorema 7.2.1. Por tanto, *a)* se verifica para todas las funciones s no negativas simples $(\mathcal{S}\times\mathcal{Y})$-medibles. En el caso general, existe una sucesión de tales funciones s_n, tales que $0\leqslant s_1\leqslant s_2\ldots$ y $s_n(x,y)\to f(x,y)$ en todo punto de $X\times Y$. Si φ_n es la asociada con s_n de la misma forma en que φ está asociada a f, tenemos

$$\int_X \varphi_n\,d\mu = \int_{X\times Y} s_n\,d(\mu\times\lambda) \qquad (n=1,2,3,\ldots). \qquad [7.16]$$

El teorema de la convergencia monótona, aplicado en $(Y,\mathcal{Y},\lambda)$, muestra que $\varphi_n(x)$ crece hacia $\varphi(x)$, para todo $x\in X$, cuando $n\to\infty$. En consecuencia, el teorema de la convergencia monótona puede aplicarse otra vez a las dos integrales de [7.16], y se obtiene la primera igualdad de [7.12]. La segunda mitad de dicha ecuación se obtiene intercambiando los papeles de x y de y. Esto completa *a)*.

Si aplicamos *a)* a $|f|$, vemos que se verifica *b)*.

Obviamente, basta demostrar *c)* para $L^1(\mu\times\lambda)$ *real;* el caso complejo se obtiene a continuación. Si f es real, puede aplicarse *a)* a f^+ y a f^-. Sean φ_1 y φ_2 las que corresponden a f^+ y a f^- como φ corresponde a f en [7.11]. Como $f\in L^1(\mu\times\lambda)$ y $f^+\leqslant|f|$, y *a)* se verifica para f^+, vemos que $\varphi_1\in L^1(\mu)$. Análogamente, $\varphi_2\in L^1(\mu)$. Como

$$f_x=(f^+)_x-(f^-)_x \qquad [7.17]$$

tenemos $f_x\in L^1(\lambda)$ para todo x para el que $\varphi_1(x)<\infty$ y $\varphi_2(x)<\infty$; como φ_1 y φ_2 están en $L^1(\mu)$, esto ocurre para casi todo x; en cualquiera de tales x, tenemos $\varphi(x)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$. Por tanto, $\varphi\in L^1(\mu)$. Ahora [7.12] se verifica con φ_1 y f^+ y con φ_2 y f^-, en lugar de φ y f; si restamos las ecuaciones resultantes, obtenemos una mitad de *c)*. La otra mitad se demuestra de la misma manera, con f^y y ψ en lugar de f_x y φ.

7.3.2. Contraejemplos. Los siguientes tres ejemplos mostrarán que no pueden omitirse las hipótesis de los teoremas 7.2.1 y 7.3.1.

a) Sea $X=Y=[0,1]$, $\mu=\lambda=$medida de Lebesgue sobre $[0,1]$. Elijamos $\{\delta_n\}$ de modo que $0=\delta_1<\delta_2<\delta_3<\ldots$, $\delta_n\to 1$, y sea g_n una función real continua con soporte en (δ_n,δ_{n+1}), tal que $\int_0^1 g_n(t)\,dt=1$, para $n=1,2,3,\ldots$

Definamos

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [g_n(x) - g_{n+1}(x)] g_n(y).$$

Notemos que en cada punto (x, y) a lo sumo un término de esta suma es diferente de 0. Entonces no surge ningún problema de convergencia en la definición de f. Un cálculo fácil muestra que

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y)\, dy = 1 \neq 0 = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y)\, dx,$$

así que no se verifica la conclusión del teorema de Fubini, a pesar de que ambas integrales iteradas existen. Notemos que f es continua en este ejemplo, salvo en el punto $(1, 1)$, pero que

$$\int_0^1 dx \int_0^1 |f(x, y)|\, dy = \infty.$$

b) Sea $X = Y = [0, 1]$, μ = medida de Lebesgue en $[0, 1]$, λ = medida discreta en Y, y pongamos $f(x, y) = 1$ si $x = y$, $f(x, y) = 0$ si $x \neq y$. Entonces

$$\int_X f(x, y)\, d\mu(x) = 0, \qquad \int_Y f(x, y)\, d\lambda(y) = 1$$

para todo x e y en $[0, 1]$, así que

$$\int_Y d\lambda(y) \int_X f(x, y)\, d\mu(x) = 0 \neq 1 = \int_X d\mu(x) \int_Y f(x, y)\, d\lambda(y).$$

Esta vez el fallo se debe a que λ no es σ-finita.

Observemos que nuestra función f es $(\mathcal{S} \times \mathcal{J})$-medible si $\mathcal{S}$ es la clase de todos los conjuntos Lebesgue medibles en $[0, 1]$ y $\mathcal{J}$ consta de todos los subconjuntos de $[0, 1]$. Para verlo, notemos que $f = \chi_D$, donde D es la diagonal del cuadrado unidad. Dado n, pongamos

$$I_j = \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right]$$

y

$$Q_n = (I_1 \times I_1) \cup (I_2 \times I_2) \cup \ldots \cup (I_n \times I_n).$$

Entonces Q_n es una unión finita de rectángulos medibles, y $D = \bigcap Q_n$.

c) En los ejemplos *a)* y *b)*, el fallo para la aplicación del teorema de Fubini fue debido al hecho de que o la función o el espacio eran «demasiado grandes». Volvamos ahora al papel que desempeña la condición de que f sea medible *con respecto a la σ-álgebra* $\mathcal{S} \times \mathcal{J}$.

Para plantear la cuestión más precisamente, supongamos que $\mu(X) = \lambda(Y) = 1$, $0 \leqslant f \leqslant 1$ (de modo que se evitan las dificultades citadas anteriormente); supongamos que f_x es $\mathcal{J}$-medible y que f^y es $\mathcal{S}$-medible, para todo x e y; y su-

pongamos que φ es $\mathcal{S}$-medible y ψ $\mathcal{J}$-medible, donde φ y ψ se definen como en [7.11]. Entonces $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, $0 \leqslant \psi \leqslant 1$, y ambas integrales iteradas son finitas. (Notemos que no es necesario hacer referencia a medidas producto para *definir* las integrales iteradas.) ¿Puede deducirse que son iguales las dos integrales iteradas de f?

La respuesta (quizá sorprendente) es que no.

En el ejemplo siguiente (debido a SIERPINSKI), tomamos

$$(X, \mathcal{S}, \mu) = (Y, \mathcal{J}, \lambda) = [0, 1]$$

con la medida de Lebesgue. La construcción depende de la hipótesis del continuo. Una consecuencia de esta hipótesis es que existe una aplicación uno a uno j del intervalo unidad $[0, 1]$ sobre un conjunto bien ordenado W tal que $j(x)$ posee a lo sumo una cantidad numerable de predecesores en W, para cada $x \in [0, 1]$. Supuesto esto, sea Q el conjunto de todos los (x, y) del cuadrado unidad tales que $j(x)$ precede a $j(y)$ en W. Para cada $x \in [0, 1]$, Q_x contiene todos menos una cantidad numerable de puntos de $[0, 1]$; para cada $y \in [0, 1]$, Q^y contiene a lo sumo una cantidad numerable de puntos de $[0, 1]$. Si $f = \chi_Q$, se tiene que f_x y f^y son Borel medibles y que

$$\varphi(x) = \int_0^1 f(x, y)\, dy = 1, \qquad \psi(y) = \int_0^1 f(x, y)\, dx = 0$$

para todo x e y. En consecuencia

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y)\, dy = 1 \neq 0 = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y)\, dx.$$

7.4. COMPLECION DE MEDIDAS PRODUCTO

7.4.1. Ejemplo. Si $(X, \mathcal{S}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{J}, \lambda)$ son espacios de medida completos, no es forzosamente cierto que $(X \times Y, \mathcal{S} \times \mathcal{J}, \mu \times \lambda)$ sea completo. No hay nada patológico en este fenómeno: Supongamos que existe un $A \in \mathcal{S}$, $A \neq \emptyset$, con $\mu(A) = 0$; y supongamos que existe un $B \subset Y$ tal que $B \in \mathcal{J}$. Entonces $A \times B \subset A \times Y$, $(\mu \times \lambda)(A \times Y) = 0$, pero $A \times B \notin \mathcal{S} \times \mathcal{J}$. (La última afirmación se obtiene del teorema 7.1.2.)

Por ejemplo, si $\mu = \lambda = m_1$ (medida de Lebesgue en R^1), A consta de un punto cualquiera y B es cualquier conjunto no medible en R^1, se tiene que $m_1 \times m_2$ no es una medida completa; en particular, $m_1 \times m_1$ no es m_2, puesto que la última es completa por construcción. Sin embargo, m_2 *es la compleción de* $m_1 \times m_1$. Este resultado se puede generalizar a cualquier dimensión:

7.4.2. Teorema. *Sea m_k la medida de Lebesgue en R^k. Si $k = r + s$, $r \geqslant 1$, $s \geqslant 1$, entonces m_k es la compleción de la medida producto $m_r \times m_s$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\mathcal{B}_k$ y $\mathcal{M}_k$ las σ-álgebras de todos los conjuntos de Borel y de todos los conjuntos Lebesgue medibles en R^k, respectivamente. Demostraremos en primer lugar que

$$\mathcal{B}_k \subset \mathcal{M}_r \times \mathcal{M}_s \subset \mathcal{M}_k. \qquad [7.18]$$

Toda k-celda pertenece a $\mathcal{M}_r \times \mathcal{M}_s$. La σ-álgebra generada por las k-celdas es $\mathcal{B}_k$. En consecuencia, $\mathcal{B}_k \subset \mathcal{M}_r \times \mathcal{M}_s$. Por otro lado, supongamos $E \in \mathcal{M}_r$ y $F \in \mathcal{M}_s$. Es fácil ver, por el teorema 2.5.2, *b)*, que tanto $E \times R^s$ como $R^r \times F$ pertenecen a $\mathcal{M}_k$. Lo mismo ocurre con su intersección $E \times F$. Se obtiene, pues, que $\mathcal{M}_r \times \mathcal{M}_s \subset \mathcal{M}_k$.

Tomemos $Q \in \mathcal{M}_r \times \mathcal{M}_s$. Entonces $Q \in \mathcal{M}_k$, y, por tanto, existen conjuntos P_1 y $P_2 \in \mathcal{B}_k$ tales que $P_1 \subset Q \subset P_2$ y $m_k(P_2 - P_1) = 0$. Tanto m_k como $m_r \times m_s$ son medidas de Borel invariantes por traslaciones sobre R^k. Asignan el mismo valor a cada k-celda. Por tanto, coinciden sobre $\mathcal{B}_k$, por el teorema 2.5.2, *d)*. En particular,

$$(m_r \times m_s)(Q - P_1) \leqslant (m_r \times m_s)(P_2 - P_1) = m_k(P_2 - P_1) = 0$$

y, en consecuencia,

$$(m_r \times m_s)(Q) = (m_r \times m_s)(P_1) = m_k(P_1) = m_k(Q).$$

Por tanto, $m_r \times m_s$ coincide con m_k sobre $\mathcal{M}_r \times \mathcal{M}_s$.

Se obtiene, pues, que $\mathcal{M}_k$ es la $(m_r \times m_s)$-compleción de $\mathcal{M}_r \times \mathcal{M}_r$, que es lo que afirma el teorema. ////

Concluimos esta sección con un enunciado alternativo del teorema de Fubini, que presenta un interés especial en vista del teorema 7.4.2.

7.4.3. Teorema. *Sean* $(X, \mathcal{S}, \mu)$ *y* $(Y, \mathcal{J}, \lambda)$ *espacios de medida* σ*-finita completa. Sea* $(\mathcal{S} \times \mathcal{J})^*$ *la compleción de* $\mathcal{S} \times \mathcal{J}$*, relativa a la medida* $\mu \times \lambda$*. Sea* f *una función* $(\mathcal{S} \times \mathcal{J})^*$*-medible sobre* $X \times Y$*. Entonces se verifican todas las conclusiones del teorema* 7.3.1*, con la única diferencia de que la* $\mathcal{J}$*-medibilidad de* f_x *puede afirmarse sólo para casi todo* $x \in X$*, de modo que* $\varphi(x)$ *está definida sólo en c.t.p.*$[\mu]$ *mediante* [7.11]*; un enunciado análogo se verifica para* f^y *y* ψ*.*

La demostración se basa en los dos lemas siguientes:

Lema 1. *Supongamos que* ν *es una medida positiva sobre una* σ*-álgebra* $\mathcal{M}$*, que* $\mathcal{M}^*$ *es la compleción de* $\mathcal{M}$ *relativa a* ν*, y que* f *es una función* $\mathcal{M}^*$*-medible. Entonces existe una función* g $\mathcal{M}$*-medible tal que* $f = g$ *en c.t.p.*$[\nu]$.

(Un caso especial interesante aparece cuando ν es la medida de Lebesgue sobre R^k y $\mathcal{M}$ es la clase de todos los conjuntos de Borel en R^k.)

Lema 2. *Sea* h *una función* $(\mathcal{S} \times \mathcal{J})^*$*-medible sobre* $X \times Y$ *tal que* $h = 0$ *en c.t.p.*$[\mu \times \lambda]$*. Entonces, para casi todo* $x \in X$ *se verifica que* $h(x, y) = 0$ *para casi todo* $y \in Y$*; en particular,* h_x *es* $\mathcal{J}$*-medible para casi todo* $x \in X$*. Un enunciado análogo se verifica para* h^y*.*

Si suponemos demostrados los lemas, la demostración del teorema es inmediata: Si f es como en el teorema, el lema 1 (con $\nu = \mu \times \lambda$) muestra que $f = g + h$, donde $h = 0$ en c.t.p.$[\mu \times \lambda]$ y g es $(\mathcal{S} \times \mathcal{J})$-medible. El teorema 7.3.1 puede aplicarse a g. El lema 2 muestra que $f_x = g_x$ en c.t.p.$[\lambda]$ para casi todo x y que $f^y = g^y$ en c.t.p.$[\mu]$ para casi todo y. En consecuencia, las dos integrales iteradas de f, así como la integral doble, son las mismas que las de g, y se obtiene el teorema.

Demostración del lema 1. Supongamos que f es $\mathcal{M}^*$-medible y $f \geqslant 0$. Existen funciones simples $\mathcal{M}^*$-medibles $0 \leqslant s_1 \leqslant s_2 \leqslant s_3 \leqslant \ldots$ tales que $s_n(x) \to f(x)$ para cada $x \in X$, cuando $n \to \infty$. Por tanto, $f = \Sigma(s_{n+1} - s_n)$. Como $s_{n+1} - s_n$ es

una combinación lineal finita de funciones características, se tiene que existen constantes $c_i > 0$ y conjuntos $E_i \in \mathcal{M}^*$ tales que

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \chi_{E_i}(x) \qquad (x \in X).$$

La definición de $\mathcal{M}^*$ (véase teorema 1.10.2) muestra que existen conjuntos $A_i \in \mathcal{M}$, $B_i \in \mathcal{M}$, tales que $A_i \subset E_i \subset B_i$ y $\nu(B_i - A_i) = 0$. Definamos

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \chi_{A_i}(x) \qquad (x \in X).$$

Entonces la función g es $\mathcal{M}$-medible, y $g(x) = f(x)$, excepto posiblemente cuando $x \in \bigcup (E_i - A_i) \cup (B_i - A_i)$. Como $\nu(B_i - A_i) = 0$ para cada i, concluimos que $g = f$ en c.t.p.$[\nu]$. El caso general (f real o compleja) se deduce de éste. ////

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 2. Sea P el conjunto de todos los puntos en $X \times Y$ en los que $h(x, y) \neq 0$. Entonces $P \in (\mathcal{S} \times \mathcal{Y})^*$ y $(\mu \times \lambda)(P) = 0$. Por tanto, existe un $Q \in \mathcal{S} \times \mathcal{Y}$ tal que $P \subset Q$ y $(\mu \times \lambda)(Q) = 0$. Por el teorema 7.2.1,

$$\int_X \lambda(Q_x)\, d\mu(x) = 0. \qquad [7.19]$$

Sea N el conjunto de todos los $x \in X$ en los que $\lambda(Q_x) > 0$. Se deduce de [7.19] que $\mu(N) = 0$. Para todo $x \notin N$, $\lambda(Q_x) = 0$. Como $P_x \subset Q_x$ y $(Y, \mathcal{Y}, \lambda)$ es un espacio de medida completa, todo subconjunto de P_x pertenece a $\mathcal{Y}$ si $x \notin N$. Si $y \notin P_x$, entonces $h_x(y) = 0$. Vemos, pues, para todo $x \notin N$, que h_x es $\mathcal{Y}$-medible y que $h_x(y) = 0$ en c.t.p.$[\lambda]$. ////

7.5. CONVOLUCIONES

7.5.1. Ejemplo. A veces sucede que se puede demostrar que un cierto conjunto es no vacío probando que es realmente vasto. La palabra «vasto» puede, por supuesto, referirse a varias propiedades. Una de éstas (bastante tosca) es la cardinalidad. La conocida demostración de la existencia de números trascendentes es un ejemplo de ello: Existe sólo una cantidad numerable de números algebraicos pero no numerable de números reales, de donde el conjunto de números reales trascendentes es no vacío. Las aplicaciones del teorema de Baire se basan en una noción topológica de vastedad: Los densos G_δ son subconjuntos «vastos» de un espacio métrico completo. Un tercer tipo de vastedad se considera en teoría de la medida: Se puede tratar de demostrar que un cierto conjunto en un espacio de medida es no vacío, probando que tiene medida positiva o, aún mejor, que su complementario tiene medida cero. El teorema de Fubini surge a menudo en este tipo de razonamientos.

Por ejemplo, sean f y $g \in L^1(R^1)$, supongamos $f \geqslant 0$ y $g \geqslant 0$ por el momento, y consideremos la integral

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - t) g(t)\, dt \qquad (-\infty < x < \infty). \qquad [7.20]$$

Para cualquier x fijo, el integrando en [7.20] es una función medible con recorrido en $[0, \infty]$, por lo que $h(x)$ está bien definida, y $0 \leqslant h(x) \leqslant \infty$.

¿Pero existe algún x para el que $h(x) < \infty$? Nótese que el integrando en [7.20] es, para cada x fijo, el producto de dos elementos de L^1, y un tal producto no siempre está en L^1. (Por ejemplo: $f(x) = g(x) = 1\sqrt{x}$ si $0 < x < 1$, 0 para los demás valores de x.) El teorema de Fubini dará una respuesta afirmativa. De hecho, mostrará que si $h \in L^1(R^1)$, se tiene que $h(x) < \infty$ en c.t.p.

7.5.2. Teorema. *Supongamos que $f \in L^1(R^1)$, $g \in L^1(R^1)$. Entonces*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)g(y)|\, dy < \infty \qquad [7.21]$$

para casi todo x. Para estos x, definamos

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\, dy. \qquad [7.22]$$

Entonces $h \in L^1(R^1)$, y

$$\|h\|_1 \leqslant \|f\|_1\, \|g\|_1, \qquad [7.23]$$

donde

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx. \qquad [7.24]$$

Llamamos a h la *convolución* de f y g, y escribimos $h = f * g$.

DEMOSTRACIÓN. Existen funciones de Borel f_0 y g_0 tales que $f_0 = f$ en c.t.p. y $g_0 = g$ en c.t.p. Las integrales [7.21] y [7.22] no cambian, para todo x, si cambiamos f por f_0 y g por g_0. En consecuencia, podemos suponer, para comenzar, que f y g son funciones de Borel.

Para aplicar el teorema de Fubini demostraremos, en primer lugar, que la función F definida mediante

$$F(x, y) = f(x-y)g(y) \qquad [7.25]$$

es una función de Borel en R^2.

Definamos $\varphi : R^2 \to R^1$ y $\psi : R^2 \to R^1$ mediante

$$\varphi(x, y) = x - y, \qquad \psi(x, y) = y. \qquad [7.26]$$

Entonces $f(x-y) = (f \circ \varphi)(x, y)$ y $g(y) = (g \circ \psi)(x, y)$. Como φ y ψ son funciones de Borel, el teorema 1.3.1, *d)*, muestra que $f \circ \varphi$ y $g \circ \psi$ son funciones de Borel en R^2. Por tanto, también lo es su producto.

Por otro lado, observamos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} |F(x, y)|\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)|\, dy \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)|\, dx = \|f\|_1\, \|g\|_1, \qquad [7.27]$$

puesto que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)|\, dx = \|f\|_1 \qquad [7.28]$$

para todo $y \in R^1$, debido a la invariancia por traslaciones de la medida de Lebesgue.

Entonces $F \in L^1(R^2)$, y el teorema de Fubini implica que la integral [7.22] existe para casi todo $x \in R^1$ y que $h \in L^1(R^1)$. Finalmente,

$$\|h\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|\, dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} |F(x, y)|\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} |F(x, y)|\, dx = \|f\|_1\, \|g\|_1,$$

por [7.27]. Esta proporciona [7.23], y completa la demostración. ////

Las convoluciones desempeñarán un importante papel en el capítulo 9.

EJERCICIOS

1. Hállese un ejemplo de una clase monótona $\mathcal{M}$ en un conjunto X tal que $\varnothing \in \mathcal{M}$, $X \in \mathcal{M}$, pero tal que $\mathcal{M}$ no sea una σ-álgebra.

2. Supóngase que f es una función real no negativa Lebesgue medible en R^1 y que $A(f)$ es el *conjunto de ordenadas* de f. Este es el conjunto de todos los puntos $(x, y) \in R^2$ para los que $0 < y < f(x)$.

   a) ¿Es cierto que $A(f)$ es Lebesgue medible, en sentido bidimensional?

   b) Si la respuesta en *a)* es afirmativa, ¿es la integral de f sobre R igual a la medida de $A(f)$?

   c) ¿Es el gráfico de f un subconjunto medible de R^2?

   d) Si la respuesta a *c)* es afirmativa, ¿es la medida del gráfico igual a cero?

3. Obténgase un ejemplo de una función positiva continua f en el cuadrado unidad abierto en R^2, cuya integral (relativa a la medida de Lebesgue) sea finita, pero tal que $\varphi(x)$ (en la notación del teorema 7.3.1) sea infinita para algún $x \in (0, 1)$.

4. Supóngase que $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in L^1(R^1)$ y $g \in L^p(R^1)$.

   a) Imítese la demostración del teorema 7.5.2 para demostrar que la integral que define $(f * g)(x)$ existe para casi todo x, que $f * g \in L^p(R^1)$, y que

   $$\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_1\, \|g\|_p.$$

   b) Demuéstrese que puede verificarse la igualdad en *a)* si $p=1$ y si $p=\infty$, y obténganse las condiciones bajo las que esto sucede.

   c) Supóngase que $1 < p < \infty$, y que se verifica la igualdad en *a)*. Demuéstrese que entonces o bien $f=0$ en c.t.p. o $g=0$ en c.t.p.

   d) Supóngase $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\epsilon > 0$, y demuéstrese que existen $f \in L^1(R^1)$ y $g \in L^p(R^1)$ tales que

   $$\|f * g\|_p > (1-\epsilon)\|f\|_1\, \|g\|_p.$$

5. Sea M el espacio de Banach de todas las medidas de Borel complejas sobre R^1. La norma en M es $\|\mu\| = |\mu|(R^1)$. Asóciese a cada conjunto de Borel $E \subset R^1$ el

conjunto

$$E_2=\{(x, y): x+y \in E\} \subset R^2.$$

Si μ y $\lambda \in M$, defínase su convolución $\mu * \lambda$ como la función de conjunto dada por

$$(\mu * \lambda)(E)=(\mu \times \lambda)(E_2)$$

para todo conjunto de Borel $E \subset R^1$; $\mu \times \lambda$ es como en la definición 7.2.2.

a) Demuéstrese que $\mu * \lambda \in M$ y que $\|\mu * \lambda\| \leqslant \|\mu\| \, \|\lambda\|$.

b) Pruébese que $\mu * \lambda$ es la única $\nu \in M$ tal que

$$\int f \, d\nu = \int \int f(x+y) \, d\mu(x) \, d\lambda(y)$$

para toda $f \in C_0(R)$. (Todas las integrales se extienden sobre R^1.)

c) Demuéstrese que la convolución en M es conmutativa, asociativa y distributiva con respecto a la adición.

d) Demuéstrese la fórmula

$$(\mu * \lambda)(E)=\int \mu(E-t) \, d\lambda(t)$$

para toda μ y $\lambda \in M$ y todo conjunto de Borel E. Aquí

$$E-t=\{x-t: x \in E\}.$$

e) Se define μ como *discreta* si μ está concentrada en un conjunto numerable; se define μ como *continua* si $\mu(\{x\})=0$ para todo punto $x \in R^1$; sea m la medida de Lebesgue en R^1 (nótese que $m \notin M$). Pruébese que $\mu \times \lambda$ es discreta si ambas, μ y λ, lo son, que $\mu * \lambda$ es continua si μ es continua y $\lambda \in M$, y que $\mu * \lambda \ll m$ si $\mu \ll m$.

f) Supóngase que $d\mu=f \, dm$, $d\lambda=g \, dm$, $f \in L^1(R^1)$, y $g \in L^1(R^1)$, y demuéstrese que $d(\mu * \lambda)=(f * g) \, dm$.

g) Las propiedades *a)* y *c)* muestran que el espacio de Banach M es lo que se llama un *álgebra de Banach conmutativa*. Demuéstrese que *e)* y *f)* implican que el conjunto de todas las medidas discretas en M es una subálgebra de M, que las medidas continuas forman un ideal en M, y que las medidas absolutamente continuas (relativas a m) forman un ideal en M que es isomorfo (como álgebra) a $L^1(R^1)$.

h) Demuéstrese que M tiene elemento unidad, es decir, pruébese que existe una $\delta \in M$ tal que $\delta * \mu=\mu$ para toda $\mu \in M$.

i) En esta discusión se han utilizado sólo dos propiedades de R^1: que R^1 es un grupo conmutativo (respecto de la adición), y que existe una medida de Borel m sobre R^1 invariante por traslaciones que no es idénticamente 0 y que es finita sobre todos los subconjuntos compactos de R^1. Demuéstrese que se verifican los mismos resultados si R^1 se cambia por R^k o por T (la circunferencia unidad) o por T^k (el toro k-dimensional, el producto cartesiano de k veces T), si se formulan apropiadamente las definiciones.

6. (Coordenadas polares en R^k.) Sea S_{k-1} la esfera unidad en R^k, es decir, el conjunto de todos los $u \in R^k$ cuya distancia al origen 0 es 1. Demuéstrese que todo $x \in R^k$, excepto $x=0$, tiene una única representación de la forma $x=ru$, donde r es un número real positivo y $u \in S_{k-1}$. $R^k-\{0\}$, pues, puede considerarse como el producto cartesiano de $(0, \infty) \times S_{k-1}$.

Sea m la medida de Lebesgue en R^k, y defínase una medida σ_{k-1} sobre S_{k-1} de la manera siguiente: Si $A \subset S_{k-1}$ y A es un conjunto de Borel, sea $\tilde{A}$ el conjunto de todos los puntos ru, donde $0 < r < 1$ y $u \in A$, y defínase

$$\sigma_{k-1}(A)=k \cdot m_k(\tilde{A}).$$

Pruébese que la fórmula

$$\int_{R^k} f\, dm_k = \int_0^\infty r^{k-1}\, dr \int_{S_{k-1}} f(ru)\, d\sigma_{k-1}(u)$$

es válida para toda función de Borel no negativa f sobre R^k. Compruébese que esto coincide con resultados conocidos cuando $k=2$ y cuando $k=3$.

Sugerencia: Si $0 < r_1 < r_2$ y si A es un subconjunto abierto de S_{k-1}, sea E el conjunto de todos los ru con $r_1 < r < r_2$, $u \in A$, y compruébese que la fórmula se verifica para la función característica de E. Pásese de éstas a las funciones caraterísticas de conjuntos de Borel en R^k.

7. Supóngase que $(X, \mathcal{S}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{T}, \lambda)$ son espacios de medida σ-finiaa, y que ψ es una medida sobre $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ tal que

$$\psi(A \times B) = \mu(A)\lambda(B)$$

si $A \in \mathcal{S}$ y $B \in \mathcal{T}$. Demuéstrese que entonces $\psi(E) = (\mu \times \lambda)(E)$ para todo $E \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$.

8. *a)* Supóngase que f es una función real sobre R^2 tal que cada sección f_x es Borel medible y cada sección f^y es continua. Demuéstrese que f es Borel medible sobre R^2. Nótese el contraste entre esto y el ejemplo 7.3.2, *c)*.

b) Supóngase que g es una función real sobre R^k que es continua en cada una de las k variables separadamente. Más explícitamente, para cada elección de $x_2, \ldots, x_k$, la aplicación $x_1 \to g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es continua, etc. Demuéstrese que g es una función de Borel.

Sugerencia: Si $(i-1)/n = a_{i-1} \leqslant x \leqslant a_i = i/n$, pongamos

$$f_n(x, y) = \frac{a_i - x}{a_i - a_{i-1}} f(a_{i-1}, y) = \frac{x - a_{i-1}}{a_i - a_{i-1}} f(a_i, y).$$

9. Supóngase que E es un conjunto denso en R^1 y f es una función real en R^2 tal que: *a)* f_x es Lebesgue medible para cada $x \in E$, y *b)* f^y es continua para casi todo $y \in R$. Pruébese que f es Lebesgue medible en R^2.

10. Supóngase que f es una función real en R^2, f_x es Lebesgue medible para cada x, y f^y es continua para cada y. Supóngase que $g: R^1 \to R^1$ es Lebesgue medible, y póngase $h(y) = f(g(y), y)$. Demuéstrese que h es Lebesgue medible sobre R^1.

Sugerencia: Defínase f_n como en el ejercicio 8, póngase $h_n(y) = f_n(g(y), y)$, demuéstrese que cada h_n es medible y que $h_n(y) \to h(y)$.

11. Sea $\mathcal{B}_k$ la σ-álgebra de todos los conjuntos de Borel en R^k. Demuéstrese que $\mathcal{B}_{m+n} = \mathcal{B}_m \times \mathcal{B}_n$. Esto es importante en el teorema 7.5.2.

12. Utilícese el teorema de Fubini y la relación

$$\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-xt}\, dt \qquad (x > 0)$$

para demostrar que

$$\lim_{A \to \infty} \int_0^A \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

DIFERENCIACION

8.1. DERIVADAS DE MEDIDAS

Comenzamos con un teorema sobre derivadas de ciertas funciones de punto, para motivar la definición 8.1.3.

8.1.1. Teorema. *Supongamos que μ es una medida de Borel compleja sobre R^1 y que*

$$f(x)=\mu((-\infty, x)) \qquad (x \in R^1). \tag{8.1}$$

Si $x \in R^1$ y A es un número complejo, cada uno de los dos siguientes enunciados implica el otro:

a) *f es diferenciable en x y $f'(x)=A$.*

b) *Para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que*

$$\left|\frac{\mu(I)}{m(I)}-A\right| < \epsilon \tag{8.2}$$

para todo segmento abierto I que contenga a x y cuya longitud sea menor que δ.

Aquí m denota la medida de Lebesgue sobre R^1.

DEMOSTRACIÓN. Cambiemos μ por $\mu - Am$, restringida a algún segmento que contenga a x (de modo que la nueva medida sea finita). Esto muestra que no se pierde generalidad suponiendo $A=0$.

Si $f'(x)=0$ y $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(t)-f(x)| \leqslant \epsilon |t-x|$$

si $|t-x| < \delta$. Supongamos $x \in I$, $I=(s, t)$, y $t-s < \delta$. Tomemos s_n de modo que $x > s_1 > s_2 > \ldots, s_n \to s$. Entonces

$$\begin{aligned}|\mu([s_n, t))| &= |f(t)-f(s_n)| \leqslant |f(t)-f(x)| + |f(x)-f(s_n)| \\ &\leqslant \epsilon(t-x)+\epsilon(x-s_n)=\epsilon(t-s_n) < \epsilon m(I),\end{aligned}$$

y como $I=\bigcup([s_n, t))$, se deduce que $|\mu(I)| \leqslant \epsilon m(I)$. Entonces *a)* implica *b)*.

Por otro lado, supongamos que se verifica *b)* con $A=0$. Tomemos $\epsilon > 0$, y elijamos δ como en *b)*. Si $s < x < t$ y $t-s < \delta$, tomemos s_n de modo que

$t-\delta < s_1 < s_2 < \ldots$ y $\lim s_n = s$. Entonces

$$|\mu((s_n, t))| < \epsilon(t - s_n)$$

para todo n suficientemente grande. Como $[s, t) = \bigcap (s_n, t)$ y

$$f(t) - f(s) = \mu([s, t)),$$

se deduce que

$$|f(t) - f(s)| \leqslant \epsilon|t - s| \qquad (s < x < t < s + \delta). \qquad [8.3]$$

Si se verifica *b)*, entonces $\mu(\{x\}) = 0$, donde $\{x\}$ es el conjunto que consta sólo de x. En consecuencia, f es continua en x. Por tanto, o s o t pueden cambiarse por x en [8.3], y concluimos que $f'(x) = 0$. ////

8.1.2. Definición. El teorema 8.1.1 sugiere que la derivada de μ en x podría definirse como el límite de los cocientes $\mu(I)/m(I)$ cuando los segmentos I se contraen hacia el punto x. Por supuesto, se podrían también considerar cocientes $\mu(E)/m(E)$, donde E recorre alguna otra familia de conjuntos. Haremos esto a continuación, no sólo en R^1, sino en cualquier espacio euclídeo R^k.

Supongamos $x \in R^k$. Una sucesión $\{E_i\}$ de conjuntos de Borel en R^k se dice que *se contrae aceptablemente a* x si existe un número $\alpha > 0$ con la propiedad siguiente: Cada E_i está en una bola abierta $B(x, r_i)$ con centro en x y radio $r_i > 0$, tal que

$$m(E_i) \geqslant \alpha \cdot m(B(x, r_i)) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots) \qquad [8.4]$$

y $r_i \to 0$ cuando $i \to \infty$. (Aquí y en lo sucesivo, m denota la medida de Lebesgue sobre R^k.)

Notemos que no se requiere que $x \in E_i$, ni siquiera que x esté en la adherencia de E_i. La condición [8.4] es un enunciado cuantitativo del requerimiento de que cada E debe ocupar una porción sustancial de algún entorno esférico de x. Por ejemplo, una sucesión anidada de k-celdas cuya arista más larga es, como mucho, 1 000 veces la arista más corta y cuyo diámetro tiende a cero, se contrae aceptablemente. Una sucesión de rectángulos (en R^2) cuyas aristas tienen longitudes $1/i$ y $(1/i^2)$ no se contrae aceptablemente.

8.1.3. Definición. Si μ es una medida de Borel compleja sobre R^k, si $x \in R^k$, si A es un número complejo, y si

$$\lim_{i \to \infty} \frac{\mu(E_i)}{m(E_i)} = A \qquad [8.5]$$

para *toda* sucesión $\{E_i\}$ que se contrae a x aceptablemente, entonces llamaremos a A la *derivada* de μ en x, y escribiremos

$$(D\mu)(x) = A. \qquad [8.6]$$

Un enunciado más completo sería que $(D\mu)(x)$ es la derivada de μ en x *con respecto a la medida de Lebesgue m.*

El resultado principal de este capítulo es el teorema 8.1.6. En su demostración se utilizarán los dos lemas siguientes.

8.1.4. Lema. *Si Ω es una colección de bolas abiertas en R^k cuya unión es W y si $t < m(W)$, entonces Ω tiene una subcolección finita disjunta $\{B_1, \ldots, B_n\}$ tal que*

$$\sum_{i=1}^{n} m(B_i) > 3^{-k}t.$$

DEMOSTRACIÓN. Tomemos K compacto, $K \subset W$, de modo que $m(K) > t$. (Para ello se utiliza la regularidad de m.) Siendo compacto, K puede recubrirse por un número finito de elementos de Ω, por ejemplo $S_1, S_2, \ldots, S_p$, que podemos ordenar de tal manera que sus radios $r(S_j)$ satisfagan $r(S_j) \geqslant r(S_{j+1})$ para $j = 1, \ldots, p-1$.

Pongamos $B_1 = S_1$. Eliminemos todos los S_j con $j > 1$ que intersecten B_1. Sea $B_2 = S_{i_2}$ el primero de los restantes S_j (si los hay). Eliminemos los S_j con $j > i_2$ que intersectan B_2, sea $B_3 = S_{i_3}$ el primero de los restantes, y así sucesivamente, tanto como sea posible.

El proceso anterior nos proporciona la colección disjunta $\{B_1, \ldots, B_n\}$.

Cada conjunto eliminado S_j es un subconjunto de una bola β_i concéntrica con algún B_i, cuyo radio es tres veces el de B_i. Entonces $K \subset \beta_1 \cup \ldots \cup \beta_n$. Se deduce que

$$t < m(K) \leqslant \sum_{i=1}^{n} m(\beta_i) = 3^k \sum_{i=1}^{n} m(B_i). \qquad ////$$

8.1.5. Lema. *Supongamos que μ es una medida de Borel positiva sobre R^k que es finita sobre conjuntos compactos. Sea A un conjunto de Borel para el que $\mu(A) = 0$. Entonces existe un conjunto $A' \subset A$ tal que*

a) $m(A - A') = 0$, *y*

b) $(D\mu)(x) = 0$ *para todo* $x \in A'$.

DEMOSTRACIÓN. Definamos A' como el conjunto de todos los $x \in A$ en los que

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mu(B(x, r))}{m(B(x, r))} = 0. \qquad [8.7]$$

(El límite de [8.7], si existe, se llama habitualmente la *derivada simétrica* de μ en x. Recordemos que $B(x, r)$ es la bola abierta con centro en x y radio r.)

Para $j = 1, 2, 3, \ldots$, sea P_j el conjunto de todos los $x \in A$ en los que

$$\limsup_{r \to 0} \frac{\mu(B(x, r))}{m(B(x, r))} > \frac{1}{j}. \qquad [8.8]$$

Demostraremos que

$$m(P_j) = 0 \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots). \qquad [8.9]$$

Como $A - A' = \cup P_j$, *a)* se deduce de [8.9].

Fijemos j, y $\epsilon > 0$. Como $\mu(A) = 0$, existe un conjunto abierto $V \supset A$ con $\mu(V) < \epsilon$. Todo $x \in P_j$ es el centro de una bola abierta $B_x \subset V$ tal que

$$m(B_x) < j\mu(B_x). \qquad [8.10]$$

Sea W la unión de estos B_x. Tomemos $t < m(W)$. El lema 8.1.4 muestra que $\{B_x : xP_j\}$ posee una subcolección *disjunta* $\{B_{x_1}, \ldots, B_{x_n}\}$ tal que

$$t < 3^k \sum_{i=1}^{n} m(B_{x_i}) < 3^k j \sum_{i=1}^{n} \mu(B_{x_i})$$
$$= 3^k j \mu(B_{x_1} \cup \ldots \cup B_{x_n}) \leqslant 3^k j \mu(V) < 3^k j \epsilon.$$

Entonces $m(W) \leqslant 3^k j \epsilon$. Como $P_j \subset W$ y ϵ es arbitrario, los P_j están en conjuntos abiertos de medida de Lebesgue arbitrariamente pequeña. El que m sea completa implica en consecuencia que P_j es medible y que $m(P_j) = 0$. Esto demuestra [8.9] y, por tanto, *a)*.

Para demostrar *b)*, fijemos $x \in A'$ y sea $\{E_i\}$ una sucesión que se contrae aceptablemente a x. Por la definición 8.1.2, existen bolas abiertas $B(x, r_i) \supset E_i$ tales que $r_i \to 0$ y

$$m(E_i) \geqslant \alpha m(B(x, r_i)) \qquad [8.11]$$

para todo i y algún $\alpha > 0$. Por tanto,

$$\frac{\mu(E_i)}{m(E_i)} \leqslant \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\mu(B(x, r_i))}{m(B(x, r_i))}. \qquad [8.12]$$

Como se verifica [8.7] para todo $x \in A'$, [8.12] muestra que $(D\mu)(x) = 0$. ////

8.1.6. Teorema. *Si μ es una medida de Borel compleja sobre R^k, entonces*

a) *$(D\mu)(x)$ existe en c.t.p.$[m]$,*
b) *$D\mu \in L^1(R^k)$, y*
c) *para todo conjunto de Borel E,*

$$\mu(E) = \mu_s(E) + \int_E (D\mu)(x)\, dx$$

donde $\mu_s \perp m$ y $(D\mu_s)(x) = 0$ en c.t.p.$[m]$.

Nótese que *c)* es la descomposición de Lebesgue de μ relativa a m. Esto conduce al siguiente corolario.

Corolario. 1) *$\mu \perp m$ si, y sólo si, $(D\mu)(x) = 0$ en c.t.p. $[m]$.*
2) *$\mu \ll m$ si, y sólo si,*

$$\mu(E) = \int_E (D\mu)(x)\, dx$$

para todo conjunto de Borel E. En este caso, la derivada $D\mu$ (calculada como límite de cocientes) coincide en c.t.p. $[m]$ con la derivada de Radon-Nikodym $d\mu/dm$.

DEMOSTRACIÓN. Debido al teorema de descomposición de Lebesgue, basta demostrar el teorema separadamente para $\mu \perp m$ y para $\mu \ll m$. Es suficiente además considerar sólo μ real.

Si $\mu \perp m$ y $\mu = \mu^+ - \mu^-$ es la descomposición de Jordan de μ entonces $\mu^+ \perp m$, de modo que existe un conjunto de Borel A con $\mu^+(A) = 0$ y $m(A^c) = 0$. Por el lema 8.1.5, $(D\mu^+)(x) = 0$ en c.t.p. $[m]$. El mismo razonamiento muestra también que $(D\mu^-)(x) = 0$ en c.t.p. $[m]$. Por tanto, $(D\mu)(x) = 0$ en c.t.p. $[m]$.

Por otra parte, supongamos que $\mu \ll m$ y que μ es real.

Por el teorema de Radon-Nikodym, existe una función de Borel real $f \in L^1(R^k)$ tal que

$$\mu(E) = \int_E f(x)\, dx \qquad [8.13]$$

para todo conjunto de Borel E. El teorema se deduce entonces de la igualdad

$$(D\mu)(x) = f(x) \qquad \text{en c.t.p. } [m]. \qquad [8.14]$$

que demostraremos a continuación.

Asociemos a cada número racional r los conjuntos

$$A_r = \{x : f(x) < r\}, \qquad B_r = \{x : f(x) \geqslant r\}, \qquad [8.15]$$

y definamos medidas de Borel positivas λ_r mediante

$$\lambda_r(E) = \int_{E \cap B_r} (f(x) - r)\, dx. \qquad [8.16]$$

Como $\lambda_r(A_r) = 0$, el lema 8.1.5 dice que existen conjuntos $A_r' \subset A_r$ tales que que $m(A_r - A_r') = 0$ y

$$(D\lambda_r)(x) = 0 \qquad \text{si } x \in A_r'. \qquad [8.17]$$

Pongamos $Y = \bigcup_r (A_r - A_r')$. Entonces $m(Y) = 0$. Tomemos un x fuera de Y, sea $\{E_i\}$ tal que se contrae a x aceptablemente, y tomemos $r > f(x)$. Entonces $x \in A_r$. Como

$$\mu(E) - rm(E) = \int_E (f(y) - r)\, dy \leqslant \lambda_r(E),$$

tenemos

$$\frac{\mu(E_i)}{m(E_i)} \leqslant \frac{\lambda_r(E_i)}{m(E_i)} + r \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots). \qquad [8.18]$$

Puesto que $x \notin Y$, tenemos $x \in A_r'$. Por tanto, [8.17] y [8.18] proporcionan

$$\limsup_{i \to \infty} \frac{\mu(E_i)}{m(E_i)} \leqslant r. \qquad [8.19]$$

Esto es cierto para todo racional $r > f(x)$. Por tanto:

$$\limsup_{i \to \infty} \frac{\mu(E_i)}{m(E_i)} \leqslant f(x). \qquad [8.20]$$

Hemos demostrado lo siguiente: *Casi todo $x \in R^k$ satisface* [8.20] *para toda sucesión $\{E_i\}$ que se contraiga a x aceptablemente.*

Si cambiamos μ por $-\mu$, y, por tanto, f por $-f$, se tiene que casi todo $x \in R^k$ satisface

$$\liminf_{i \to \infty} \frac{\mu(E_i)}{m(E_i)} \geqslant f(x) \qquad [8.21]$$

para toda sucesión $\{E_i\}$ que se contraiga a x aceptablemente.

Como [8.20] y [8.21] proporcionan [8.14], ello completa la demostración del teorema. ////

8.1.7. Observaciones. El teorema 8.1.6 se verifica evidentemente también si se define μ sólo sobre los conjuntos de Borel de algún conjunto abierto $V \subset R^k$ (las conclusiones entonces también se verifican sólo en V, por supuesto), como muestra un examen de la demostración. O podemos simplemente definir $\mu(E)=0$ para todo $E \subset V^c$ y aplicar el teorema como está enunciado.

Si $f \in L^1(R^k)$ y

$$\mu(E) = \int_E f(x)\, dx, \qquad [8.22]$$

es razonable llamar a μ la *integral indefinida* de f. Con esta terminología, el teorema 8.1.6 afirma que la derivada de una integral indefinida es igual al integrando en c.t.p. $[m]$, y que toda $\mu \ll m$ es la integral indefinida de su derivada.

La diferenciabilidad de integrales indefinidas puede interpretarse como una especie de «continuidad de los promedios» de las funciones Lebesgue integrables. Porque si se verifica [8.13], la afirmación $(D\mu)(x_0)=f(x_0)$ no es nada más que la expresión de que

$$\frac{1}{m(E)} \int_E f(x)\, dx \to f(x_0) \qquad [8.22]$$

cuando E se contrae a x_0 aceptablemente, o que

$$\frac{1}{m(E)} \int_E \{f(x) - f(x_0)\}\, dx \to 0. \qquad [8.23]$$

El primer miembro de [8.22] es la media de f sobre conjuntos pequeños E cerca de x_0; el primer miembro de [8.23] es la media de $f-f(x_0)$ sobre E.

Ahora bien, [8.23] podría deberse a un efecto de cancelación causado por cambios de signo de $f-f(x_0)$ en pequeños entornos de casi todo punto x_0; o podría ser cierta una afirmación más fuerte, y es que las medias de $|f-f(x_0)|$ realmente resultan pequeñas en pequeños entornos de casi todo punto x_0. De hecho, este último resultado es cierto:

8.1.8. Teorema. *Supongamos $f \in L^1(R^k)$. Definamos el «conjunto de Lebesgue» L_f de f como el conjunto de todos los $x_0 \in R^k$ tales que*

$$\lim_{i \to \infty} \frac{1}{m(E_i)} \int_{E_i} |f(x) - f(x_0)|\, dx = 0 \qquad [8.24]$$

para toda sucesión $\{E_i\}$ que se contrae a x aceptablemente. Entonces casi todo $x_0 \in R^k$ pertenece a L_f.

DEMOSTRACIÓN. Sea S un conjunto denso numerable en el plano complejo. Para $r \in S$, definimos

$$\mu_r(E) = \int_E |f(x) - r| \, dx. \qquad [8.25]$$

El teorema 8.1.6 muestra que

$$(D\mu_r)(x_0) = |f(x_0) - r| \qquad [8.26]$$

para casi todo x_0. Sea Y_r el conjunto excepcional. Pongamos $Y = \cup Y_r$. Entonces $m(Y) = 0$.

Si $x_0 \notin Y$, $\{E_i\}$ se contrae a x_0 aceptablemente, y $\epsilon > 0$, existe $r \in S$ tal que $|f(x_0) - r| < \epsilon$; en consecuencia $|f(x) - f(x_0)| < |f(x) - r| + \epsilon$, y

$$\frac{1}{m(E_i)} \int_{E_i} |f(x) - f(x_0)| \, dx < \frac{\mu_r(E_i)}{m(E_i)} + \epsilon. \qquad [8.27]$$

Como $x_0 \notin Y$, se verifica [8.26], y, por tanto, el primer miembro de [8.27] es menor que 2ϵ para todo i suficientemente grande. Esto demuestra [8.24] para todo $x_0 \notin Y$, y completa el teorema. ////

A veces es ventajoso restringir la atención a tipos especiales de sucesiones que se contraen aceptablemente. Consideraremos algún ejemplo a continuación.

8.1.9. Definición. Sea μ una medida de Borel real sobre R^k. Para $x \in R^k$ y $n = 1, 2, 3, \ldots$, sea $\Delta_n(x)$ el supremo de los cocientes $\mu(C)/m(C)$, donde C recorre todos los cubos abiertos en R^k cuyas aristas son paralelas a los ejes coordenados y tienen una longitud menor que $1/n$, y tales que $x \in C$. Definamos

$$(\mathfrak{D}^Q\mu)(x) = \lim_{n \to \infty} \Delta_n(x).$$

Como $\Delta_n \geqslant \Delta_{n+1}$, este límite existe para todo $x \in R^k$, y es un número de $[-\infty, \infty]$.

Para definir$(\mathfrak{D}_Q\mu)(x)$, cambiemos simplemente «supremo» por «ínfimo» en el párrafo anterior.

Los números $(\mathfrak{D}^Q\mu)(x)$ y $(\mathfrak{D}_Q\mu)(x)$ podrían llamarse las «derivadas cúbicas» superior e inferior de μ en x. Nótese que cuando $k = 1$ los cubos C son precisamente los segmentos I que aparecían en el apartado 8.1.1.

Es fácil ver que $\mathfrak{D}^Q\mu$ y $\mathfrak{D}_Q\mu$ son funciones de Borel: Si $\Delta_n(x) > \alpha$, entonces $\mu(C) > \alpha m(C)$ para algún C (de arista $< 1/n$) tal que $x \in C$; obviamente, $\Delta_n(y) > \alpha$ para todo y en este C; entonces Δ_n es semicontinua inferiormente, así que $\mathfrak{D}^Q\mu$ es una función de Borel. Lo mismo puede aplicarse a $\mathfrak{D}_Q\mu$.

8.1.10. Teorema. *Supongamos que μ es una medida de Borel real sobre R^1, $\mu \geqslant 0$, y $\mu \perp m$. Entonces*

$$(\mathfrak{D}_Q\mu)(x) = \infty \quad \text{en c.t.p. } [\mu].$$

Esto complementa el teorema 8.1.6, que afirma que $(\mathfrak{D}\mu)(x) = 0$ en c.t.p. $[m]$.

DEMOSTRACIÓN. Fijemos $\epsilon > 0$. Como $\mu \perp m$, μ está concentrada sobre un conjunto abierto V con $m(V) < \epsilon$. Para $n = 1, 2, 3, \ldots$ definamos E_n como el conjunto de todos los $x \in V$ en los que $(\mathfrak{D}_Q\mu)(x) < n$. Sea K un subconjunto compacto de E_n. Si podemos demostrar que $\mu(K) = 0$, la regularidad de μ (teorema 2.4.4) implicará que $\mu(E_n) = 0$ para todo n, y esto proporciona el resultado buscado.

Cada $x \in K$ está en un segmento $I_x \subset V$ tal que $\mu(I_x) < n \cdot m(I_x)$. Siendo compacto, K puede recubrirse con un número finito de estos segmentos I_{x_i}. Si algún punto de R^1 está en tres segmentos, uno de ellos está en la unión de los otros dos, y puede eliminarse sin alterar la unión. De esta forma, podemos eliminar los segmentos superfluos I_{x_i} y llegar a una situación en la que ningún punto está en más de dos segmentos I_{x_i}. Entonces

$$\mu(K) \leqslant \mu\left(\bigcup_i I_{x_i}\right) \leqslant \sum_i \mu(I_{x_i}) < n \sum_i m(I_{x_i})$$

$$\leqslant 2n \cdot m\left(\bigcup_i I_{x_i}\right) \leqslant 2n \cdot m(V) < 2n\epsilon.$$

Como ϵ es arbitrario, $\mu(K) = 0$, lo que completa la demostración. ////

Nótese que en la demostración precedente ha sido utilizada una propiedad muy especial de la recta. El ejercicio 3 muestra que el teorema 8.1.10 es de hecho falso en R^k si $k > 1$. Sin embargo, es cierto el resultado más débil siguiente. Su corolario se utilizará en la demostración del teorema 8.4.5.

8.1.11. Teorema. *Supongamos que μ es una medida de Borel real sobre R^k, $\mu \geqslant 0$, y $\mu \perp m$. Entonces*

$$(\mathfrak{D}^Q\mu)(x) = \infty \quad \text{en c.t.p. } [\mu].$$

Corolario. *Si $\mu \geqslant 0$ y $(\mathfrak{D}^Q\mu)(x) < \infty$ para todo $x \in R^k$, entonces $\mu \ll m$.*

DEMOSTRACIÓN. Como $\mu(R^k) < \infty$, se ve fácilmente que $(\mathfrak{D}^Q\mu)(x) < \infty$ en algún $x \in R^k$ si, y sólo si, existe un entero $j(x)$ tal que $\mu(C) < j(x)m(C)$ para todo cubo abierto C (con aristas paralelas a los ejes coordenados) que contiene a x.

Para $j = 1, 2, 3, \ldots$, sea E_j el conjunto de todos los $x \in R^k$ tales que $\mu(C) < jm(C)$ para todo C que contiene a x. Nótese que cada E_j es un conjunto cerrado.

Tomemos $\epsilon > 0$. Como $\mu \perp m$, μ está concentrada sobre algún conjunto abierto V con $\mu(V) < \epsilon$. Siendo abierto, V es una unión numerable de cajas disjuntas, como en el apartado 2.5.1.

Fijemos j. Sean $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ aquellas cajas de entre las citadas antes que intersectan $V \cap E_j$. Como cada Q es la intersección de una sucesión decreciente de cubos abiertos C, la definición de E_j muestra que $\mu(Q_n) \leqslant jm(Q_n)$ para cada n. Por tanto:

$$\mu(E_j) = \mu(V \cap E_j) \leqslant \mu\left(\bigcup_n Q_n\right) = \sum_n \mu(Q_n)$$

$$\leqslant j \sum_n m(Q_n) = jm\left(\bigcup_n Q_n\right) \leqslant jm(V) < j\epsilon.$$

Como ϵ es arbitrario, $\mu(E_j)=0$. Por el primer párrafo de esta demostración, $(\mathfrak{D}^Q\mu)(x) < \infty$ si, y sólo si, $x \in \cup E_j$. Pero $\mu(\cup E_j)=0$. Esto completa la demostración. ////

8.2. FUNCIONES DE VARIACION ACOTADA

8.2.1. Definiciones. Asociamos a cada función compleja f sobre R^1 su *función de variación total* T_f definida mediante

$$T_f(x)=\sup \sum_{j=1}^{N} |f(x_j)-f(x_{j-1})| \qquad (-\infty < x < \infty), \tag{8.28}$$

donde el supremo se toma sobre todos los N y sobre todas las elecciones de $\{x_j\}$ tales que

$$-\infty < x_0 < x_1 < \ldots < x_N = x. \tag{8.29}$$

En general,

$$0 \leqslant T_f(x) \leqslant T_f(y) \leqslant \infty \qquad (x < y). \tag{8.30}$$

Si T_f es una función acotada, entonces [8.30] implica que

$$V(f)= \lim_{x \to +\infty} T_f(x) \tag{8.31}$$

existe y es finito. En ese caso decimos que f es de *variación acotada,* y llamamos a $V(f)$ la *variación total de* f; la clase de todas estas f se denotará mediante BV.

Si $-\infty < x \leqslant \infty$, se dice que f tiene *límite a la izquierda* en x, y se escribe $f(x-)$, si a cada $\epsilon > 0$ le corresponde un número real $\alpha < x$ tal que

$$\alpha < t < x \quad \text{implica} \quad |f(t)-f(x-)| < \epsilon. \tag{8.32}$$

Si $f(x-)=f(x)$ se dice *continua a la izquierda* en x.

Los límites y continuidad a la derecha se definen análogamente en $[-\infty, \infty)$.

Llamamos *normalizada* a una función $f \in BV$ tal que $f(x) \to 0$ cuando $x \to -\infty$, y que sea continua a la izquierda en todo punto de R^1. A la clase de estas funciones la denotaremos mediante NBV.

En vez de considerar sólo funciones definidas sobre todo R^1, podríamos igualmente bien considerar funciones definidas sobre un segmento o intervalo cualquiera de R^1. Ni las definiciones precedentes ni los teoremas siguientes se modificarían apreciablemente.

8.2.2. Teorema.

a) *Si* $f \in BV$ *y* $x < y$, *entonces*

$$|f(y)-f(x)| \leqslant T_f(y)-T_f(x).$$

b) *Si* $f \in BV$, *entonces* $f(x-)$ *existe en todo punto de* $(-\infty, \infty]$, $f(x+)$ *existe en todo punto de* $[-\infty, \infty)$, *el conjunto de puntos donde* f *es*

discontinua es a lo sumo numerable, y existe una única constante c y una única función $g \in NBV$ tal que

$$f(x) = c + g(x)$$

en todos los puntos de continuidad de f. Además, $V(g) \leqslant V(f)$.

c) *Si $f \in NBV$, entonces $T_f \in NBV$.*

DEMOSTRACIÓN.

a) Si $x < y$ y $\epsilon > 0$, existen puntos $x_0 < x_1 < \ldots < x_n = x$ de modo que

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| > T_f(x) - \epsilon. \qquad [8.33]$$

En consecuencia

$$T_f(y) \geqslant |f(y) - f(x)| + \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| > |f(y) - f(x)| + T_f(x) - \epsilon.$$

Esto demuestra *a)*.

b) Se deduce de *a)* que si $\{x_i\}$ es una sucesión para la que $\{T_f(x_i)\}$ es una sucesión de Cauchy, entonces $\{f(x_i)\}$ es también una sucesión de Cauchy. Como las funciones monótonas (y T_f en particular) tienen límites a la izquierda y a la derecha en todos los puntos, y como tienen a lo sumo un número de discontinuidades numerable, lo mismo se verifica, por tanto, para f. Podemos definir, en consecuencia,

$$c = \lim_{t \to -\infty} f(t), \qquad g(x) = f(x-) - c \qquad (x \in R^1). \qquad [8.34]$$

Es claro que $g(x) \to 0$ cuando $x \to -\infty$. Si $x \in R^1$ y $\epsilon > 0$, existe un $\alpha < x$ tal que $|f(t) - f(x-)| < \epsilon$ para todo $t \in (\alpha, x)$. Puesto que $f(t-)$ es un punto límite del conjunto de todos los números $f(s)$, para $\alpha < s < t$, se deduce que $|f(t-) - f(x-)| \leqslant \epsilon$ si $\alpha < t < x$. Por tanto, g es continua a la izquierda.

Si $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ y $\delta > 0$, entonces

$$\sum_{i=1} |g(x_i) - g(x_{i-1})| = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1} |f(x_i - \delta) - f(x_{i-1} - \delta)|, \qquad [8.35]$$

y como ninguna de las sumas del segundo miembro de [8.35] supera a $V(f)$, tenemos $V(g) \leqslant V(f)$. En particular, $g \in BV$.

Esto demuestra *b)* salvo la unicidad. Pero si dos funciones continuas a la izquierda coinciden sobre un subconjunto denso de R^1, son idénticas. La unicidad de g se deduce ahora fácilmente.

c) Si $f \in NBV$, fijemos $x \in R^1$, $\epsilon > 0$, y elijamos puntos

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_n = x$$

de modo que se verifique [8.33]. Si $t_0 < \ldots < t_N < x_0$, entonces

$$T_f(x) \geqslant \sum_{j=1}^{N} |f(t_j) - f(t_{j-1})| + \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|. \qquad [8.36]$$

Por [8.33], la primera suma de [8.36] es menor que ϵ. Por tanto, $T_f(x_0) \leqslant \epsilon$, y de aquí $T_f(t) \to 0$ cuando $t \to -\infty$.

Finalmente, tomemos t tal que $x_{n-1} < t < x_n$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{n-1} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(t) - f(x_{n-1})| \leqslant T_f(t) \leqslant T_f(x^-) \leqslant T_f(x). \qquad [8.37]$$

Si hacemos $t \to x_n = x$, el primer miembro de [8.37] tiende al primer miembro de [8.33], ya que $f(x) = f(x^-)$, y esto proporciona $T_f(x) - \epsilon < T_f(x^-)$. La comparación con [8.37] muestra ahora que $T_f(x^-) = T_f(x)$, lo que completa la demostración. ////

El teorema siguiente explica la importancia de la clase *NBV*. Obsérvese cómo la correspondencia entre f y μ asocia la variación total de f con la de μ, y cómo la existencia de la medida de Lebesgue se utiliza para construir μ en la parte *b)*.

8.2.3. Teorema.

a) Si μ es una medida de Borel compleja sobre R^1 y si

$$f(x) = \mu((-\infty, x)) \qquad (x \in R^1), \qquad [8.38]$$

entonces $f \in NBV$.

b) Recíprocamente, a toda $f \in NBV$ le corresponde una única medida de Borel compleja μ tal que se verifica [8.38]; *para esta μ,*

$$T_f(x) = |\mu|((-\infty, x)) \qquad (x \in R^1). \qquad [8.39]$$

c) Si se verifica [8.38], *f es continua precisamente en aquellos puntos x en los que $\mu(\{x\}) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Si f se define mediante [8.38] y si $x_1 < x_2 < \ldots$, $x_n \to x$, entonces $f(x_n) \to f(x)$, puesto que

$$(-\infty, x) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, x_n). \qquad [8.40]$$

Entonces f es continua a la izquierda. Si $x \to -\infty$, entonces $\bigcap (-\infty, x_n) = \emptyset$, y, por tanto, $f(x) \to 0$ cuando $x \to -\infty$, por el teorema 1.5.2, *e)*. Si $x_0 < x_1 < \ldots < x_n = x$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} |\mu([x_{i-1}, x_i))| \leqslant |\mu|((-\infty, x))$$

así que

$$T_f(x) \leqslant |\mu|((-\infty, x)). \qquad [8.41]$$

Esto demuestra *a)*.

En la demostración de *b)*, supongamos en primer lugar que $f \in NBV$, es no decreciente y $f \not\equiv 0$. Asociemos a cada punto $x \in R^1$ un conjunto $\Phi[x]$, de la forma siguiente: Si f es continua en x, $\Phi[x]$ es el punto $f(x)$; si $f(x+) > f(x)$, entonces $\Phi[x]$ es el intervalo $[f(x), f(x+)]$. Si $E \subset R^1$, sea $\Phi[E]$ la unión de todos

los conjuntos $\Phi[x]$, para $x \in E$. Pretendemos probar que la definición

$$\mu(E) = m(\Phi[E]) \qquad [8.42]$$

nos da una medida que satisface [8.38]; m es la medida de Lebesgue en R^1.

Pongamos $J = \Phi[R^1]$. Entonces J es una 1-celda (es decir, un intervalo con o sin extremos). Existe a lo sumo una cantidad numerable de puntos $y_i \in J$ tales que $f^{-1}(y)$ consta de más de un punto; para estos y_i, $f^{-1}(y_i)$ es una 1-celda.

Sea Σ la clase de todos los $E \subset R^1$ tales que $\Phi[E]$ es un conjunto de Borel. Si E es una 1-celda, también lo es $\Phi[E]$, y, por tanto, $E \in \Sigma$. Para cualquier $E \subset R^1$, $\Phi[E^c]$ es la unión de $J - \Phi[E]$ y de un conjunto a lo sumo numerable (un subconjunto de $\{y_i\}$); entonces $E \in \Sigma$ implica $E^c \in \Sigma$. Por otro lado:

$$\Phi[E_1 \cup E_2 \cup \ldots] = \Phi[E_1] \cup \Phi[E_2] \subset \ldots.$$

Esto prueba que Σ es una σ-álgebra que contiene a todos los segmentos, y, por tanto, a todos los conjuntos de Borel, así que $m(\Phi[E])$ está definida para todos los conjuntos de Borel E. Más aún, μ es numerablemente aditiva, porque si $\{E_i\}$ es una colección disjunta de conjuntos de Borel en R^1, entonces $\{\Phi[E_i]\}$ es disjunta, salvo para nuestro conjunto $\{y_i\}$ a lo sumo numerable, y esto no afecta a la aditividad numerable de μ porque $m(E) = 0$ para todo conjunto numerable E.

Por tanto, [8.42] define una medida de Borel. Como $\Phi[(-\infty, x)]$ es una 1-celda cuyos puntos extremos son 0 y $f(x)$, [8.42] implica que se verifica [8.38].

Volvemos ahora al caso general de *b)*. Si $f \in NBV$, entonces $f = u + iv$, u y v reales, $u \in NBV$, y $T_u \in NBV$ por el teorema 8.2.2, *c)*. Pongamos

$$u_1 = \tfrac{1}{2}(T_u + u), \qquad u_2 = \tfrac{1}{2}(T_u - u). \qquad [8.43]$$

Entonces u_1 y $u_2 \in NBV$, y son no decrecientes; esto se deduce fácilmente del teorema 8.2.2, *a)*. La construcción precedente asocia medidas μ_1 y μ_2 a u_1 y u_2, y se asociará $\mu_1 - \mu_2$ a $u = u_1 - u_2$. Si procedemos análogamente con v y combinamos los resultados, obtenemos una medida μ que corresponde a f en el sentido de que se verifica [8.38].

Si dos medidas regulares (véase teorema 2.4.4) coinciden sobre todos los segmentos de la forma $(-\infty, x)$, coinciden sobre todas las 1-celdas de la forma $[\alpha, \beta)$, por tanto, también sobre todos los conjuntos abiertos, y, por consiguiente, sobre todos los conjuntos de Borel. Est demuestra la afirmación de unicidad de *b)*.

Finalmente, sea λ la medida asociada a T_f de la misma manera. Si $\alpha < \beta$, entonces

$$\mu([\alpha, \beta)) = f(\beta) - f(\alpha), \qquad \lambda([\alpha, \beta)) = T_f(\beta) - T_f(\alpha). \qquad [8.44]$$

En consecuencia, la desigualdad

$$|\mu(E)| \leqslant \lambda(E) \qquad [8.45]$$

se verifica si $E = [\alpha, \beta)$. Como todo conjunto abierto en R^1 es una unión numerable disjunta de tales 1-celdas, se verifica [8.45] para todo conjunto abierto, y, por tanto, para todo conjunto de Borel. La definición de la variación total $|\mu|$ de μ implica ahora que $|\mu| \leqslant \lambda$. En particular,

$$|\mu|((-\infty, x)) \leqslant \lambda((-\infty, x)) = T_f(x). \qquad [8.46]$$

Por tanto, [8.39] se deduce de [8.41] y [8.46]. ////

La demostración de *c)* se deja como ejercicio.

8.3. DIFERENCIACION DE FUNCIONES DE PUNTO

8.3.1. Funciones absolutamente continuas. Una función compleja f sobre R^1 se dice que es *absolutamente continua* si a todo $\epsilon > 0$ le corresponde un $\delta > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^{N} (\beta_i - \alpha_i) < \delta \quad \text{implica} \quad \sum_{i=1}^{N} |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| < \epsilon, \qquad [8.47]$$

si $(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_N, \beta_N)$ son segmentos disjuntos.

Obsérvese que toda función absolutamente continua es uniformemente continua (tomar $N=1$) y que la restricción de cualquier función absolutamente continua a un intervalo acotado es de variación acotada. Sin embargo, si $f(x) = \operatorname{sen} x$, o si $f(x) = x + |x|$, f es absolutamente continua, pero $f \notin BV$.

Los dos significados del término «absolutamente continua» se relacionan de la manera siguiente:

8.3.2. Teorema. *Supongamos que $f \in NBV$ y que μ está asociada a f como en el teorema 8.2.3. Entonces $\mu \ll m$ si, y sólo si, f es absolutamente continua.*

(Como es habitual, m denota la medida de Lebesgue en R^1.)

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que f es absolutamente continua. Sea E un conjunto de Borel tal que $m(E)=0$, y tomemos $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$ de acuerdo con el apartado 8.3.1. La regularidad de μ muestra que existen conjuntos abiertos $W_1 \supset W_2 \supset \ldots \supset E$ tales que $m(W_1) < \delta$ y $\mu(W_n) \to \mu(E)$ cuando $n \to \infty$. Como W_n es una unión disjunta de segmentos $I_j = (\alpha_j, \beta_j)$, y $\Sigma(\beta_j - \alpha_j) < \delta$, se tiene, por tanto, que

$$|\mu(W_n)| \leqslant \sum_i |\mu(I_j)| = \sum_j |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| \leqslant \epsilon.$$

Consecuentemente, $m(E)=0$. Esto demuestra que $\mu \ll m$.

El recíproco se deduce del teorema 6.2.5. ////

Estamos ahora en condiciones de traducir nuestros resultados previos sobre diferenciación de funciones de conjunto al lenguaje de funciones de punto. Los teoremas del 8.3.3 al 8.3.5 son resultados clásicos, debidos a Lebesgue. Los teoremas 8.3.4 y 8.3.7 generalizan el teorema fundamental del cálculo.

8.3.3. Teorema. *Si $g \in L^1(R^1)$, y si*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)\, dt \qquad (-\infty < x < \infty), \qquad [8.48]$$

entonces $f \in NBV$, f es absolutamente continua, y

$$f'(x) = g(x) \quad \text{en c.t.p. } [m]. \qquad [8.49]$$

DEMOSTRACIÓN. Definamos

$$\mu(E)=\int_E g(t)\,dt \qquad [8.50]$$

para todo conjunto de Borel E. Entonces $f(x)=\mu((-\infty,x))$ y $\mu \ll m$. Por el teorema 8.2.3, $f \in NBV$; por el teorema 8.3.2, f es absolutamente continua; los teoremas 8.1.1 y 8.1.6 implican que

$$f'(x)=(D\mu)(x)=g(x) \quad \text{en c.t.p. } [m]. \qquad //// \quad [8.51]$$

8.3.4. Teorema. *Si $f \in NBV$, entonces f es diferenciable en c.t.p. $[m]$, $f' \in L^1(R^1)$, y existe una función $f_s \in NBV$ con $f_s'(x)=0$ en c.t.p. $[m]$ tal que*

$$f(x)=f_s(x)+\int_{-\infty}^{x} f'(t)\,dt \qquad (-\infty < x < \infty); \qquad [8.52]$$

$f_s=0$ si, y sólo si, f es absolutamente continua; si f es no decreciente, también lo es f_s.

Llamamos a f_s la *parte singular* de f. Es quizá un hecho inesperado el que existen funciones continuas singulares que no son constantes. En el apartado 8.3.6, *b)* se dan algunos ejemplos. La palabra «singular» aplicada a medidas tiene su origen en este fenómeno.

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema 8.2.3 existe una medida compleja μ sobre R^1 tal que $\mu((-\infty,x))=f(x)$. Por el teorema 8.1.6,

$$\mu(E)=\mu_s(E)+\int_E (D\mu)(t)\,dt. \qquad [8.53]$$

Pongamos

$$f_s(x)=\mu_s((-\infty,x)) \qquad (-\infty < x < \infty). \qquad [8.54]$$

Los teoremas 8.1.6 y 8.1.1 muestran que $f_s'(x)=0$ en c.t.p. [m] y que

$$f'(x)=(D\mu)(x)$$

Por tanto, [8.52] se deduce de [8.53] si tomamos $E=(-\infty,x)$.

Por el teorema 8.3.2, f es absolutamente continua si, y sólo si, $\mu \ll m$, es decir, si, y sólo si, $\mu_s=0$.

Por último, si f es no decreciente, $\mu \geqslant 0$, y, por tanto, $\mu_s \geqslant 0$, por lo que f_s es no decreciente.

8.3.5. Teorema. *Si $f \in BV$, f es diferenciable en c.t.p. $[m]$, y $f' \in L^1(R^1)$.*

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema 8.2.2, existe una $g \in NBV$ tal que

$$f(x)=g(x)+c$$

en todos los puntos de continuidad de f. El teorema 8.3.4 puede aplicarse a g.

En consecuencia, el lema siguiente (con $h=f-g$) implica el teorema:

Lema. *Si $h \in BV$ y $h(x)=0$, salvo a lo sumo en un conjunto numerable, entonces $h'(x)=0$ en c.t.p.*

Para demostrar el lema, sea $S=\{x_i\}$ el conjunto a lo sumo numerable en el que $h(x_i)=c_i\neq 0$. Como $h\in BV$, se ve fácilmente que $\Sigma|c_i|<\infty$. Fijemos k, y sea A_k el conjunto de todos los $x\notin S$ en los que

$$\left|\frac{h(y)-h(x)}{y-x}\right|>\frac{1}{k} \qquad [8.55]$$

para un número infinito de y. Entonces $x\in A_k$ si, y sólo si, $|x-x_i|<k|c_i|$ para infinitos i. Si J es el segmento con centro en x_i y longitud $2k|c_i|$, se tiene que

$$\Sigma m(J_i)=2k\Sigma|c_i|<\infty, \qquad [8.56]$$

y, por tanto, $m(A_k)=0$ para $k=1,2,3,\ldots$, por el teorema 1.10.7.

Pero si $x\notin S\cup A_1\cup A_2\cup A_3\cup\ldots$, entonces $h'(x)=0$. Esto completa la demostración. ////

Los ejercicios 5 y 6 se refieren a este lema.

8.3.6. Ejemplos. Los teoremas precedentes muestran que la ecuación

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\,dt \qquad [8.57]$$

(en la que el segundo miembro es una integral de Lebesgue) se verifica para todo x en algún intervalo $[a,b]$ si, y sólo si, f es absolutamente continua en $[a,b]$. Se puede preguntar si la existencia de f' implica la continuidad absoluta de f. En esta forma, la pregunta no es suficientemente precisa. Daremos dos ejemplos que muestran cómo [8.57] puede no verificarse, y un teorema en el que se deduce [8.57] de otro conjunto de condiciones suficientes.

a) Pongamos $f(x)=x^2\operatorname{sen}(x^{-2})$ si $x\neq 0$, $f(0)=0$. Entonces f es diferenciable en todo punto, pero

$$\int_0^1 |f'(t)|\,dt=\infty; \qquad [8.58]$$

por tanto, $f'\notin L^1$. Además, $f\notin BV$ en $[0,1]$.

Si interpretamos la integral en [8.57] (con $[0,1]$ en lugar de $[a,b]$) como el límite, cuando $\epsilon\to 0$, de las integrales sobre $[\epsilon,1]$, entonces [8.57] se sigue verificando para esta f.

Situaciones más complicadas pueden surgir en las que este tipo de paso al límite no se utiliza. Existen procesos de integración, debidos a DENJOY y PERRON [18,28], concebidos de tal manera que se verifica [8.57] si f es diferenciable en todo punto. Estos dejan de tener la propiedad de que la integrabilidad de f implica la de $|f|$, y, por tanto, no desempeñan un papel tan importante en análisis.

b) Supongamos que f es continua en $[a,b]$, diferenciable en casi todo punto de $[a,b]$, y $f'\in L^1$ en $[a,b]$. ¿Implican estas hipótesis que se verifica [8.57]?

Respuesta: No.

Tomemos $\{\delta_n\}$ de modo que $1=\delta_0>\delta_1>\delta_2>\ldots,\delta_n\to 0$. Pongamos $E_0=[0,1]$. Supongamos que $n\geqslant 0$ y que E_n se construye de modo que sea la

unión de 2^n intervalos cerrados disjuntos, cada uno de longitud $2^{-n}\delta_n$. Suprimamos un segmento en el centro de cada uno de estos 2^n intervalos, de modo que los 2^{n+1} intervalos restantes tengan como longitud $2^{-n-1}\delta_{n+1}$ (esto es posible, porque $\delta_{n+1} < \delta_n$). Sea E_{n+1} la unión de estos 2^{n+1} intervalos. Entonces $E_1 \supset E_2 \supset \ldots$, $m(E_n) = \delta_n$, y, si

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n, \qquad [8.59]$$

entonces E es compacto y $m(E) = 0$. (De hecho, E es perfecto.) Pongamos

$$g_n = \delta_n^{-1}\chi_{E_n} \quad \text{y} \quad f_n(x) = \int_0^x g_n(t)\,dt \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \qquad [8.60]$$

Entonces $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$, y cada f_n es una función monótona que es constante sobre cada segmento del complementario de E_n. Si I es uno de los 2^n intervalos cuya unión es E_n, entonces

$$\int_I g_n(t)\,dt = \int_I g_{n+1}(t)\,dt = 2^{-n}. \qquad [8.61]$$

Se deduce de [8.61] que

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) \qquad (x \notin E_n) \qquad [8.62]$$

y que

$$|f_n(x) - f_{n+1}(x)| \leqslant \int_I |g_n - g_{n+1}| < 2^{-n+1} \qquad (x \in E_n). \qquad [8.63]$$

En consecuencia $\{f_n\}$ converge uniformemente a una función monótona continua f, con $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ y $f'(x) = 0$ para todo $x \notin E$. Como $m(E) = 0$, tenemos $f' = 0$ en c.t.p.

Por tanto, [8.57] no se verifica. De paso, hemos construido ejemplos de funciones continuas singulares como las definidas después del enunciado del teorema 8.3.4.

Si $\delta_n = (2/3)^n$, el conjunto E es el conjunto de los «tercios intermedios» de Cantor.

8.3.7. Teorema. *Supongamos que f es una función real en $[a, b]$ que es diferenciable en todo punto de $[a, b]$, y supongamos que $f' \in L^1$ en $[a, b]$. Entonces*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt \qquad (a \leqslant x \leqslant b). \qquad [8.64]$$

Nótese que se supone que la diferenciabilidad se verifica en *todo* punto de $[a, b]$.

DEMOSTRACIÓN. Es claro que basta demostrarlo para $x = b$. Fijemos $\epsilon > 0$. El teorema 2.6.2 asegura la existencia de una función semicontinua inferiormente g sobre $[a, b]$ tal que $g > f'$ y

$$\int_a^b g(t)\,dt < \int_a^b f'(t)\,dt + \epsilon. \qquad [8.65]$$

Realmente, el teorema 2.6.2 sólo da $g \geqslant f'$, pero como $m([a, b]) < \infty$, podemos añadir una pequeña constante a f sin afectar a [8.65]. Para cualquier $\eta > 0$, definamos

$$F_\eta(x) = \int_a^x g(t)\, dt - f(x) + f(a) + \eta(x - a) \qquad (a \leqslant x \leqslant b). \tag{8.66}$$

Mantengamos η fijo por el momento. A cada $x \in [a, b)$ le corresponde un $\delta_x > 0$ tal que

$$g(t) > f'(x) \quad \text{y} \quad \frac{f(t) - f(x)}{t - x} < f'(x) + \eta \tag{8.67}$$

para todo $t \in (x, x + \delta_x)$, puesto que g es semicontinua inferiormente y $g(x) > f'(x)$. Para cualquiera de estos t tenemos, por tanto,

$$\begin{aligned} F_\eta(t) - F_\eta(x) &= \int_x^t g(s)\, ds - [f(t) - f(x)] + \eta(t - x) \\ &> (t - x)f'(x) - (t - x)[f'(x) + \eta] + \eta(t - x) = 0. \end{aligned}$$

Como $F_\eta(a) = 0$ y F_η es *continua*, existe un punto último $x \in [a, b]$ en el que $F_\eta(x) = 0$. Si $x < b$, el cálculo anterior implica que $F_\eta(t) > 0$ para $t \in (x, b]$. En cualquier caso, $F_\eta(b) = 0$. Puesto que esto se verifica para todo $\eta > 0$, [8.65] y [8.66] proporcionan

$$f(b) - f(a) \leqslant \int_a^b g(t)\, dt < \int_a^b f'(t)\, dt + \epsilon, \tag{8.68}$$

y como ϵ es arbitrario, concluimos que

$$f(b) - f(a) \leqslant \int_a^b f'(t)\, dt. \tag{8.69}$$

Si f satisface las hipótesis del teorema, $-f$ también; en consecuencia [8.69] se verifica con $-f$ en lugar de f, y estas dos desigualdades juntas dan [8.64]. ////

8.4. TRANSFORMACIONES DIFERENCIABLES

8.4.1. Definiciones. A cualquier $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in R^k$ le asociamos la norma

$$\|x\| = \text{máx}\,(|\xi_1|, \ldots, |\xi_k|). \tag{8.70}$$

Esta norma se adapta mejor para tratar con cubos que la norma euclídea ordinaria

$$\|x\|_2 = (\xi_1^2 + \ldots + \xi_k^2)^{1/2}. \tag{8.71}$$

Como $\|x\| \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{k}\, \|x\|$, las métricas inducidas por estas dos normas dan lugar a la misma topología sobre R^k. En particular, $\|x_n\| \to 0$ cuando $n \to \infty$ si, y sólo si, $\|x_n\|_2 \to 0$.

Supongamos que V es un conjunto abierto en R^k, que T es una aplica-

ción de V en R^k, $x \in V$, y que A es un operador lineal sobre R^k (es decir, una aplicación lineal de R^k en R^k, como en la definición 2.1.1). Si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que se verifica la desigualdad

$$\|T(x+h) - T(x) - Ah\| \leqslant \epsilon \|h\| \qquad [8.72]$$

para todo $h \in R^k$ con $\|h\| < \delta$, decimos que T es *diferenciable* en x, y definimos

$$T'(x) = A. \qquad [8.73]$$

El operador lineal $T'(x)$ se llama la *derivada* de T en x. El término *diferencial* también se utiliza frecuentemente para $T'(x)$; entonces, más que decir que T es diferenciable en x, se dice que T *posee diferencial* en x, o que la diferencial de T existe en x.

Ni la diferenciabilidad de T ni el valor de $T'(x)$ varían cambiando la norma [8.70] por la norma [8.71] en [8.72].

Decimos que T es *diferenciable en* V si T es diferenciable en todo punto de V. En ese caso a cada $x \in V$ le corresponde un operador lineal $T'(x)$; para x fijo y h pequeño, $T(x+h) - T(x)$ se aproxima mediante $T'(x)h$, una función *lineal* de h, en el sentido de [8.72].

Como todo número real α puede interpretarse como un operador lineal sobre R^1 (aplicando t en αt), la definición anterior de $T'(x)$ coincide con la habitual para $k = 1$.

A cada operador lineal A sobre R^k le asociamos el número

$$\Delta(A) = m(A(Q)) \qquad [8.74]$$

donde m es la medida de Lebesgue sobre R^k y Q es el cubo unidad: $x \in Q$ si, y sólo si, $0 \leqslant \xi_i < 1$ para $1 \leqslant i \leqslant k$.

8.4.2. Observación. Si A es un operador lineal sobre R^k, entonces

$$A'(x) = A \qquad (x \in R^k),$$

y si definimos

$$\mu(E) = m(A(E)) \qquad [8.75]$$

para todos los conjuntos de Borel E, entonces μ es invariante por traslaciones, puesto que

$$\mu(E+x) = m(A(E+x)) = m(A(E) + Ax) = m(A(E)) = \mu(E).$$

Se deduce del teorema 2.5.2, *d)* que

$$\mu(E) = \Delta(A) m(E) \qquad [8.76]$$

y, por tanto, que

$$(D\mu)(x) = \Delta(A'(x)) \qquad (x \in R^k). \qquad [8.77]$$

Como toda transformación diferenciable puede aproximarse localmente por una constante más una transformación lineal, podemos conjeturar que [8.77] se

extiende a las transformaciones diferenciables, bajo condiciones convenientes. Este es el caso en realidad. Enunciamos el resultado en primer lugar sni ninguna referencia a cualquier medida inducida μ.

8.4.3. Teorema. *Supongamos que T es una aplicación abierta continua de un conjunto abierto $V \subset R^k$ en R^k, y supongamos que T es diferenciable en algún punto $x \in V$. Entonces a todo $\epsilon > 0$ le corresponde un $\delta > 0$ tal que*

$$\left| \frac{m(T(C))}{m(C)} - \Delta(T'(x)) \right| < \epsilon \qquad [8.78]$$

para todo cubo abierto C, con aristas paralelas a los ejes y de longitudes menores que δ, que contenga a x.

DEMOSTRACIÓN. Suponemos, sin pérdida de generalidad, que $x=0$ y $T(x)=0$. Pongamos $A=T'(0)$.

Se utilizará el siguiente hecho elemental sobre operadores lineales en espacios vectoriales de dimensión finita (para su demostración, consúltese cualquier libro de álgebra lineal): *Un operador lineal A sobre R^k es uno a uno si, y sólo si, el recorrido de A es todo R^k.* En este caso, el inverso A^{-1} de A es un operador lineal sobre R^k, y A se dice *no singular* o *invertible.*

La demostración se divide, por conveniencia, en dos casos.

CASO 1. *A es no singular.* Consideremos la aplicación S definida mediante

$$S(x) = A^{-1}T(x) \qquad (x \in V). \qquad [8.79]$$

Es claro que S es continua y abierta y que $S'(0) = A^{-1}T'(0) = I$, el operador identidad. Demostraremos que entonces

$$\left| \frac{m(S(C))}{m(C)} - 1 \right| < \epsilon \qquad [8.80]$$

para todo C suficientemente pequeño que contenga al 0.

Como $T(x) = AS(x)$, tenemos

$$m(T(C)) = m(A(S(C))) = \Delta(A)m(S(C)), \qquad [8.81]$$

por [8.76]. En consecuencia [8.80] proporcionará el resultado buscado.

Fijemos $\eta > 0$ de modo que $\eta < \frac{1}{4}$ y

$$1 - \epsilon < (1-2\eta)^k < (1+2\eta)^k < 1 + \epsilon.$$

Como $S(0)=0$ y $S'(0)=I$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\|S(x) - x\| \leqslant \eta \|x\| \qquad \text{si} \qquad \|x\| < \delta. \qquad [8.83]$$

Sea C un cubo abierto que contiene a 0 y cuyas aristas son paralelas a los ejes con longitudes $\lambda < \delta$. Sean C_1 y C_2 cubos abiertos concéntricos con C cuyas aristas tienen longitudes

$$\lambda_1 = (1-2\eta)\lambda, \qquad \lambda_2 = (1+2\eta)\lambda. \qquad [8.84]$$

Nótese que [8.83] implica

$$\|S(x)-x\| < \eta\lambda \qquad (x \in \bar{C}), \tag{8.85}$$

donde $\bar{C}$ es la adherencia de C.

Si $x \in C$, [8.85] muestra que $S(x) \in C_2$. Entonces $S(C) \subset C_2$.

Nuestro próximo objetivo es demostrar que $C_1 \subset S(C)$. Pongamos

$$E_1 = C_1 \cap S(C), \qquad E_2 = C_1 - S(C). \tag{8.86}$$

Por [8.85], S no aplica ningún punto frontera de C en C_1. En consecuencia, podríamos cambiar C por $\bar{C}$ en [8.86] sin afectar a las definiciones de E_1 y E_2. Como C_1 es abierto y $S(\bar{C})$ compacto, vemos que E_2 es abierto. Puesto que $\eta < \frac{1}{4}$, [8.85] muestra que S aplica el centro de C en C_1, de modo que E_1 no es vacío. Por último, S se supone que es una aplicación abierta, así que $S(C)$ es abierto, y en consecuencia E_1 es abierto. Por tanto, C_1 es la unión de dos conjuntos abiertos disjuntos E_1 y E_2, y $E_1 \neq \emptyset$. Pero C_1 es un conjunto conexo (todo conjunto convexo en R^k es conexo) y, entonces, no es la unión de dos conjuntos abiertos no vacíos disjuntos. Concluimos que $E_2 = \emptyset$, por lo que $E_1 = C_1$, y esto proporciona que $C_1 \subset S(C)$.

Hemos demostrado, pues, que $C_1 \subset S(C) \subset C_2$. En consecuencia:

$$(1-2\eta)^k \leqslant \frac{m(S(C))}{m(C)} \leqslant (1+2\eta)^k, \tag{8.87}$$

y [8.80] se deduce de [8.82].

Esto completa la demostración en el caso 1.

Caso 2. *A es singular.* En este caso, A aplica R^k en un subespacio de dimensión menor, es decir, en un conjunto de medida 0. En particular,

$$\Delta(A) = m(A(Q)) = 0. \tag{8.88}$$

Si $\epsilon > 0$ es dado, existe un $\eta > 0$ tal que $m(E_\eta) < \epsilon$ si E_η es el conjunto de todos los puntos cuya distancia a $A(Q)$ es menor que η. Como $A = T'(0)$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$\|T(x) - Ax\| \leqslant \eta\|x\| \qquad \text{si } \|x\| < \delta. \tag{8.89}$$

Sea C un cubo abierto como en el caso 1, con arista de longitud $\lambda < \delta$. Entonces $\|T(x) - Ax\| < \eta\lambda$ para todo $x \in C$, lo que significa que $T(C)$ está en el conjunto E que consta de aquellos puntos cuya distancia a $A(C)$ es menor que $\eta\lambda$. Nuestra elección de η muestra que $m(E) < \epsilon\lambda^k$. En consecuencia

$$\frac{m(T(C))}{m(C)} \leqslant \frac{m(E)}{m(C)} = \frac{m(E)}{\lambda^k} < \epsilon \tag{8.90}$$

si $\lambda < \delta$; y como $\Delta(A) = 0$, hemos demostrado que [8.78] se verifica también en el caso 2, lo que completa la demostración. ////

8.4.4. Observaciones.

a) El teorema precedente es cierto, pero más difícil de demostrar si la primera «abierta» se elimina de las hipótesis. Hemos utilizado el que T sea

abierta sólo para demostrar lo siguiente: Si C y C_1 son cubos concéntricos, C_1 dentro de C, si la distancia entre caras correspondientes de C y C_1 es ϵ, y si T no traslada ningún punto de C en más de ϵ, entonces $T(C) \supset C_1$. Esto es cierto para T continuas, pero la demostración depende de un conocimiento más profundo de la topología de R^k del que hemos supuesto.

He aquí una forma diferente de enunciar la proposición que se necesita, seguida de un esbozo de su demostración.

Supongamos que $C = \{x : \|x\| < 1\}$, $\|x_0\| < 1 - \epsilon$, *que* $f : \bar{C} \to R^k$ *es continua, y que* $\|f(x) - x\| < \epsilon$ *si* $\|x\| = 1$. *Entonces* $x_0 \in f(C)$.

Para demostrar esto, supongamos que $x_0 \notin f(C)$. Definamos $u(x) = x/\|x\|$ si $x \neq 0$. Definamos F sobre $\bar{C}$ mediante

$$F(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{si } \|x\| < \frac{1}{2} \\ (2\|x\| - 1)u(x) + 2(1 - \|x\|)f(u(x)) & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant \|x\| \leqslant 1. \end{cases}$$

Entonces F es continua. Si $\frac{1}{2} \leqslant \|x\| \leqslant 1$, $F(x)$ está en el segmento entre $u(x)$ y $f(u(x))$, y, por tanto, $\|F(x)\| > 1 - \epsilon$. Se deduce que $x_0 \notin F(\bar{C})$. Además, $F(x) = x$ si $\|x\| = 1$.

Sea h un homeomorfismo de R^k tal que $h(x) = x$ si $\|x\| = 1$, y $h(x_0) = 0$. Definamos

$$g(x) = -u(h(F(x)) \qquad (x \in \bar{C}).$$

Como $x_0 \notin F(\bar{C})$, g es una aplicación continua de $\bar{C}$ en su frontera. Si $\|x\| = 1$, entonces $g(x) = -x$. Por tanto, $g(x) \neq x$, para todo $x \in \bar{C}$. Esto contradice el teorema de punto fijo de Brouwer.

b) Debe también hacerse notar que si suponemos que T es continuamente diferenciable, es decir, si suponemos que $x \to T'(x)$ es una aplicación continua de V en el espacio de todos los operadores lineales sobre R^k, entonces el teorema de la función inversa ([26], teorema 9.17), garantiza que T es abierta con tal que $T'(x)$ sea no singular. Por tanto, «abierta» puede eliminarse de las hipótesis si suponemos que T' es continua.

En la aplicación que sigue se supone la *existencia* de $T'(x)$, pero no se impone ninguna hipótesis de continuidad sobre T'. Las hipótesis topológicas impuestas a T burlan las dificultades de medibilidad.

8.4.5. Teorema. *Supongamos que T es una aplicación diferenciable de un conjunto abierto $V \subset R^k$ sobre un conjunto abierto acotado $W \subset R^k$. Supongamos también que T es uno a uno y que la inversa de T es continua. Entonces*

a) *$T(E)$ es un conjunto de Borel para todo conjunto de Borel $E \subset V$.*
b) *Si E es Lebesgue medible, también lo es $T(E)$.*
c) *Si $\mu(E) = m(T(E))$, entonces μ es una medida de Borel positiva acotada sobre V, y $\mu \ll m$.*
d) *Para todo conjunto Lebesgue medible $E \subset V$,*

$$m(T(E)) = \int_E \Delta(T'(x))\, dx.$$

e) *Más general, si* $f \in L^1(W)$, *tenemos*

$$\int_W f(y)\,dy = \int_V f(T(x))\Delta(T'(x))\,dx.$$

DEMOSTRACIÓN. Como la inversa de T es continua, $T(E)$ es abierto si E es abierto; la colección de todos los $E \subset V$ tales que $T(E)$ es un conjunto de Borel es una σ-álgebra en V; esto implica *a)*.

Si μ se define como en *c)*, la aditividad numerable de μ se deduce de la de m, puesto que T es uno a uno. Como $m(W) < \infty$, μ es acotada. Por el teorema 8.4.3, $(\mathfrak{D}^Q\mu)(x) < \infty$ para todo x. El corolario del teorema 8.1.11 muestra, por tanto, que $\mu \ll m$. Esto demuestra *c)*.

Si combinamos los teoremas 8.4.3 y 8.1.6, vemos que $(D\mu)(x) = \Delta(T'(x))$ en c.t.p. $[m]$, y obtenemos la ecuación de *d)* para todos los conjuntos de Borel E. Pero si E es un conjunto de Borel y $m(E) = 0$, entonces también $m(T(E)) = 0$; se obtiene que $T(A)$ es Lebesgue medible para todos los conjuntos Lebesgue medibles $A \subset V$ con $m(A) = 0$ y que $m(T(A)) = 0$ en este caso. Esto completa la demostración de *d)* y también establece *b)*.

Queda por demostrar *e)*. Si A es un conjunto de Borel en W y $E = T^{-1}(A)$, entonces E es un conjunto de Borel, $\chi_E(x) = \chi_A(T(x))$, y, por tanto, *d)* implica que

$$\int_W \chi_A(y)\,dy = m(A) = m(T(E)) = \int_V \chi_A(T(x))\Delta(T'(x))\,dx.$$

Entonces *e)* se verifica si $f = \chi_A$, y, por tanto, si f es cualquier función de Borel simple, de donde se deduce el caso general. ////

8.4.6. Jacobianos. La fórmula de cambio de variables 8.4.5, *e)* se enuncia habitualmente en la forma

$$\int_{T(V)} f(y)\,dy = \int_V f(T(x))|J_T(x)|\,dx \qquad [8.91]$$

donde $J_T(x)$ es el *Jacobiano* de T en x. Por definición, éste es el determinante del operador lineal $T'(x)$. Se establecerá la equivalencia de las dos fórmulas si demostramos que

$$\Delta(T'(x)) = |J_T(x)|, \qquad [8.92]$$

lo que es claramente una consecuencia del resultado siguiente.

8.4.7. Teorema. *Si A es un operador lineal sobre R^k y si $\Delta(A)$ es el factor de escala asociado a A, de modo que*

$$m(A(E)) = \Delta(A)m(E) \qquad [8.93]$$

para todo conjunto medible E, entonces

$$\Delta(A) = |\det A|. \qquad [8.94]$$

Escogemos el formular y demostrar los teoremas 8.4.3 y 8.4.7 en términos de la cantidad geométricamente definida $\Delta(A)$ para poner de manifiesto los as-

pectos geométricos y de teoría de la medida de estos teoremas. El que $\Delta(A)$ sea también el valor absoluto del determinante de (una matriz asociada con) A es información adicional, de naturaleza algebraica, que es obviamente importante por razones de cálculo. Sin embargo, una introducción más temprana de este determinante no habría simplificado nuestro trabajo.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{e_1, \ldots, e_k\}$ la base canónica de R^k: la coordenada i de e_j es 1 si $i=j$, 0 si $i \neq j$. Si A es un operador lineal sobre R^k y

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ij} e_i \quad (1 \leqslant j \leqslant k), \tag{8.95}$$

entonces $\det A$ es, por definición, el determinante de la matriz $[A]$ que tiene α_{ij} en la fila i y la columna j.

Si $A = A_1 A_2$, [8.93] implica que $\Delta(A) = \Delta(A_1)\Delta(A_2)$, y el teorema de multiplicación para determinantes muestra, por tanto, que si se verifica [8.94] para A_1 y A_2, también se verifica para A. Como todo operador lineal A sobre R^k es un producto de un número finito de operadores de los siguientes tres tipos, basta establecer [8.94] para cada uno de ellos:

I) $\{Ae_1, \ldots, Ae_k\}$ es una permutación de $\{e_1, \ldots, e_k\}$.
II) $Ae_1 = \alpha e_1$, $Ae_i = e_i$ para $i = 2, \ldots, k$.
III) $Ae_1 = e_1 + e_2$, $Ae_i = e_i$ para $i = 2, \ldots, k$.

Si A es del tipo I), entonces $[A]$ tiene exactamente un 1 en cada fila y en cada columna y 0 en el resto. Por tanto, $\det A = \pm 1$. Si Q es el cubo unidad, entonces $A(Q) = Q$; así, $\Delta(A) = 1 = |\det A|$.

Si A es del tipo II), entonces claramente $\Delta(A) = |\alpha| = |\det A|$.

Si A es del tipo III), entonces $\det A = 1$, y $A(Q)$ es el conjunto de todos los puntos $\Sigma \xi_i e_i$ cuyas coordenadas satisfacen

$$\xi_1 \leqslant \xi_2 < \xi_1 + 1, \quad 0 \leqslant \xi_i < 1 \quad \text{si } i \neq 2. \tag{8.96}$$

Si S_2 es el conjunto de aquellos puntos de $A(Q)$ que tienen $\xi_2 < 1$ y si S_2 es el resto de $A(Q)$, entonces

$$S_1 \cup (S_2 - e_2) = Q, \tag{8.97}$$

donde $S_2 - e_2$ es un trasladado de S. De este modo:

$$\Delta(A) = m(S_1 \cup S_2) = m(S_1) + m(S_2 - e_2) = m(Q) = 1.$$

Esto completa la demostración. ////

EJERCICIOS

1. Supóngase que $\{\mu_n\}$ es una sucesión de medidas de Borel positivas sobre R^k y

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(E).$$

Supóngase que $\mu(R^k) < \infty$. Demuéstrese que μ es una medida de Borel. ¿Cuál es la relación entre las descomposiciones de Lebesgue de las μ_n y de μ? Demuéstrese que

$$(D\mu)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (D\mu_n)(x) \quad \text{en c.t.p.}$$

2. Supóngase que cada f_n es una función positiva no decreciente sobre R^1, y que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) < \infty$$

para todo x. Demuéstrese que

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \quad \text{en c.t.p.}$$

3. Sea J un intervalo compacto en la recta $y=x$ en R^2, sea m_1 la medida de Lebesgue unidimensional sobre J, y defínase $\mu(E) = m_1(E \cap J)$ para todo conjunto de Borel $E \subset R^2$. Demuéstrese que $(\mathfrak{D}_Q\mu)(x) = 0$ para todo $x \in R^2$, aunque $\mu \perp m$. (Compárese con el teorema 8.1.10.)

4. Constrúyase una función monótona continua f sobre R^1 de modo que f no sea constante en ningún segmento aunque $f'(x) = 0$ en c.t.p.

5. Si f es como en el lema del teorema 8.3.5, ¿puede existir algún conjunto no numerable E tal que f no sea diferenciable en ningún punto de E?

6. Supóngase que $\{c_i\}$ es una sucesión de números positivos tal que $\Sigma|c_i| < \infty$. Demuéstrese que existen segmentos $J_i = (x_i - c_i, x_i + c_i)$ tales que $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, que $\{x_i\}$ es denso en R^1, y que todo $x \in R^1$ está en infinitos J_i. Póngase $f(x_i) = c_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, $f(x) = 0$ para el resto de los x. Demuéstrese que f no es diferenciable en ningún punto.

7. Supóngase que E es un conjunto compacto en R^1 (o R^k) sin puntos aislados (un conjunto *perfecto*). Demuéstrese que E es el soporte (véase Cap. 2, ejercicio 11, para la definición) de una medida de Borel positiva *continua* μ. Si $m(E) = 0$, se obtiene ejemplos de medidas singulares.

8. Supóngase $E \subset [a, b]$, $m(E) = 0$. Constrúyase una función monótona absolutamente continua f en $[a, b]$ tal que $f'(x) = +\infty$ para todo $x \in E$.

   Sugerencia: $E \subset \cap V_n$, $m(V_n) < 2^{-n}$, V_n abierto. Considérese la suma de las χ_{V_n}.

9. Demuéstrese que el producto de dos funciones absolutamente continuas en $[a, b]$ es absolutamente continua. Utilícese este hecho para obtener un teorema sobre integración por partes.

10. Si f es una función real en $[0, 1]$ y

$$\gamma(t) = t + if(t),$$

la longitud del gráfico de f es, por definición, la variación total de γ en $[0, 1]$. Demuéstrese que esta longitud es finita si, y sólo si, $f \in BV$. Supóngase que $f(0) = 0$, que f es continua y no decreciente, y que f_s es la parte singular de f (véase el teorema 8.3.4). Demuéstrese que la longitud del gráfico de f es

$$f_s(1) + \int_0^1 \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt.$$

¿Cómo se modifica esta fórmula si $f \in BV$ pero f no es necesariamente monótona? ¿Cuál es la longitud del gráfico de la función construida en el ejemplo 8.3.6, *b)*?

11. Si E es un conjunto Lebesgue medible en R^1, los límites superior e inferior de los cocientes

$$\frac{m(E \cap (x-\delta, x+\delta))}{2\delta}$$

se llaman las densidades superior e inferior de E en x, $\bar{D}_E(x)$ y $\underline{D}_E(x)$. Si son iguales, su valor común $D_E(x)$ es la *densidad* (a veces llamada la *densidad métrica)* de E en x. Si $D_E(x)=1$, x es un *punto de densidad* de E.

Demuéstrese que $D_E(x)=1$ en casi todo $x \in E$ y que $D_E(x)=0$ en casi todo $x \notin E$.

Constrúyase un conjunto E tal que $\underline{D}_E(x) \neq \bar{D}_E(x)$. ¿Puede ocurrir que sea $\underline{D}_E(x)=0$ y $\bar{D}_E(x)=1$?

12. Si $A \subset R^1$ y $B \subset R^1$, sea $A+B=\{a+b : a \in A, b \in B\}$. Supóngase que $m(A) > 0$ y que $m(B) > 0$, y demuéstrese que $A+B$ contiene un segmento.

Sugerencia: Utilícese o la existencia de puntos de densidad en A y B, o supóngase que $m(A) < \infty$, $m(B) < \infty$, y pruébese que la convolución de χ_A y χ_B es una función continua cuya integral sobre R^1 no es 0.

Sea C el conjunto de «tercios intermedios» de Cantor. Pruébese que $C+C$ es un intervalo, si bien $m(C)=0$.

Extiéndanse estos resultados a conjuntos de R^k.

13. Demuéstrese que existe un conjunto cerrado $E \subset R^2$, con $m_2(E) > 0$ que no contenga ningún rectángulo medible de medida positiva (véase la definición 7.1.1).

Sugerencia: Tómese $K \subset R^1$, compacto, totalmente inconexo, con $m_1(K) > 0$. Sea $E=\{(x, y) : x+y \in K\}$. Si $A \subset R^1$, $B \subset R^1$, $A \times B \subset E$, entonces $A+B \subset K$. Utilícese el ejercicio 12.

14. Supóngase que G es un subgrupo de R^1 (respecto de la adición), $G \neq R^1$, y tal que G es Lesbesgue medible. Demuéstrese que entonces $m(G)=0$ (compárese con el ejercicio 12).

15. Demuéstrese que existe a lo sumo un operador A que satisface los requisitos de $T'(x)$ en la definición 8.4.1.

16. Demuéstrese que la medida de Lebesgue sobre R^k es invariante por rotaciones.

17. Constrúyase una función monótona sobre R^1 cuya derivada exista en todo punto pero que no sea continua en R^1.

18. Para $f \in L^\infty(R^1)$, defínase $f_t(x)=f(x-t)$, y supóngase que

$$\lim_{t \to 0} \|f_t - f\|_\infty = 0.$$

La norma es la del supremo *esencial*. Demuéstrese que en estas condiciones existe una función uniformemente continua g sobre R^1 tal que $g(x)=f(x)$ en c.t.p.

Sugerencia: Hágase $h_n(t)=n$ si $|t| < 1/2n$, $h_n(t)=0$ para los demás valores de t, y sea g_n la convolución $f * h_n$. Demuéstrese que $g_n(x) \to f(x)$ en c.t.p. y que

$$|g_n(x+t) - g_n(x)| \leqslant \|f_t - f\|_\infty.$$

Explótese la equicontinuidad de la sucesión $\{g_n\}$ [26] (teorema 7.23).

19. Se llama a t un *período* de la función f sobre R^1 si $f(x+t)=f(x)$ para todo $x \in R^1$. Se supone que f es una función real Lebesgue medible con períodos s y t tales

que s/t es irracional. Demuéstrese que existe una constante λ tal que $f(x)=\lambda$ en c.t.p., pero que f no es necesariamente constante.

Sugerencia: Los períodos de f constituyen un conjunto denso. Considérense los puntos de densidad de los conjuntos $E_\alpha=\{x:f(x)>\alpha\}$, para α real.

20. Se supone que f es una función real definida sobre el rectángulo determinado por las desigualdades $a\leqslant x\leqslant b$ y $A\leqslant y\leqslant B$. Obténganse condiciones para f (tan débiles como se pueda) bajo las cuales tenga sentido y sea correcto el enunciado siguiente (D_1f denota la derivada parcial de f respecto de la primera variable, x): Si

$$g(x)=\int_A^B f(x, y)\,dy,$$

entonces

$$g(x)=\int_A^B dy[f(a, y)+\int_a^x (D_1f)(t, y)\,dt]$$

$$=\int_a^x dt\int_A^B (D_1f)(t, y)\,dy+\int_A^B f(a, y)\,dy,$$

así que

$$g'(x)=\int_A^B (D_1f)(x, y)\,dy.$$

Véase también bajo qué condiciones se puede obtener la última fórmula por consideración directa de los cocientes $[g(t)-g(x)]/(t-x)$.

21. Se supone que f es una función compleja continua sobre $[a, b]$ con variación total V. Demuéstrese que a cada $W<V$ le corresponde un $\delta>0$ con la propiedad siguiente: Si $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ y si $|x_i-x_{i-1}|<\delta$ para $i=1, \ldots, n$, entonces

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i)-f(x_{i-1})|>W.$$

22. Se supone que f es una función *real* continua sobre $[a, b]$. Para cada y real, sea $M(y)$ el número (finito o infinito) de puntos x de $[a, b]$ en los que $f(x)=y$. (M puede llamarse la *función de multiplicidad* de f.) Demuéstrese que M es una función de Borel y que $\int M(y)\,dy$ es la variación total de f en $[a, b]$.

Sugerencia: El resultado es claro para funciones cuyo gráfico es una unión finita de intervalos de recta. Aproxímese f mediante una sucesión convenientemente elegida de tales funciones. (Sus funciones de multiplicidad deben crecer hacia la de f.) Utilícese el ejercicio 21.

23. ¿Es una función de Borel toda función compleja continua a la izquierda f sobre R^1? Si V es abierto, ¿qué se puede decir sobre $f^{-1}(V)$?

24. Demuéstrese (con ayuda del teorema de maximalidad de Hausdorff) que existen funciones reales *discontinuas* f sobre R^1 tales que

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \qquad [24.1]$$

para todo x e $y\in R^1$.

Demuéstrese que si se verifica [24.1] y f es Lebesgue medible, f es continua.

Demuéstrese que si se verifica [24.1] y el gráfico de f no es denso en el plano, entonces f es continua.

Obténganse todas las funciones continuas que satisfagan [24.1]. Compárese este ejercicio con el 17 del capítulo 9.

TRANSFORMADAS DE FOURIER

9.1. PROPIEDADES FORMALES

9.1.1. Definiciones. En este capítulo nos apartaremos de la notación previa y utilizaremos la letra m no para la medida de Lebesgue en R^1, sino para la medida de Lebesgue dividida por $\sqrt{2\pi}$. Este convenio simplifica la apariencia de resultados tales como el teorema de inversión y el teorema de Plancherel. De acuerdo con esto, utilizaremos la notación

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dm(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx, \qquad [9.1]$$

donde dx se refiere a la medida de Lebesgue ordinaria, y definimos

$$\|f\|_p = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p\, dm(x) \right\}^{1/p} \qquad (1 \leqslant p < \infty), \qquad [9.2]$$

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y)\, dm(y) \qquad (x \in R^1), \qquad [9.3]$$

y

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixt}\, dm(x) \qquad (t \in R^1). \qquad [9.4]$$

En todo este capítulo, escribiremos L^p en lugar de $L^p(R^1)$, y C_0 denotará el espacio de todas las funciones continuas sobre R^1 que se anulan en el infinito.

Si $f \in L^1$, la integral [9.4] está bien definida para todo t real. La función $\hat{f}$ se llama la *transformada de Fourier* de f. Nótese que el término «transformada de Fourier» también se utiliza para la aplicación que lleva f a $\hat{f}$.

Las propiedades formales que se enumeran en el teorema 9.1.2 dependen íntimamente de la invariancia por traslaciones de m y del hecho de que para cada α real, la aplicación $x \to e^{i\alpha x}$ es un *carácter* del grupo aditivo R^1. Por definición, una función φ es un carácter de R^1 si $|\varphi(t)| = 1$ y si

$$\varphi(s+t) = \varphi(s)\varphi(t) \qquad [9.5]$$

para todo real s y t. En otras palabras, φ es un homomorfismo del grupo aditivo R^1 en el grupo multiplicativo de los números complejos de valor absoluto igual a 1. Veremos más adelante (en la demostración del teorema 9.4.6) que todo carácter continuo de R^1 viene dado mediante una exponencial.

9.1.2. Teorema. *Supongamos que $f \in L^1$, y que α y λ son números reales.*

a) *Si* $g(x)=f(x)e^{i\alpha x}$, *entonces* $\hat{g}(t)=\hat{f}(t-\alpha)$.
b) *Si* $g(x)=f(x-\alpha)$, *entonces* $\hat{g}(t)=\hat{f}(t)e^{+i\alpha t}$.
c) *Si* $g \in L^1$ *y* $h=f*g$, *entonces* $\hat{h}(t)=\hat{f}(t)\hat{g}(t)$.

Por tanto, la transformada de Fourier convierte la multiplicación por un carácter de traslación, y viceversa, y convierte convoluciones en productos puntuales.

d) *Si* $g(x)=\overline{f(-x)}$, *entonces* $\hat{g}(t)=\overline{\hat{f}(t)}$.
e) *Si* $g(x)=f(x/\lambda)$ *y* $\lambda > 0$, *entonces* $\hat{g}(t)=\lambda\hat{f}(\lambda t)$.
f) *Si* $g(x)=-ixf(x)$ *y* $g \in L^1$, *entonces* $\hat{f}$ *es diferenciable y* $\hat{f}'(t)=\hat{g}(t)$.

DEMOSTRACIÓN. *a), b), d)* y *e)* se demuestran por sustitución directa de la fórmula [9.4]. La demostración de *c)* es una aplicación del teorema de Fubini (véase el teorema 7.5.2 para la demostración de medibilidad requerida):

$$\begin{aligned}\hat{h}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\,dm(x)\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dm(y)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-ity}\,dm(y)\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)e^{-it(x-y)}\,dm(x)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-ity}\,dm(y)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-itx}\,dm(x)\\ &= \hat{g}(t)\hat{f}(t).\end{aligned}$$

Nótese cómo se ha utilizado la invariancia por traslaciones de m.

Para demostrar *f)*, nótese que

$$\frac{\hat{f}(s)-\hat{f}(t)}{s-t} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixt}\varphi(x, s-t)\,dm(x) \qquad (s \neq t), \tag{9.6}$$

donde $\varphi(x,u)=(e^{-ixu}-1)/u$. Como $|\varphi(x,u)| \leqslant |x|$ para todo $u \neq 0$ real y como $\varphi(x,u) \to -ix$ cuando $u \to 0$, el teorema de convergencia dominada puede aplicarse a [9.6], si s tiende a t, y concluimos que

$$\hat{f}'(t) = -i\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{-ixt}\,dm(x). \tag{9.7}$$ ////

9.1.3. Observaciones

a) En la demostración precedente, el acudir al teorema de la convergencia dominada puede no parecer legítimo, ya que este teorema se refiere sólo a sucesiones *numerables* de funciones. Sin embargo, nos permite concluir que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\hat{f}(s_n)-\hat{f}(t)}{s_n-t} = -i\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{-ixt}\,dm(t)$$

para toda sucesión $\{s_n\}$ que converja a t, y esto es lo mismo que

$$\lim_{s \to t} \frac{\hat{f}(s) - \hat{f}(t)}{s - t} = -i \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) e^{-ixt}\, dm(t)$$

Encontraremos más veces situaciones análogas y aplicaremos en ellas los teoremas de convergencia sin más comentarios.

b) El teorema 9.1.2, *b)* muestra que la transformada de Fourier de

$$[f(x+\alpha) - f(x)]/\alpha$$

es

$$\hat{f}(t) \frac{e^{i\alpha t} - 1}{\alpha}.$$

Esto sugiere que debe ser cierto un análogo del teorema 9.1.2, *f)* bajo ciertas condiciones, como que la transformada de Fourier de f' sea $it\hat{f}(t)$. Si $f \in L^1$, $f' \in L^1$, y si f es la integral indefinida de f', el resultado se establece fácil mente mediante una integración por partes. Dejamos este resultado, y algún otro relacionado, como ejercicio. El hecho de que la transformada de Fourier convierta la diferenciación en multiplicación por ti hace de la transformada de Fourier un instrumento útil en el estudio de las ecuaciones diferenciales.

9.2. EL TEOREMA DE INVERSION

9.2.1. Ejemplo. Acabamos de ver que ciertas operaciones con funciones se corresponden agradablemente con operaciones con sus transformadas de Fourier. La utilidad e interés de esta correspondencia aumentará, por supuesto, si existe una forma de volver de las transformadas a las funciones, es decir, si existe una fórmula de inversión.

Veamos cómo podría ser una tal fórmula, por analogía con las series de Fourier. Si

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-inx}\, dx \qquad (n \in Z), \tag{9.8}$$

entonces la fórmula de inversión es

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}. \tag{9.9}$$

Sabemos que se verifica [9.9], en el sentido de la convergencia en L^2, si $f \in L^2(T)$. También sabemos que [9.9] no se verifica necesariamente en el sentido de la convergencia puntual, aun si f es continua. Supongamos ahora que $f \in L^1(T)$, que $\{c_n\}$ vienen dadas mediante [9.8] y que

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty. \tag{9.10}$$

Pongamos

$$g(x)=\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}. \qquad [9.11]$$

Por [9.10], la serie en [9.11] converge uniformemente (por tanto, g es continua), y los coeficientes de Fourier de g se calculan fácilmente:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-ikx}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}\right\}e^{-ikx}\,dx=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)x}\,dx=c_k. \qquad [9.12]$$

Así, f y g tienen los mismos coeficientes de Fourier. Esto implica que $f=g$ en c.t.p., de modo que la serie de Fourier de f converge a $f(x)$ en c.t.p.

Las hipótesis análogas en el contexto de la transformada de Fourier son que $f \in L^1$ y $\hat{f} \in L^1$, y podríamos esperar entonces que fuera válida una fórmula como

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)e^{itx}\,dm(t) \qquad [9.13]$$

Ciertamente, si $\hat{f} \in L^1$, el segundo miembro de [9.13] está bien definido; llamémosle $g(x)$; pero si queremos razonar como en [9.12], llegamos a la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-s)x}\,dx, \qquad [9.14]$$

que no tiene sentido en esa forma. Por tanto, aún con la fuerte hipótesis de que $\hat{f} \in L^1$, una demostración de [9.13] (que *es* cierto) tiene que seguir otro camino.

Debe mencionarse que [9.13] puede verificarse aún si $\hat{f} \notin L^1$, si la integral sobre $(-\infty, \infty)$ se interpreta como el límite, cuando $A \to \infty$, de integrales sobre $(-A, A)$. (Un análogo: una serie puede converger sin converger absolutamente.) No continuaremos esta discusión.

9.2.2. Teorema. *Para cualquier función f sobre R^1 y todo $y \in R^1$, sea f la trasladada de f definida mediante*

$$f_y(x)=f(x-y) \qquad (x \in R^1). \qquad [9.15]$$

Si $1 \leqslant p < \infty$ y si $f \in L^p$, la aplicación

$$y \to f_y \qquad [9.16]$$

es una aplicación uniformemente continua de R^1 en $L^p(R^1)$.

DEMOSTRACIÓN. Fijemos $\epsilon > 0$. Como $f \in L^p$, existe una función continua g cuyo soporte está en un intervalo acotado $[-A, A]$, tal que

$$\|f-g\|_p < \epsilon$$

(teorema 3.3.1). La continuidad uniforme de g muestra que existe un $\delta \in (0, A)$ tal que $|s-t| < \delta$ implica

$$|g(s)-g(t)| < (3A)^{-1/p}\epsilon.$$

Si $|s-t| < \delta$, se deduce que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x-s)-g(x-t)|^p \, dx < (3A)^{-1}\epsilon^p(2A+\delta) < \epsilon^p,$$

por lo que $\|g_s - g_t\|_p < \epsilon$.

Nótese que las normas L^p (relativas a la medida de Lebesgue) son invariantes por traslaciones: $\|f\|_p = \|f\|_s$. Entonces

$$\begin{aligned}\|f_s - f_t\|_p &\leqslant \|f_s - g_s\|_p + \|g_s - g_t\|_p + \|g_t - f_t\|_p \\ &= \|(f-g)_s\|_p + \|g_s - g_t\|_p + \|(g-f)_t\|_p < 3\epsilon\end{aligned}$$

si $|s-t| < \delta$. Esto completa la demostración. ////

9.2.3. Teorema. *Si $f \in L^1$, entonces $\hat{f} \in C_0$ y*

$$\|\hat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1. \qquad [9.17]$$

DEMOSTRACIÓN. La desigualdad [9.17] es obvia por [9.4]. Si $t_n \to t$,

$$|\hat{f}(t_n) - \hat{f}(t)| \to \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, |e^{-it_n x} - e^{-itx}| \, dm(x). \qquad [9.18]$$

El integrando está acotado por $2|f(x)|$ y tiende a 0 para todo x, cuando $n \to \infty$. En consecuencia $\hat{f}(t_n) \to \hat{f}(t)$, por el teorema de la convergencia dominada. Entonces $\hat{f}$ es continua.

Como $e^{\pi i} = -1$, [9.4] proporciona

$$\hat{f}(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-it(x+\pi/t)} \, dm(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x-\pi/t) e^{-itx} \, dm(x). \qquad [9.19]$$

Por tanto:

$$2\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ f(x) - f\left(x - \frac{\pi}{t}\right) \right\} e^{-itx} \, dm(x), \qquad [9.20]$$

así que

$$2|\hat{f}(t)| \leqslant \|f - f_{\pi/t}\|_1, \qquad [9.21]$$

que tiende a cero cuando $t \to \pm\infty$, por el teorema 9.2.2. ////

9.2.4. Un par de funciones auxiliares. En la demostración del teorema de inversión será conveniente conocer alguna función positiva H que tenga una transformada de Fourier positiva cuya integral se calcule fácilmente. Entre las muchas posibilidades de elección tomaremos una que es interesante en conexión con las funciones armónicas en un semiplano (véase el ejercicio 21 del capítulo 11).

Pongamos

$$H(t) = e^{-|t|} \tag{9.22}$$

y definamos

$$h_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda t) e^{itx}\, dm(t) \qquad (\lambda > 0). \tag{9.23}$$

un cálculo simple proporciona

$$h_\lambda(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2} \tag{9.24}$$

y, en consecuencia,

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_\lambda(x)\, dm(x) = 1. \tag{9.25}$$

Notemos también que $0 < H(t) \leqslant 1$ y que $H(\lambda t) \to 1$ cuando $\lambda \to 0$.

9.2.5. Proposición. *Si $f \in L^1$, entonces*

$$(f * h_\lambda)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda t) \hat{f}(t) e^{ixt}\, dm(t).$$

DEMOSTRACIÓN. Es una simple aplicación del teorema de Fubini.

$$\begin{aligned}
(f * h_\lambda)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, dm(y) \int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda t) e^{ity}\, dm(t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda t)\, dm(t) \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) e^{ity}\, dm(y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda t)\, dm(t) \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{it(x-y)}\, dm(y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda t) \hat{f}(t) e^{itx}\, dm(t).
\end{aligned}$$

9.2.6. Teorema. *Si $g \in L^\infty$ y g es continua en un punto x, entonces*

$$\lim_{\lambda \to 0} (g * h_\lambda)(x) = g(x).$$

DEMOSTRACIÓN. Teniendo en cuenta [9.25], tenemos

$$\begin{aligned}
(g * h_\lambda)(x) - g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} [g(x-y) - g(x)] h_\lambda(y)\, dm(y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} [g(x-y) - g(x)] \lambda^{-1} h_1\left(\frac{y}{\lambda}\right) dm(y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} [g(x-\lambda s) - g(x)] h_1(s)\, dm(s).
\end{aligned}$$

El último integrando está mayorado por $2\|g\|_\infty h_1(s)$ y converge a 0 puntualmente para todo s, cuando $\lambda \to 0$. Por tanto, se obtiene [9.26] a partir del teorema de convergencia dominada. ////

9.2.7. Teorema. *Si* $1 \leqslant p < \infty$ *y* $f \in L^p$, *entonces*

$$\lim_{\lambda \to 0} \|f * h_\lambda - f\|_p = 0. \qquad [9.27]$$

Los casos $p=1$ y $p=2$ serán los interesantes para nosotros, pero no es difícil de demostrar el caso general.

DEMOSTRACIÓN. Como $h_\lambda \in L^q$, donde q es el exponente conjugado a p, $(f * h_\lambda)(x)$ está definida para todo x (de hecho, $f * h_\lambda$ es continua; véase el ejercicio 8). Debido a [9.25] tenemos

$$(f * h_\lambda)(x) - f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x-y) - f(x)] h_\lambda(y)\, dm(y) \qquad [9.28]$$

y el teorema 3.1.3 proporciona

$$|(f * h_\lambda)(x) - f(x) - f(x)|^p \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y) - f(x)|^p h_\lambda(y)\, dm(y). \qquad [9.29]$$

Integremos [9.29] con respecto a x y apliquemos el teorema de Fubini:

$$\|f * h_\lambda - f\|_p^p \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \|f_y - f\|_p^p h_\lambda(y)\, dm(y). \qquad [9.30]$$

Si $g(y) = \|f_y - f\|_p^p$, g es acotada y continua, por el teorema 9.2.2, y $g(0)=0$. En consecuencia, el segundo miembro de [9.30] tiende a 0 cuando $\lambda \to 0$, por el teorema 9.2.6. ////

9.2.8. El teorema de inversión. *Si* $f \in L^1$ *y* $\hat{f} \in L^1$, *y si*

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{ixt}\, dm(t) \qquad (x \in R^1), \qquad [9.31]$$

entonces $g \in C_0$ *y* $f(x) = g(x)$ *en c.t.p.*

DEMOSTRACIÓN. De la proposición 9.2.5:

$$(f * h_\lambda)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda t) \hat{f}(t) e^{ixt}\, dm(t). \qquad [9.32]$$

Los integrandos del segundo miembro de [9.32] están acotados por $|\hat{f}(t)|$, y como $H(\lambda) \to 1$ cuando $\lambda \to 0$, el segundo miembro de [9.32] converge a $g(x)$, para todo $x \in R^1$, por el teorema de la convergencia dominada.

Si combinamos los teoremas 9.2.7 y 3.2.7, vemos que existe una sucesión $\{\lambda_n\}$ tal que $\lambda_n \to 0$ y

$$\lim_{n \to \infty} (f * h_{\lambda_n})(x) = f(x) \quad \text{en c.t.p.} \qquad [9.33]$$

En consecuencia $f(x) = g(x)$ en c.t.p. Que $g \in C_0$ se deduce del teorema 9.2.3. ////

9.2.9. El teorema de unicidad. *Si $f \in L^1$ y $\hat{f}(t)=0$ para todo $t \in R^1$, entonces $f(x)=0$ en c.t.p.*

DEMOSTRACIÓN. Como $\hat{f}=0$, tenemos $\hat{f} \in L^1$, y el resultado se deduce del teorema de inversión. ////

9.3. EL TEOREMA DE PLANCHEREL

Como la medida de Lebesgue de R^1 es infinita, L^2 no es un subconjunto de L^1, y la definición de la transformada de Fourier mediante la fórmula [9.4] no es en consecuencia directamente aplicable a toda $f \in L^2$. La definición se aplica, sin embargo, si $f \in L^1 \cap L^2$, y resulta entonces que $\hat{f} \in L^2$. ¡De hecho, $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$! Esta isometría de $L^1 \cap L^2$ en L^2 se extiende a una isometría de L^2 sobre L^2, y esta extensión define la transformada de Fourier (a veces llamada la *transformada de Plancherel)* de toda $f \in L^2$. La teoría resultante en L^2 tiene, de hecho, bastante más simetría que en el caso de L^1. En L^2, f y $\hat{f}$ desempeñan exactamente el mismo papel.

9.3.1. Teorema. *Se puede asociar a cada $f \in L^2$ una función $\hat{f} \in L^2$ tal que se verifican las propiedades siguientes:*

a) *Si $f \in L^1 \cap L^2$, entonces $\hat{f}$ es la transformada de Fourier de f definida previamente.*
b) *Para toda $f \in L^2$, $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$.*
c) *La aplicación $f \to \hat{f}$ es un isomorfismo de espacio de Hilbert de L^2 sobre L^2.*
d) *Existe la siguiente relación simétrica entre f y $\hat{f}$: Si*

$$\varphi_A(t) = \int_{-A}^{A} f(x)e^{-ixt}\, dm(x) \quad \text{y} \quad \psi_A(x) = \int_{-A}^{A} \hat{f}(t)e^{ixt}\, dm(t),$$

entonces $\|\varphi_A - \hat{f}\|_2 \to 0$ y $\|\psi_A - f\|_2 \to 0$ cuando $A \to \infty$.

Nota: Como $L^1 \cap L^2$ es denso en L^2, las propiedades *a)* y *b)* determinan la aplicación $f \to \hat{f}$ de manera única. La propiedad *d)* puede llamarse el *teorema de inversión en L^2.*

DEMOSTRACIÓN. Nuestro primer objetivo es la relación

$$\|\hat{f}\|_2 = \|f\|^2 \qquad (f \in L^1 \cap L^2). \tag{9.34}$$

Fijamos $f \in L^1 \cap L^2$, ponemos $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$, y definimos $g = f * \tilde{f}$. Entonces:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\overline{f(-y)}\, dm(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y)\overline{f(y)}\, dm(y), \tag{9.35}$$

o

$$g(x) = (f_{-x}, f), \tag{9.36}$$

donde el producto interior se toma en el espacio de Hilbert L^2 y f_{-x} denota una trasladada de f, como en el teorema 9.2.2. De ese teorema, $x \to f_{-x}$ es una

aplicación continua de R^1 en L^2, y la continuidad del producto interior implica en consecuencia que g es una función continua. La desigualdad de Schwarz muestra que

$$|g(x)| \leqslant \|f_{-x}\|_2 \|f\|_2 = \|f\|_2^2 \qquad [9.37]$$

de modo que g está acotada. Además $g \in L^1$ porque $f \in L^1$ y $\hat{f} \in L^1$.

Como $g \in L^1$, podemos aplicar la proposición 9.2.5:

$$(g * h_\lambda)(0) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda t)\hat{g}(t)\, dm(t). \qquad [9.38]$$

Puesto que g es continua y acotada, el teorema 9.2.6 expresa que

$$\lim_{\lambda \to 0} (g * h_\lambda)(0) = g(0) = \|f\|_2^2. \qquad [9.39]$$

El teorema 9.1.2, *d)* permite afirmar que $\hat{g} = |\hat{f}|^2 \geqslant 0$, y como $H(\lambda t)$ crece hacia 1 cuando $\lambda \to 0$, el teorema de convergencia monótona proporciona

$$\lim_{\lambda \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda t)\hat{g}(t)\, dm(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(t)|^2\, dm(t). \qquad [9.40]$$

Entonces [9.38], [9.39] y [9.40] muestran que $\hat{f} \in L^2$ y que se verifica [9.34]. Esto ha sido lo esencial de la demostración.

Para cualquier $A > 0$, sea f_A el producto de f y de la función característica del intervalo $[-A, A]$. Si $f \in L^2$, entonces claramente $\|f_A - f\|_2 \to 0$ cuando $A \to \infty$. Además $f_A \in L^1 \cap L^2$, y si φ_A se define como en *d)*, tenemos $\varphi_A = \hat{f}_A$. Como $\{f_A\}$ es una sucesión de Cauchy en L^2, la relación [9.39] muestra que $\{\varphi_A\}$ es una sucesión de Cauchy en L^2; y como L^2 es completo, $\{\varphi_A\}$ converge a un elemento de L^2 cuando $A \to \infty$, que llamaremos $\hat{f}$. Notemos que si $f \in L^1 \cap L^2$, entonces $\varphi_A(t)$ converge puntualmente a la transformada de Fourier de f previamente definida, y este límite puntual coincide en c.t.p. con el límite en L^2 (teorema 3.2.7).

El dominio de la aplicación $f \to \hat{f}$ se ha extendido ahora de $L^1 \cap L^2$ a L^2. Más aún, [9.39] implica que $\|\varphi_A\|_2 = \|f_A\|_2$, así que

$$\|\hat{f}\|_2 = \lim_{A \to \infty} \|\varphi_A\|_2 = \lim_{A \to \infty} \|f_A\|_2 = \|f\|_2. \qquad [9.41]$$

Hemos demostrado, pues, *a)*, *b)* y la primera mitad de *d)*.

Introduzcamos la notación provisional de Φf en lugar de $\hat{f}$. Entonces Φf es el límite en L^2 de las funciones φ_A, si $f \in L^2$, y Φ es una isometría de L^2 en L^2. Para $g \in L^2$, definamos análogamente Ψg como el límite en L^2 de las funciones

$$\int_{-A}^{A} g(t)e^{ixt}\, dm(t). \qquad [9.42]$$

Entonces Ψ es una isometría de L^2 en L^2, puesto que $(\Psi g)(x) = (\Phi g)(-x)$. Si tanto f como $\hat{f}$ están en $L^2 \cap L^2$, se deduce del teorema 9.2.8 que

$$\Psi\Phi f = f. \qquad [9.43]$$

Por la proposición 9.2.5, $f * h_\lambda$ satisface estos requisitos si $f \in L^1 \cap L^2$ y $\lambda > 0$. Por tanto,

$$\Psi\Phi(f * h_\lambda) = f * h_\lambda. \qquad [9.44]$$

Cuando $\lambda \to 0$, $\|f * h_\lambda - f\|_2 \to 0$ (teorema 9.2.7), y como $\Psi\Phi$ es una isometría, obtenemos [9.43] para toda $f \in L^1 \cap L^2$. Como $L^1 \cap L^2$ es denso en L^2, [9.43] se verifica para toda $f \in L^2$. Esto demuestra la segunda mitad de *d)*.

Pero la relación $\Psi\Phi g = g$ es también válida entonces para toda $g \in L^2$, puesto que los papeles de los operadores Φ y Ψ pueden obviamente intercambiarse. Esto dice que si $f = \Psi g$ entonces $g = \hat{f}$. La aplicación $f \to \hat{f}$ aplica, por tanto, L^2 *sobre* L^2.

Finalmente, la identidad

$$4f\bar{g} = |f+g|^2 - |f-g|^2 + i|f+ig|^2 - i|f-ig|^2 \qquad [9.45]$$

muestra que toda isometría de L^2 sobre L^2 también preserva los productos interiores. En otras palabras, se verifica la fórmula de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\, dm(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)\overline{\hat{g}(t)}\, dm(t) \qquad [9.46]$$

si $f \in L^2$ y $g \in L^2$.

Esto proporciona *c)* y completa la demostración. ////

9.3.2. Teorema. *Si $f \in L^2$ y $\hat{f} \in L^1$, entonces*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{ixt}\, dm(t) \quad \text{en c.t.p.}$$

DEMOSTRACIÓN. Esto es un corolario del teorema 9.3.1, *d)*. ////

9.3.3. Observación. Si $f \in L^1$, la fórmula [9.4] define $\hat{f}(t)$ sin ambigüedad para todo t. Si $f \in L^2$, el teorema de Plancherel define $\hat{f}$ de manera única como un elemento del espacio de Hilbert L^2, pero como función de punto, $\hat{f}(t)$ está determinada sólo en casi todo punto. Esta es una diferencia importante entre la teoría de la transformada de Fourier en L^1 y en L^2. La indeterminación de $\hat{f}(t)$ como función de punto provocará algunas dificultades en el problema que consideraremos a continuación.

9.3.4. Subespacios de L^2 invariantes por traslaciones. Un subespacio M de L^2 se dice *invariante por traslaciones* si $f \in M$ implica que $f_\alpha \in M$ para todo α real, donde $f_\alpha(x) = f(x-\alpha)$. Las traslaciones han desempeñado ya un importante papel en nuestro estudio de la trasformada de Fourier. Proponemos ahora un problema cuya solución permitirá una ilustración de cómo puede utilizarse el teorema de Plancherel (otras aplicaciones aparecerán en el capítulo 19). El problema es:

Descríbanse los subespacios cerrados de L^2 invariantes por traslaciones.

Sea M un subespacio cerrado de L^2 invariante por traslaciones, y $\hat{M}$ la imagen de M mediante la transformada de Fourier. Entonces $\hat{M}$ es cerrado (porque la trasformada de Fourier es una isometría en L^2). Si f_α es una trasladada de f, la trasformada de Fourier de f_α es $\hat{f}e_\alpha$, donde $e_\alpha(t) = e^{-i\alpha t}$; demos-

tramos esto para $f \in L^1$ en el teorema 9.1.2; el resultado se extiende a L^2, como puede verse por el teorema 9.3.1, *d). Se deduce que* $\hat{M}$ *es invariante respecto de la multiplicación por* e_α, *para todo* $\alpha \in R^1$.

Sea E un conjunto medible cualquiera en R^1. Si $\hat{M}$ es el conjunto de todas las $\varphi \in L^2$ que se anulan en c.t.p. de E, entonces $\hat{M}$ es ciertamente un subespacio de L^2, que es invariante respecto de la multiplicación por todas las e_α (notemos que $|e_\alpha| = 1$; por tanto, $\varphi e_\alpha \in L^2$ si $\varphi \in L^2$), y $\hat{M}$ es también cerrado.

DEMOSTRACIÓN. $\varphi \in \hat{M}$ si, y sólo si, φ es ortogonal a toda $\psi \in L^2$ que se anule en c.t.p. del complementario de E.

Si M es la imagen inversa de este $\hat{M}$, respecto de la trasformada de Fourier, entonces M es un espacio con las propiedades buscadas.

Se puede conjeturar ahora si cada uno de nuestros espacios M se obtiene de esta manera a partir de un conjunto $E \subset R^1$. Para demostrar esto, tenemos que probar que a todo $M \subset L^2$ cerrado e invariante por traslaciones le corresponde un conjunto $E \subset R^1$ tal que $f \in M$ si, y sólo si, $\hat{f}(t) = 0$ en c.t.p. de E. La forma obvia de construir E a partir de M es asociar a cada $f \in M$ el conjunto E_f que consta de todos los puntos en los que $\hat{f}(t) = 0$, y definir E como la intersección de estos conjuntos E_f. Pero esta aproximación obvia encuentra una seria dificultad: cada E está definido salvo conjuntos de medida 0. Si $\{A_i\}$ es una colección numerable de conjuntos, cada uno determinado salvo conjuntos de medida 0, entonces $\bigcap A_i$ está también determinada salvo conjuntos de medida 0. Pero existe una cantidad no numerable de $f \in M$, y, por tanto, perdemos todo control sobre $\bigcap E_f$.

Esta dificultad desaparece enteramente si pensamos en nuestras funciones como elementos del espacio de Hilbert L^2, y no como funciones de punto.

Demostraremos a continuación la conjetura. Sea $\hat{M}$ la imagen de un subespacio cerrado $M \subset L^2$ invariante por traslaciones, respecto a la trasformada de Fourier. Sea P la proyección ortogonal de L^2 sobre $\hat{M}$ (teorema 4.1.11): A cada $f \in L^2$ le corresponde una única $Pf \in \hat{M}$ tal que $f - Pf$ es ortogonal a $\hat{M}$. En consecuencia

$$f - Pf \perp Pg \qquad (f \text{ y } g \in L^2) \tag{9.47}$$

y como $\hat{M}$ es invariante respecto a la multiplicación por e_α, tenemos también

$$f - Pf \perp (Pg)e_\alpha \qquad (f \text{ y } g \in L^2,\ \alpha \in R^1). \tag{9.48}$$

Si recordamos cómo se define el producto interior en L^2, vemos que [9.48] es equivalente a

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f - Pf) \cdot \overline{Pg} \cdot e_{-\alpha}\, dm = 0 \qquad (f \text{ y } g \in L^2,\ \alpha \in R^1) \tag{9.49}$$

y esto dice que la trasformada de Fourier de

$$(f - Pf) \cdot \overline{Pg} \tag{9.50}$$

es 0. La función [9.50] es el producto de dos funciones de L^2, por lo que está en L^1, y el teorema de unicidad para las trasformadas de Fourier muestra ahora que la función [9.50] es 0 en c.t.p. Esto sigue siendo cierto si $\overline{Pg}$ se cambia por Pg. Por tanto:

$$f \cdot Pg = (Pf) \cdot (Pg) \qquad (f \text{ y } g \in L^2). \tag{9.51}$$

Intercambiando los papeles de f y g se obtiene de [9.51] que

$$f \cdot Pg = g \cdot Pf \qquad (f \text{ y } g \in L^2). \tag{9.52}$$

Sea ahora g una función positiva fija en L^2; por ejemplo, sea $g(t) = e^{-|t|}$. Definamos

$$\varphi(t) = \frac{(Pg)(t)}{g(t)}. \tag{9.53}$$

$(Pg)(t)$ puede sólo definirse en c.t.p.; tómese cualquier determinación en [9.53]. Entonces [9.52] se convierte en

$$Pf = \varphi \cdot f \qquad (f \in L^2). \tag{9.54}$$

Si $f \in \hat{M}$, entonces $Pf = f$. Esto dice que $P^2 = P$, y se deduce que $\varphi^2 = \varphi$, porque

$$\varphi^2 \cdot g = \varphi \cdot Pg = P^2 g = Pg = \varphi \cdot g. \tag{9.55}$$

Como $\varphi^2 = \varphi$, tenemos $\varphi = 0$ ó 1 en c.t.p., y si E es el conjunto de todos los t donde $\varphi(t) = 0$, entonces $\hat{M}$ consiste precisamente en aquellas $f \in L^2$ que son 0 en c.t.p. de E, puesto que $f \in \hat{M}$ si, y sólo si, $f = Pf = \varphi \cdot f$.

Obtenemos en consecuencia la solución siguiente a nuestro problema.

9.3.5. Teorema. *Asociemos a cada conjunto medible $E \in R^1$ el espacio M_E de todas las $f \in L^2$ tales que $\hat{f} = 0$ en c.t.p. de E. Entonces M_E es un subespacio cerrado de L^2 invariante por traslaciones. Todo subespacio cerrado de L^2 invariante por traslaciones es M_E para algún E, y $M_A = M_B$ si, y sólo si,*

$$m((A - B) \cup (B - A)) = 0$$

El enunciado de unicidad se demuestra fácilmente; dejamos los detalles al lector.

El problema anterior puede por supuesto proponerse en otros espacios de funciones. Ha sido estudiado con gran detalle en L^1. Los resultados conocidos muestran que la situación allí es infinitamente más complicada que en L^2.

9.4. EL ALGEBRA DE BANACH L^1

9.4.1. Definición. Un espacio de Banach A se dice que es un *álgebra de Banach* si existe una multiplicación definida en A que satisface la desigualdad

$$\|xy\| \leqslant \|x\| \, \|y\| \qquad (x \text{ e } y \in A). \tag{9.56}$$

la propiedad asociativa $x(yz) = (xy)z$, las propiedades distributivas

$$x(y + z) = xy + xz, \qquad (y + z)x = yx + zx \qquad (x, \ y \text{ y } z \in A), \tag{9.57}$$

y la relación

$$(\alpha x)y = x(\alpha y) = \alpha(xy) \tag{9.58}$$

donde α es un escalar cualquiera.

9.4.2. Ejemplos

a) Sea $A=C(X)$, donde X es un espacio de Hausdorff compacto, con la norma del supremo y la habitual multiplicación puntual de funciones:

$$(fg)(x)=f(x)g(x).$$

Esta es un álgebra de Banach conmutativa ($fg=gf$) con elemento unidad (la función constante 1).

b) $C_0(R^1)$ es un álgebra de Banach conmutativa sin elemento unidad, es decir, sin ningún elemento u tal que $uf=f$ para toda $f \in C_0(R^1)$.

c) El conjunto de todos los operadores lineales sobre R^k (o sobre cualquier espacio de Banach), con la norma definida como en la definición 5.1.2, y con la adición y multiplicación definidas mediante

$$(A+B)(x)=Ax+Bx, \qquad (AB)x=A(Bx),$$

es un álgebra de Banach no conmutativa (a menos que $k=1$) con elemento unidad.

d) L^1 es un álgebra de Banach si definimos la multiplicación mediante la convolución; puesto que

$$\|f*g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \, \|g\|_1,$$

se satisface la desigualdad de la norma. La propiedad asociativa podría comprobarse directamente (una aplicación del teorema de Fubini), pero podemos proceder así: sabemos que la trasformada de Fourier de $f*g$ es $\hat{f}\cdot\hat{g}$, y sabemos que la aplicación $f \to \hat{f}$ es uno a uno. Para todo $t \in R^1$,

$$\hat{f}(t)[\hat{g}(t)\hat{h}(t)]=[\hat{f}(t)\hat{g}(t)]\hat{h}(t),$$

por la propiedad asociativa de los números complejos. Se deduce que

$$f*(g*h)=(f*g)*h.$$

De la misma manera vemos inmediatamente que $f*g=g*f$. Se ve fácilmente que también se verifican en L^1 los requisitos restantes de la definición 9.4.1.

Entonces L^1 es un álgebra de Banach conmutativa. La trasformada de Fourier es un isomorfismo de álgebra de L^1 en C_0. En consecuencia, no existe ninguna $f \in L^1$ con $\hat{f} \equiv 1$, y, por tanto, L^1 no tiene elemento unidad.

9.4.3. Homomorfismos complejos. Las funciones complejas más importantes sobre un álgebra de Banach A son los homomorfismos de A en el cuerpo complejo. Estos son precisamente los funcionales lineales que también preservan la multiplicación, es decir, las funciones φ tales que

$$\varphi(\alpha x+\beta y)=\alpha\varphi(x)+\beta\varphi(y), \qquad \varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)$$

para todo x e $y \in A$ y todos los escalares α y β. Nótese que en esta definición no se ha hecho ninguna hipótesis de acotación. Es un hecho interesante el que esto hubiera sido redundante:

9.4.4. Teorema. *Si φ es un homomorfismo complejo sobre un álgebra de Banach A, entonces la norma de φ, como funcional lineal, es a lo sumo* 1.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos, para obtener una contradicción, que $|\varphi(x_0)| > \|x_0\|$ para algún $x_0 \in A$. Pongamos $\lambda = \varphi(x_0)$ y $x = x_0/\lambda$. Entonces $\|x\| < 1$ y $\varphi(x) = 1$.

Como $\|x^n\| = \|x\|^n$ y $\|x\| < 1$, los elementos

$$s_n = -x - x^2 - \ldots - x^n \qquad [9.59]$$

constituyen una sucesión de Cauchy en A. Como A es completo, por ser un espacio de Banach, existe un $y \in A$ tal que $\|y - s_n\| \to 0$, y se ve fácilmente que $x + s_n = xs_{n-1}$, de modo que

$$x + y = xy. \qquad [9.60]$$

Por tanto, $\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x)\varphi(y)$, lo que es imposible si $\varphi(x) = 1$. ////

9.4.5. Los homomorfismos complejos de L^1. Supongamos que φ es homomorfismo complejo de L^1, es decir, un funcional lineal (de norma 1 a lo sumo, por el teorema 9.4.4) que también satisface la relación

$$\varphi(f * g) = \varphi(f)\varphi(g) \qquad (f \text{ y } g \in L^1). \qquad [9.61]$$

Por el teorema 6.4.2, existe un $\beta \in L^\infty$ tal que

$$\varphi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\beta(x)\, dm(x) \qquad (f \in L^1). \qquad [9.62]$$

Explotamos ahora la relación [9.61] para ver qué más podemos decir acerca de β. Por una parte,

$$\begin{aligned}\varphi(f * g) &= \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x)\beta(x)\, dm(x)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \beta(x)\, dm(x) \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\, dm(y)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\, dm(y) \int_{-\infty}^{\infty} f_y(x)\beta(x)\, dm(x)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\varphi(f_y)\, dm(y). \qquad [9.63]\end{aligned}$$

Por otra:

$$\varphi(f)\varphi(g) = \varphi(f) \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\beta(y)\, dm(y). \qquad [9.64]$$

Supongamos ahora que φ no es idénticamente 0. Fijemos $f \in L^1$ de modo que $\varphi(f) \neq 0$. Puesto que la última integral en [9.63] es igual al segundo miembro de [9.64] para toda $g \in L^1$, la afirmación de unicidad del teorema 6.4.2 muestra que

$$\varphi(f)\beta(y) = \varphi(f_y) \qquad [9.65]$$

para casi todo y. Pero $y \to f_y$ es una aplicación continua de R^1 en L^1 (teorema 9.2.2) y φ es continua en L^1. En consecuencia el segundo miembro de [9.65] es una función continua de y, y podemos suponer (cambiando $\beta(y)$ en un conjunto de medida 0 si es necesario, lo que no afecta a [9.62]) que β es continua. Si cambiamos y por $x+y$ y entonces f por f_x en [9.65], obtenemos

$$\varphi(f)\beta(x+y)=\varphi(f_{x+y})=\varphi((f_x)_y)=\varphi(f_x)\beta(y)=\varphi(f)\beta(x)\beta(y),$$

así que

$$\beta(x+y)=\beta(x)\beta(y) \qquad (x \text{ e } y \in R^1). \tag{9.66}$$

Como β no es idénticamente 0, [9.66] implica que $\beta(0)=1$, y la continuidad de β muestra que existe un $\delta > 0$ tal que

$$\int_0^\delta \beta(y)\,dy = c \neq 0. \tag{9.67}$$

Entonces

$$c\beta(x)=\int_0^\delta \beta(y)\beta(x)\,dy=\int_0^\delta \beta(y+x)\,dy=\int_x^{x+\delta}\beta(y)\,dy. \tag{9.68}$$

Como β es continua, la última integral es una función diferenciable de x; por tanto, [9.68] muestra que β es diferenciable. Diferenciemos [9.66] con respecto a y, pongamos entonces $y=0$; el resultado es

$$\beta'(x)=A\beta(x), \qquad A=\beta'(0). \tag{9.69}$$

Por tanto, la derivada de $\beta(x)e^{-Ax}$ es 0, y como $\beta(0)=1$, obtenemos

$$\beta(x)=e^{Ax}. \tag{9.70}$$

Pero β está acotada sobre R^1. En consecuencia, A debe ser imaginario puro, y concluimos: Existe un $t \in R^1$ tal que

$$\beta(x)=e^{-itx}. \tag{9.71}$$

Hemos llegado, pues, a la transformada de Fourier.

9.4.6. Teorema. *A todo homorfismo complejo φ sobre L^1 (excepto a $\varphi=0$) le corresponde un único $t \in R^1$ tal que $\varphi(f)=\hat{f}(t)$.*

La existencia de t fue demostrada anteriormente. La unicidad se deduce de la observación de que si $t \neq s$ entonces existe una $f \in L^1$ tal que $\hat{f}(t) \neq \hat{f}(s)$; tómese como $f(x)$ una trasladada conveniente de $e^{-|x|}$.

EJERCICIOS

1. Se supone que $f \in L^1$, $f > 0$. Demuéstrese que $|\hat{f}(y)| < \hat{f}(0)$ para todo $y \neq 0$.

2. Calcúlese la transformada de Fourier de la función característica de un intervalo. Para $n=1, 2, 3, \ldots$, sea g_n la función característica de $[-n, n]$, sea h la función característica de $[-1, 1]$. Calcúlese $g_n * h$ explícitamente. (El gráfico es lineal a

trozos.) Demuéstrese que $g_n * h$ es la transformada de Fourier de una función $f_n \in L^1$; salvo por una constante multiplicativa,

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} nx}{x^2}$$

Demuéstrese que $\|f_n\|_1 \to \infty$ y conclúyase que la aplicación $f \to \hat{f}$ aplica L^1 en un subconjunto *propio* de C_0.

Demuéstrese, sin embargo, que el recorrido de esta aplicación es denso en C_0.

3. Obténgase

$$\lim_{A \to \infty} \int_{-A}^{A} \frac{\operatorname{sen} \lambda t}{t} e^{itx}\, dt \qquad (-\infty < x < \infty)$$

donde λ es una constante positiva.

4. Dénse ejemplos de $f \in L^2$ tales que $f \notin L^1$ pero $\hat{f} \in L^1$. ¿Bajo qué circunstancias puede ocurrir esto?

5. Si $f \in L^1$ y $\int |t\hat{f}(t)|\, dm(t) < \infty$, demuéstrese que f coincide en c.t.p. con una función diferenciable cuya derivada es

$$i \int_{-\infty}^{\infty} t\hat{f}(t) e^{ixt}\, dm(t).$$

6. Se supone que $f \in L^1$, que f es diferenciable en casi todo punto, y que $f' \in L^1$. ¿Se deduce de esto que la transformada de Fourier de f' es $ti\hat{f}(t)$?

7. Sea S la clase de todas las funciones f sobre R^1 que tienen la propiedad siguiente: f es infinitamente diferenciable, y existen números $A_{mn}(f) < \infty$, para m y $n = 0, 1, 2, \ldots$, tales que

$$|x^n D^m f(x)| \leqslant A_{mn}(f) \qquad (x \in R^1).$$

Aquí D es el operador de diferenciación ordinaria.
Demuéstrese que la transformada de Fourier aplica S sobre S.
Obténganse ejemplos de elementos de S.

8. Si p y q son exponentes conjugados, $f \in L^p$, $g \in L^q$, y $h = f * g$, pruébese que h es uniformemente continua. Si además $1 < p < \infty$, entonces $h \in C_0$; demuéstrese que esto no se verifica para algunas $f \in L^1$, $g \in L^\infty$.

9. Supóngase $1 \leqslant p < \infty$, $f \in L^p$, y

$$g(x) = \int_x^{x+1} f(t)\, dt.$$

Demuéstrese que $g \in C_0$. ¿Qué se puede decir sobre g si $f \in L^\infty$?

10. Sea C^∞ la clase de todas las funciones complejas infinitamente diferenciables sobre R^1, y sea C_c^∞ el conjunto de todas las $g \in C^\infty$ cuyo soporte es compacto. Demuéstrese que C_c^∞ no consta sólo del 0.

Sea L^1_{loc} la clase de todas las f que pertenecen a L^1 localmente; esto es, $f \in L^1_{\text{loc}}$ si f es medible y $\int_I |f| < \infty$ para todo intervalo acotado I.

Si $f \in L^1_{\text{loc}}$ y $g \in C_c^\infty$, demostrar que $f * g \in C^\infty$.

Demuéstrese que existen sucesiones $\{g_n\}$ en C_c^∞ tales que

$$\|f * g_n - f\|_1 \to 0$$

cuando $n \to \infty$, para toda $f \in L^1$. (Compárese con el teorema 9.2.7.) Pruébese que $\{g_n\}$ puede también tomarse de modo que $(f * g_n)(x) \to f(x)$ en c.t.p., para toda $f \in L^1_{loc}$; de hecho, para una $\{g_n\}$ conveniente la convergencia se tiene en todo punto x en el que f sea la derivada de su integral indefinida.

Demuéstrese que $(f * h_\lambda)(x) \to f(x)$ en c.t.p. si $f \in L^1$, cuando $\lambda \to 0$, y que $f * h_\lambda \in C^\infty$, si bien h_λ no tiene soporte compacto. (h_λ está definida en el apartado 9.2.4.)

11. Obténganse condiciones para f y/o $\hat{f}$ que aseguren que es correcto el siguiente razonamiento formal: Si

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx}\, dx$$

y

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x + 2k\pi)$$

entonces F es periódica, con periodo 2π, el coeficiente n-ésimo de Fourier de F es $\varphi(n)$, y, por tanto, $F(x) = \Sigma \varphi(n) e^{inx}$. En particular

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(2k\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n).$$

Más en general,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\beta) = \alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha) \quad \text{si } \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \alpha\beta = 2\pi. \tag{*}$$

¿Qué dice (*) sobre el límite, cuando $\alpha \to 0$, del segundo miembro (para funciones «favorables», por supuesto)? ¿Está esto de acuerdo con el teorema de inversión?

[(*) se conoce con el nombre de fórmula de sumación de Poisson.]

12. Tómese $f(x) = e^{-|x|}$ en el ejercicio 11 y obténgase la identidad

$$\frac{e^{2\pi\alpha} + 1}{e^{2\pi\alpha} - 1} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + n^2}.$$

13. Si $0 < c < \infty$, se define $f_c(x) = \exp(-cx^2)$.

a) Calcúlese $\hat{f}_c$. *Sugerencia:* Si $\varphi = \hat{f}_c$, una integración por partes proporciona $2c\varphi'(t) + t\varphi(t) = 0$.

b) Demuéstrese que existe una (y sólo una) c para la que $\hat{f}_c = f_c$.

c) Demuéstrese que $f_a * f_b = \gamma f_c$; obténgase γ y c explícitamente en términos de a y b.

d) Tómese $f = f_c$ en el ejercicio 11. ¿Cuál es la identidad resultante?

14. La transformada de Fourier puede definirse para $f \in L^1(R^k)$ mediante

$$\hat{f}(y) = \int_{R^k} f(x) e^{-ix \cdot y}\, dm_k(x) \qquad (y \in R^k),$$

donde $x \cdot y = \Sigma \xi_i \eta_i$ si $x = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$, $y = (\eta_1, \ldots, \eta_k)$, y m_k es la medida de Lebesgue sobre R^k, dividida por $(2\pi)^{k/2}$ por conveniencia. Demuéstrese el teorema de inver-

sión y el teorema de Plancherel en este contexto, así como el análogo del teorema 9.4.6.

15. Si $f \in L^1(R^k)$, A es un operador lineal sobre R^k, y $g(x)=f(Ax)$, ¿qué relación existe entre $\hat{g}$ y $\hat{f}$? Si f es invariante por rotaciones, es decir, si $f(x)$ depende solamente de la distancia euclídea de x al origen, demuéstrese que también lo es $\hat{f}$.

16. El *laplaciano* de una función f sobre R^k es

$$\Delta f = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2},$$

si existen las derivadas parciales. ¿Cuál es la relación entre $\hat{f}$ y $\hat{g}$ si $g=\Delta f$ y se satisfacen todas las condiciones necesarias de integrabilidad? Es claro que el laplaciano conmuta con las traslaciones. Demuéstrese que también conmuta con las rotaciones, es decir, que

$$\Delta(f \circ A) = (\Delta f) \circ A$$

si f posee segundas derivadas continuas y A es una rotación de R^k. (Pruébese que basta hacerlo con la hipótesis adicional de que f tenga soporte compacto.)

17. Demuéstrese que todo carácter Lebesgue medible de R^1 es continuo. Hágase lo mismo para R^k. (Adáptase parte de la demostración del teorema 9.4.6.) Compárese con el ejercicio 24 del capítulo 8.

PROPIEDADES ELEMENTALES DE LAS FUNCIONES HOLOMORFAS

10.1. DIFERENCIACION COMPLEJA

Estudiaremos ahora funciones complejas definidas en subconjuntos del plano complejo. Será conveniente adoptar algunas notaciones habituales que se utilizarán a lo largo del libro.

10.1.1. Definiciones. Si $r > 0$ y a es un número complejo,

$$D(a;\, r) = \{z : |z-a| < r\} \qquad [10.1]$$

es el disco circular abierto de centro a y radio r. $\bar{D}(a;\, r)$ es la adherencia de $D(a;\, r)$, y

$$D'(a;\, r) = \{z : 0 < |z-a| < r\} \qquad [10.2]$$

es el disco perforado con centro en a y radio r.

Un conjunto E en un espacio topológico X se dice *no conexo* si E es la unión de dos conjuntos no vacíos A y B tales que

$$\bar{A} \cap B = \varnothing = A \cap \bar{B}. \qquad [10.3]$$

Si A y B son como anteriormente, y V y W son los complementarios de $\bar{A}$ y $\bar{B}$, respectivamente, se tiene que $A \subset W$ y $B \subset V$. En consecuencia:

$$E \subset V \cup W, \quad E \cap V \neq \varnothing, \quad E \cap W \neq \varnothing, \quad E \cap V \cap W = \varnothing. \qquad [10.4]$$

Recíprocamente, si existen conjuntos abiertos V y W tales que se verifica [10.4], es fácil ver que E es no conexo, tomando $A = E \cap W$, $B = E \cap V$.

Si E es cerrado y no conexo, [10.3] muestra que E es la unión de dos conjuntos cerrados no vacíos disjuntos; porque si $\bar{A} \subset A \cup B$ y $\bar{A} \cap B = \varnothing$, entonces $\bar{A} = A$.

Si E es abierto y no conexo, [10.3] muestra que E es la unión de dos conjuntos abiertos no vacíos disjuntos, $E \cap V$ y $E \cap W$.

Si un conjunto consta solamente de un punto es obviamente conexo. Si $x \in E$, la familia Φ_x de todos los subconjuntos conexos de E que contienen a x es, por tanto, no vacía. Se ve fácilmente que la unión de todos los elementos de Φ_x es conexa, y es un *subconjunto conexo maximal* de E. Estos conjuntos se llaman las *componentes* de E. Dos componentes cualesquiera de E son, por tanto, disjuntas, y E es la unión de sus componentes.

Llamaremos *región* a un subconjunto no vacío abierto y conexo del plano complejo. Como cada conjunto abierto Ω en el plano es una unión de discos, y como todos los discos son conjuntos conexos, cada componente de Ω es abierta. Todo conjunto abierto plano es, pues, una unión de regiones disjuntas. La letra Ω denotará, de ahora en adelante, un conjunto abierto plano.

10.1.2. Definición. Supongamos que f es una función compleja definida en Ω. Si $z_0 \in \Omega$ y si existe

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \qquad [10.5]$$

denotaremos a este límite mediante $f'(z_0)$ y lo llamaremos *derivada* de f en z_0. Si existe $f'(z_0)$ para todo $z_0 \in \Omega$, decimos que f es *holomorfa* (o *analítica*) en Ω. La clase de todas las funciones holomorfas en Ω se denotará mediante $H(\Omega)$.

Más explícitamente, $f'(z_0)$ existe si a todo $\epsilon > 0$ le corresponde un $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0) \right| < \epsilon \quad \text{para todo } z \in D'(z_0;\, \delta). \qquad [10.6]$$

Por tanto, $f'(z_0)$ es un número complejo, obtenido como límite de cocientes de números complejos. Notemos que f es una aplicación de Ω en R^2, y la definición 8.4.1 asocia a tales aplicaciones otro tipo de derivada, un operador lineal sobre R^2. En la situación presente, si se satisface [10.6], este operador lineal resulta ser la multiplicación por $f'(z_0)$ (considerando R^2 como el cuerpo complejo). Dejamos al lector la comprobación de esto.

10.1.3. Observaciones. Si $f \in H(\Omega)$ y $g \in H(\Omega)$, también $f+g \in H(\Omega)$ y $fg \in H(\Omega)$, así que $H(\Omega)$ es un anillo; pueden aplicarse las reglas habituales de diferenciación.

Más interesante es el hecho de que las superposiciones de funciones holomorfas también lo son: *Si $f \in H(\Omega)$, si $f(\Omega) \subset \Omega_1$, si $g \in H(\Omega_1)$, y si $h = g \circ f$, entonces $h \in H(\Omega)$, y h' puede calcularse por la regla de la cadena:*

$$h'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0) \qquad (z_0 \in \Omega). \qquad [10.7]$$

Para demostrarlo, fijemos $z_0 \in \Omega$ y pongamos $w_0 = f(z_0)$. Entonces

$$f(z) - f(z_0) = [f'(z_0) + \epsilon(z)](z - z_0), \qquad [10.8]$$

$$g(w) - g(w_0) = [g'(w_0) + \eta(w)](w - w_0), \qquad [10.9]$$

donde $\epsilon(z) \to 0$ cuando $z \to z_0$ y $\eta(w) \to 0$ cuando $w \to w_0$. Hagamos $w = f(z)$, y sustituyamos [10.8] en [10.9]: Si $z \neq z_0$,

$$\frac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0} = [g'(f(z_0)) + \eta(f(z))][f'(z_0) + \epsilon(z)]. \qquad [10.10]$$

La diferenciabilidad de f obliga a que sea continua en z_0. Por tanto, [10.7] se deduce de [10.10].

10.1.4. Ejemplos. Para $n = 0, 1, 2, \ldots, z^n$ es holomorfa en todo el plano, y lo mismo es cierto para todo polinomio en z. Se comprueba con facilidad di-

rectamente que $1/z$ es holomorfa en $\{z : z \neq 0\}$. Por tanto, tomando $g(w) = 1/w$ en la regla de la cadena, vemos que si f_1 y f_2 están en $H(\Omega)$ y Ω_0 es un subconjunto abierto de Ω en el que f_2 no tiene ningún cero, se tiene que $f_1/f_2 \in H(\Omega_0)$.

Otro ejemplo de una función que es holomorfa en todo el plano (tales funciones se llaman *enteras)* es la función exponencial definida en el prólogo de esta obra. De hecho, vimos allí que exp es diferenciable en todo punto, en el sentido de la definición 10.1.2, y que $\exp'(z) = \exp(z)$ para todo complejo z.

10.1.5. Series de potencias. De la teoría de las series de potencias, supondremos sólo un hecho conocido, el de que a cada serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \qquad [10.11]$$

le corresponde un número $R \in [0, \infty]$ tal que la serie converge absoluta y uniformemente en $\bar{D}(a; r)$ para todo $r < R$, y diverge si $z \notin \bar{D}(a; R)$. El «radio de convergencia» viene dado por el criterio de la raíz:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} |c_n|^{1/n}. \qquad [10.12]$$

Decimos que una función f definida en Ω es *representable mediante series de potencias en* Ω si a todo disco $D(a; r) \subset \Omega$ le corresponde una serie [10.11] que converge a $f(z)$ para todo $z \in D(a; r)$.

10.1.6. Teorema. *Si f es representable mediante series de potencias en Ω, entonces $f \in H(\Omega)$ y f' es también representable mediante series de potencias en Ω. De hecho, si*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \qquad [10.13]$$

para $z \in D(a; r)$, para estos z tenemos también

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}. \qquad [10.14]$$

DEMOSTRACIÓN. Si la serie [10.13] converge en $D(a; r)$, el criterio de la raíz muestra que [10.14] también converge en el mismo conjunto. Tomemos $a = 0$, sin pérdida de generalidad, denotemos con $g(z)$ la suma de la serie [10.14], fijemos $w \in D(a; r)$, y elijamos ρ de modo que $|w| < \rho < r$. Si $z \neq w$, tenemos

$$\frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[\frac{z^n - w^n}{z - w} - nw^{n-1} \right]. \qquad [10.15]$$

La expresión entre corchetes es 0 si $n = 1$, y es

$$(z - w) \sum_{k=1}^{n-1} kw^{k-1} z^{n-k-1} \qquad [10.16]$$

si $n \geqslant 2$. Si $|z| < \rho$, el valor absoluto de la suma en [10.16] es menor que

$$\frac{n(n-1)}{2}\rho^{n-2} \qquad [10.17]$$

por lo que

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w}-g(w)\right| \leqslant |z-w| \sum_{n=2}^{\infty} n^2 |c_n| \rho^{n-2}. \qquad [10.18]$$

Como $\rho < r$, la última serie converge. Por tanto, el primer miembro de [10.18] tiende a 0 cuando $z \to w$. Esto dice que $f'(w) = g(w)$ y completa la demostración. ////

Corolario. *Como f' satisface las mismas hipótesis que f, el teorema puede aplicarse a f'. Se deduce, pues, que f posee derivadas de todos los órdenes, que cada derivada es representable mediante series de potencias en Ω, y que*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)c_n(z-a)^{n-k} \qquad [10.19]$$

si se verifica [10.13]. *En consecuencia,* [10.13] *implica que*

$$k!\,c_k = f^{(k)}(a) \qquad (k=0, 1, 2, \ldots), \qquad [10.20]$$

de modo que para cada $a \in \Omega$ existe una única sucesión $\{c_n\}$ para la que se verifica [10.13].

Describiremos ahora un proceso que produce funciones representables mediante series de potencias. Algunos casos especiales serán importantes más adelante.

10.1.7. Teorema. *Supongamos que μ es una medida compleja (finita) sobre un espacio medible X, que φ es una función compleja medible sobre X, que Ω es un conjunto abierto en el plano que no intersecta $\varphi(X)$ y*

$$f(z) = \int_X \frac{d\mu(\zeta)}{\varphi(\zeta)-z} \qquad (z \in \Omega). \qquad [10.21]$$

Entonces f es representable mediante series de potencias en Ω.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos $D(a; r) \subset \Omega$. Como

$$\left|\frac{z-a}{\varphi(\zeta)-a}\right| \leqslant \frac{|z-a|}{r} < 1 \qquad [10.22]$$

para todo $z \in D(a; r)$ y todo $\zeta \in X$, la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\varphi(\zeta)-a)^{n+1}} = \frac{1}{\varphi(\zeta)-z} \qquad [10.23]$$

converge uniformemente en X, para todo $z \in D(a; r)$ fijo. En consecuencia, puede sustituirse la serie [10.23] en [10.21], y $f(z)$ puede calcularse intercambiando sumación e integración. Se tiene que

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad (z \in D(a; r)) \qquad [10.24]$$

donde

$$c_n = \int_X \frac{d\mu(\zeta)}{(\varphi(\zeta)-a)^{n+1}} \qquad (n=0, 1, 2, \ldots). \qquad //// \qquad [10.25]$$

Nota: La convergencia de la serie [10.24] en $D(a; r)$ es una consecuencia de la demostración. Podemos también obtenerla a partir de [10.25], puesto que [10.25] muestra que

$$|c_n| \leqslant \frac{|\mu|(X)}{r^{n+1}} \qquad (n=0, 1, 2, \ldots). \qquad [10.26]$$

10.2. INTEGRACION A LO LARGO DE CAMINOS

Nuestro primer objetivo principal en este capítulo es obtener el recíproco del teorema 10.1.6: *Toda $f \in H(\Omega)$ es representable mediante series de potencias en Ω.* El camino más rápido para ello es el teorema de Cauchy, que conduce a una importante representación integral de las funciones holomorfas. En esta sección se desarrollará la teoría de las funciones holomorfas. En esta sección se desarrollará la teoría de integración necesaria; la mantendremos tan simple como sea posible, y la consideraremos meramente como un instrumento útil en la investigación de las propiedades de las funciones holomorfas..

10.2.1. Definiciones. Si X es un espacio topológico, una *curva en* X es una aplicación continua γ de un intervalo compacto $[\alpha, \beta] \subset R^1$ en X; aquí $\alpha < \beta$. Llamamos a $[\alpha, \beta]$ el *intervalo del parámetro* de γ y denotaremos con γ^* el recorrido de γ. Entonces γ es una aplicación y γ^* es el conjunto de todos los puntos $\gamma(t)$, para $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$.

Si el *punto inicial* $\gamma(\alpha)$ de γ coincide con su *punto final* $\gamma(\beta)$, llamamos a γ *curva cerrada.*

Un *camino* es una curva del plano continuamente diferenciable a trozos. Más explícitamente, un camino con $[\alpha, \beta]$ como intervalo del parámetro es una función compleja continua γ sobre $[\alpha, \beta]$, tal que se verifica lo siguiente: Existe un número finito de puntos s_j, $\alpha = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = \beta$ y la restricción de γ a cada intervalo $[s_{j-1}, s_j]$ posee una derivada continua en $[s_{j-1}, s_j]$; sin embargo, en los puntos $s_1, \ldots, s_{n-1}$ las derivadas de γ a la izquierda y a la derecha pueden diferir.

Un *camino cerrado* es una curva cerrada que es también un camino.

Supongamos ahora que γ es un camino y que f es una función continua en γ^*. La integral de f sobre γ se define como una integral sobre el intervalo del parámetro $[\alpha, \beta]$ de γ:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt.$$

Sea φ una aplicación uno a uno continuación diferenciable de un intervalo $[\alpha_1, \beta_1]$ sobre $[\alpha, \beta]$, tal que $\varphi(\alpha_1)=\alpha$, $\varphi(\beta_1)=\beta$, y pongamos $\gamma_1=\gamma \circ \varphi$. Entonces γ_1 es un camino cuyo intervalo del parámetro es $[\alpha_1, \beta_1]$; la integral de f sobre γ_1 es

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)\,dt = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(\gamma(\varphi(t)))\gamma'(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(s))\gamma'(s)\,ds.$$

de modo que nuestra «reparametrización» no ha modificado la integral:

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma} f(z)\,dz. \qquad [10.28]$$

Siempre que se verifique [10.28] para un par de caminos γ y γ_1 (y para toda f), consideraremos γ y γ_1 como equivalentes.

Es conveniente poder cambiar un camino por otro equivalente, es decir, escoger a voluntad los intervalos del parámetro. Por ejemplo, si el punto final de γ_1 coincide con el punto inicial de γ_2, podemos situar sus intervalos del parámetro de tal manera que γ_1 y γ_2 se unan para formar un camino γ, con la propiedad de que

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f \qquad [10.29]$$

para toda f continua en $\gamma^* = \gamma_1^* \cup \gamma_2^*$.

Sin embargo, supongamos que $[0, 1]$ es el intervalo del parámetro de un camino γ, y $\gamma_1(t)=\gamma(1-t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Llamamos a γ_1 el camino *opuesto* al γ, por la siguiente razón: Para cualquier f continua en $\gamma_1^* = \gamma^*$, tenemos

$$\int_0^1 f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)\,dt = -\int_0^1 f(\gamma(1-t))\gamma'(1-t)\,dt = -\int_0^1 f(\gamma(s))\gamma'(s)\,ds,$$

de modo que

$$\int_{\gamma_1} f = -\int_{\gamma} f. \qquad [10.30]$$

De [10.27] obtenemos la desigualdad

$$\left| \int_{\gamma} f(z)\,dz \right| \leqslant \|f\|_\infty \int_{\alpha}^{\beta} |\gamma'(t)|\,dt, \qquad [10.31]$$

donde $\|f\|_\infty$ es el máximo de $|f|$ sobre γ^* y la última integral en [10.31] es (por definición) la *longitud* de γ.

10.2.2. Casos especiales.

a) Si a es un número complejo y $r > 0$, el camino definido por

$$\gamma(t) = a + re^{it} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi) \qquad [10.32]$$

se llama la *circunferencia orientada positivamente* con centro en a y radio r; tenemos

$$\int_\gamma f(z)\,dz = ir\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})e^{i\theta}\,d\theta, \qquad [10.33]$$

y la longitud de γ es $2\pi r$, como cabía esperar.

b) Si a y b son números complejos, el camino γ dado por

$$\gamma(t) = a+(b-a)t \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1) \qquad [10.34]$$

es el intervalo orientado $[a, b]$; su longitud es $|b-a|$, y

$$\int_{[a,b]} f(z)\,dz = (b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)t]\,dt. \qquad [10.35]$$

Si

$$\gamma_1(t) = \frac{a(\beta-t)+b(t-\alpha)}{\beta-\alpha} \qquad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta), \qquad [10.36]$$

obtenemos un camino equivalente, que también denotaremos por $[a, b]$. El camino opuesto al $[a, b]$ es el $[b, a]$.

c) Sea $\{a, b, c\}$ una terna ordenada de números complejos, sea

$$\Delta = \Delta(a, b, c)$$

el triángulo con vértices en a, b y c (Δ es el conjunto convexo más pequeño que contiene a a, b y c), y definamos

$$\int_{\partial\Delta} f = \int_{[a,b]} f + \int_{[b,c]} f + \int_{[c,a]} f, \qquad [10.37]$$

para cualquier f continua en la frontera de Δ. Podemos considerar [10.37] como la definición de su primer miembro. O podemos considerar $\partial\Delta$ como un camino obtenido juntando $[a, b]$ a $[b, c]$ y a $[c, a]$, como se esbozó en la definición 10.2.1, en cuyo caso se demuestra fácilmente que [10.37] es cierto.

Si se permuta cíclicamente $\{a, b, c\}$, se ve en [10.37] que su primer miembro no cambia. Si se cambia $\{a, b, c\}$ por $\{a, c, b\}$, el primer miembro de [10.37] cambia de signo.

Llegamos ahora a un teorema que desempeña un papel muy importante en teoría de funciones.

10.2.3. Teorema. *Sea γ un camino cerrado, sea Ω el complementario de γ^* (relativo al plano), y definamos*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} \qquad (z \in \Omega). \qquad [10.38]$$

Entonces Ind_γ *es una función definida sobre Ω a valores enteros que es constante en cada componente de Ω y que es 0 en la componente no acotada de Ω.*

Llamamos a $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ el *índice* de z con respecto a γ. Notemos que γ^* es compacto, y, por tanto, γ^* está en un disco acotado D cuyo complementario D^c es conexo; entonces D está en alguna componente de Ω. Esto muestra que Ω tiene precisamente una componente no acotada.

DEMOSTRACIÓN. Sea $[\alpha, \beta]$ el intervalo del parámetro de γ, y fijemos $z \in \Omega$. Entonces

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha^\beta \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\, ds. \qquad [10.39]$$

Como $w/2\pi i$ es un entero si, y sólo si, $e^w = 1$, la primera afirmación del teorema, el que $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ sea un entero, es equivalente a la afirmación de que $\varphi(\beta) = 1$, donde

$$\varphi(t) = \exp\left\{ \int_\alpha^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\, ds \right\} \qquad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta). \qquad [10.40]$$

Diferenciando [10.40] se obtiene que

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} \qquad [10.41]$$

excepto posiblemente en un conjunto S donde γ no es diferenciable. En consecuencia, $\varphi/(\gamma - z)$ es una función continua en $[\alpha, \beta]$ cuya derivada es cero en $[\alpha, \beta] - S$. Como S es finito, $\varphi/(\gamma - z)$ es constante en $[\alpha, \beta]$; y como $\varphi(\alpha) = 1$, obtenemos

$$\varphi(t) = \frac{\gamma(t) - z}{\gamma(\alpha) - z} \qquad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta). \qquad [10.42]$$

Utilizamos ahora la hipótesis de que γ es un camino cerrado, es decir, que $\gamma(\beta) = \gamma(\alpha)$; [10.42] muestra que $\varphi(\beta) = 1$, y esto, como observamos antes, implica que $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ es un entero.

Por el teorema 10.1.7, [10.38] dice que $\mathrm{Ind}_\gamma \in H(\Omega)$. La imagen de un conjunto conexo por una aplicación continua es conexa ([26], teorema 4.22), y como Ind_γ es una función a valores enteros, Ind_γ debe ser constante sobre cada componente de Ω.

Finalmente, [10.39] muestra que $|\mathrm{Ind}_\gamma(z)| < 1$ si $|z|$ es suficientemente grande. Esto implica que $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$ en la componente no acotada de Ω. ////

Observación: Si $\lambda(t)$ denota la integral en [10.40], la demostración precedente muestra que $2\pi\, \mathrm{Ind}_\gamma(z)$ es el aumento neto en la parte imaginaria de $\lambda(t)$, cuando t va de α a β, y esto es lo mismo que el aumento neto del argumento de $\gamma(t) - z$. (No hemos definido «argumento» y no lo necesitaremos.) Si dividimos este aumento por 2π, obtenemos «el número de veces que γ gira alrededor de z», y esto explica por qué se utiliza frecuentemente el término «número de vueltas» para el índice. Una de las ventajas de la demostración precedente es que establece las principales propiedades del índice sin ninguna referencia al (a valores múltiples) argumento de un número complejo.

10.2.4. Teorema. *Si γ es la circunferencia orientada positivamente con centro en a y radio r, entonces*

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } |z-a| < r, \\ 0 & \text{si } |z-a| > r. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. Tomamos γ como en el apartado 10.2.2, *a)*. Por el teorema 10.2.3, basta calcular $\operatorname{Ind}_\gamma(a)$, y [10.33] muestra que éste vale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi} (re^{it})^{-1} e^{it}\, dt = 1. \qquad ////$$

10.3. EL TEOREMA DE CAUCHY LOCAL

Existen varias formas del teorema de Cauchy. Todas ellas afirman que si γ es un camino cerrado o ciclo en Ω, y si γ y Ω satisfacen ciertas condiciones topológicas, entonces la integral de toda $f \in H(\Omega)$ sobre γ es 0. Obtendremos en primer lugar una versión local simple de este hecho (teorema 10.3.3) que es suficiente para muchas aplicaciones. Más adelante se establecerá una forma global más general.

10.3.1. Teorema. *Supongamos que $F \in H(\Omega)$ y que F' es continua en Ω. Entonces*

$$\int_\gamma F'(z)\, dz = 0$$

para todo camino cerrado γ en Ω.

DEMOSTRACIÓN. Si $[\alpha, \beta]$ es el intervalo del parámetro de γ, el teorema fundamental del cálculo muestra que

$$\int_\gamma F'(z)\, dz = \int_\alpha^\beta F'(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(a)) = 0,$$

porque $\gamma(\beta) = \gamma(\alpha)$.

Corolario. *Como z^n es la derivada de $z^{n+1}/(n+1)$ para todos los enteros $n \neq -1$, tenemos*

$$\int_\gamma z^n\, dz = 0$$

para todo camino cerrado γ si $n = 0, 1, 2, \ldots$, y para aquellos caminos cerrados γ para los que $0 \notin \gamma^*$ si $n = -2, -3, -4, \ldots$

El caso $n = -1$ se trató en el teorema 10.2.3.

10.3.2. El teorema de Cauchy para un triángulo. *Supongamos que Δ es un triángulo cerrado en un conjunto abierto plano Ω, que $p \in \Omega$, que f es continua en Ω, y que $f \in H(\Omega - \{p\})$. Entonces*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0. \qquad [10.43]$$

Para la definición de $\partial\Omega$ véase el apartado 10.2.2, *c)*. Veremos más adelante que nuestra hipótesis implica realmente que $f \in H(\Omega)$, es decir, que el punto excepcional p no lo es en realidad. Sin embargo, la formulación anterior del teorema será útil en la demostración de la fórmula de Cauchy.

DEMOSTRACIÓN. Suponemos en primer lugar que $p \notin \Delta$. Sean a, b y c los vértices de Δ, sean a', b' y c' los puntos medios de $[b, c]$, $[c, a]$ y $[a, b]$, respectivamente, y consideremos los cuatro triángulos Δ^j formados por las ternas ordenadas

$$\{a, c', b'\}, \quad \{b, a', c'\}, \quad \{c, b', a'\}, \quad \{a', b', c'\}. \tag{10.44}$$

Si J es el valor de la integral [10.43], se deduce de [10.37] que

$$J = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial\Delta^j} f(z)\, dz. \tag{10.45}$$

El valor absoluto de al menos una de las integrales del segundo miembro de [10.45] es, por tanto, al menos $|J/4|$. Llamemos al triángulo correspondiente Δ_1, repitamos el razonamiento con Δ_1 en lugar de Δ, y así sucesivamente. Esto genera una sucesión de triángulos Δ_n tales que $\Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots$, de tal manera que la longitud de $\partial\Delta_n$ es $2^{-n}L$, si L es la longitud de $\partial\Delta$, y tales que

$$|J| \leqslant 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)\, dz \right| \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{10.46}$$

Existe un (único) punto z_0 común a los triángulos Δ_n. Como Δ es compacto, $z_0 \in \Delta$, y, por tanto, f es diferenciable en z_0.

Sea $\epsilon > 0$ dado. Existe un $r > 0$ tal que

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leqslant \epsilon |z - z_0| \tag{10.47}$$

si $|z - z_0| < r$, y existe un n tal que $|z - z_0| < r$ para todo $z \in \Delta_n$. Para este n tenemos también $|z - z_0| \leqslant 2^{-n}L$ para todo $z \in \Delta_n$. Por el corolario del teorema 10.3.1,

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z)\, dz = \int_{\partial\Delta_n} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)]\, dz, \tag{10.48}$$

así que [10.47] implica

$$\left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)\, dz \right| \leqslant \epsilon (2^{-n}L)^2, \tag{10.49}$$

y ahora [10.46] muestra que $|J| \leqslant \epsilon L^2$. Por tanto, $J = 0$ si $p \notin \Delta$.

Supongamos ahora que p es un vértice de Δ, por ejemplo $p = a$. Si a, b y c son colineales, entonces [10.43] es trivial, para cualquier f continua. Si no, tomemos puntos $x \in [a, b]$ e $y \in [a, c]$, ambos próximos a a, y observemos que la integral de f sobre $\partial\Delta$ es la suma de las integrales sobre las fronteras de los triángulos $\{a, x, y\}$, $\{x, b, y\}$ y $\{b, c, y\}$. Las dos últimas son 0, porque estos triángulos no contienen a p. Por tanto, la integral sobre $\partial\Delta$ es la suma de las integrales sobre $[a, x]$, $[x, y]$ y $[y, a]$, y como estos intervalos pueden

hacerse tan cortos como se desee y f está acotada en Δ, obtenemos otra vez [10.43].

Finalmente, si p es un punto arbitrario de Δ, apliquemos el resultado precedente a $\{a, b, p\}$, $\{b, c, p\}$ y $\{c, a, p\}$ para completar la demostración. ////

10.3.3. El teorema de Cauchy en un conjunto convexo. *Supongamos que Ω es un conjunto abierto convexo, que $p \in \Omega$, que f es continua en Ω, y que $f \in H(\Omega - \{p\})$. Entonces $f = F'$ para alguna $F \in H(\Omega)$. Por tanto,*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0 \qquad [10.50]$$

para todo camino cerrado γ en Ω.

DEMOSTRACIÓN. Fijemos $a \in \Omega$. Como Ω es convexo, Ω contiene al segmento de recta de a a z para todo $z \in \Omega$, por lo que podemos definir

$$F(z) = \int_{[a,z]} f(\xi)\, d\xi \qquad (z \in \Omega). \qquad [10.51]$$

Para cualesquiera z y $z_0 \in \Omega$, el triángulo con vértices en a, z_0 y z está en Ω; por tanto, $F(z) - F(z_0)$ es la integral de f sobre $[z_0, z]$, por el teorema 10.3.2. Fijando z_0, obtenemos, pues,

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) = \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0, z]} [f(\xi) - f(z_0)]\, d\xi, \qquad [10.52]$$

si $z \neq z_0$. Dado $\epsilon > 0$, la continuidad de f en z_0 muestra que existe un $\delta > 0$ tal que $|f(\xi) - f(z_0)| < \epsilon$ si $|\xi - z| < \delta$; por tanto, el valor absoluto del primer miembro de [10.52] es menor que ϵ si $|z - z_0| < \delta$. Esto prueba que $f = F'$. En particular, $F \in H(\Omega)$. Se obtiene entonces [10.50] del teorema 10.3.1. ////

10.3.4. Fórmula de Cauchy en un conjunto convexo. *Supongamos que γ es un camino cerrado en un conjunto abierto convexo Ω, y que $f \in H(\Omega)$. Si $z \in \Omega$ y $z \notin \gamma^*$, entonces*

$$f(z) \cdot \mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi. \qquad [10.53]$$

El caso de mayor interés es, por supuesto, $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 1$.

DEMOSTRACIÓN. Fijemos z de modo que se satisfagan las condiciones anteriores, y definamos

$$g(\xi) = \begin{cases} \dfrac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} & \text{si } \xi \in \Omega,\ \xi \neq z, \\ f'(z) & \text{si } \xi = z. \end{cases} \qquad [10.54]$$

Entonces g satisface las hipótesis del teorema 10.3.3. En consecuencia,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(\xi)\, d\xi = 0. \qquad [10.55]$$

Si sustituimos [10.54] en [10.55] obtenemos [10.53]. ////

El teorema que se refiere a la posibilidad de representar funciones holomorfas mediante series de potencias es una consecuencia fácil del teorema 10.3.4, si tomamos como γ una circunferencia:

10.3.5. Teorema. *Para todo conjunto abierto Ω en el plano, toda $f \in H(\Omega)$ puede representarse mediante series de potencias en Ω.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $f \in H(\Omega)$ y $D(a; r) \subset \Omega$. Si γ es una circunferencia orientada positivamente con centro en a y radio $r < R$, la convexidad de $D(a; r)$ nos permite aplicar el teorema 10.3.4; del teorema 10.2.4, obtenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \qquad (z \in D(a; r)). \qquad [10.56]$$

Pero ahora podemos aplicar el teorema 10.1.7, con $X = [0, 2\pi]$, $\varphi = \gamma$ y $d\mu(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt$, y concluimos que existe una sucesión $\{c_n\}$ tal que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad (z \in D(a; r)). \qquad [10.57]$$

La unicidad de $\{c_n\}$ (véase el corolario del teorema 10.1.6) muestra que se obtiene la misma serie de potencias para todo $r < R$ (siempre que a sea fijo). En consecuencia, la representación [10.57] es válida para todo $z \in D(a; R)$, lo que completa la demostración. ////

Corolario. *Si $f \in H(\Omega)$, entonces $f' \in H(\Omega)$.*

DEMOSTRACIÓN. Hay que combinar los teoremas 10.1.6 y 10.3.5. ////

El teorema de Cauchy tiene un recíproco útil:

10.3.6. Teorema de Morera. *Supongamos que f es una función compleja continua en un conjunto abierto Ω tal que*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0$$

para todo triángulo cerrado $\Delta \subset \Omega$. Entonces $f \in H(\Omega)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea V un conjunto abierto convexo en Ω. Como en la demostración del teorema 10.3.3, podemos construir una $F \in H(V)$ tal que $F' = f$. Como las derivadas de funciones holomorfas son holomorfas (teorema 10.3.5), tenemos $f \in H(V)$, para todo abierto convexo $V \subset \Omega$, y, por tanto, $f \in H(\Omega)$. ////

10.4. LA REPRESENTACION EN SERIE DE POTENCIAS

El que toda función holomorfa sea localmente la suma de una serie de potencias convergente posee un gran número de consecuencias interesantes. En esta sección se desarrollan algunas de ellas.

10.4.1. Teorema. *Supongamos que Ω es una región, $f \in H(\Omega)$, y*

$$Z(f) = \{a \in \Omega : f(a) = 0\}. \qquad [10.57]$$

Entonces, o bien $Z(f)=\Omega$, o $Z(f)$ no tiene punto límite en Ω. En el último caso a cada $a \in Z(f)$ le corresponde un único entero positivo $m=m(a)$ tal que

$$f(z)=(z-a)^m g(z) \qquad (z \in \Omega), \tag{10.58}$$

donde $g \in H(\Omega)$ y $g(a) \neq 0$; además, $Z(f)$ es a lo sumo numerable.

(Recordamos que las regiones son conjuntos abiertos *conexos.)*

El entero m se llama el *orden* del cero que f posee en el punto a. Es claro que $Z(f)=\Omega$ si, y sólo si, f es idénticamente 0 en Ω. Llamamos a $Z(f)$ el *conjunto cero* de f. Por supuesto, se verifican resultados análogos para el conjunto de α-puntos de f, es decir, el conjunto cero de $f-\alpha$, donde α es un número complejo cualquiera.

DEMOSTRACIÓN. Sea A el conjunto de todos los puntos límites de $Z(f)$ en Ω. Como f es continua, $A \subset Z(f)$.

Fijemos $a \in Z(f)$, y tomemos $r > 0$ de modo que $D(a; r) \subset \Omega$. Por el teorema 10.3.5,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \qquad (z \in D(a; r)). \tag{10.59}$$

Existen ahora dos posibilidades. O bien todos los c_n son 0, en cuyo caso $D(a; r) \subset A$ y a es un punto interior de A, o existe un mínimo entero m [necesariamente positivo, puesto que $f(a)=0$] tal que $c_m \neq 0$. En este caso, definimos

$$g(z)=\begin{cases} (z-a)^{-m} f(z) & (z \in \Omega-\{a\}), \\ c_m & (z=a). \end{cases} \tag{10.60}$$

Entonces se verifica [10.58]. Es claro que $g \in H(\Omega-\{a\})$. Pero [10.59] implica que

$$g(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_{m+k}(z-a)^k \qquad (z \in D(a; r)). \tag{10.61}$$

En consecuencia, $g \in H(D(a; r))$, por lo que, en realidad, $g \in H(\Omega)$.

Más aún, $g(a) \neq 0$, y la continuidad de g muestra que existe un entorno de a en el que g no tiene ningún cero. Entonces a es un punto aislado de $Z(f)$ por [10.58].

Si $a \in A$, debe presentarse el primer caso. Por tanto, A es abierto. Si $B=\Omega-A$, de la definición de A como conjunto de puntos límite se deduce que B es abierto. Entonces Ω es la unión de los conjuntos abiertos disjuntos A y B. Como Ω es conexo, tenemos que o bien $A=\Omega$, en cuyo caso $Z(f)=\Omega$, o $A=\varnothing$. En el último caso, $Z(f)$ tiene a lo sumo un número finito de puntos en cada subconjunto compacto de Ω, y como Ω es σ-compacto, $Z(f)$ es a lo sumo numerable. ////

Corolario. *Si f y g son funciones holomorfas en una región Ω y si $f(z)=g(z)$ para todo z de algún conjunto que posea un punto límite en Ω, entonces $f(z)=g(z)$ para todo $z \in \Omega$.*

En otras palabras, una función holomorfa en una región Ω está determinada por sus valores sobre cualquier conjunto que tenga un punto límite en Ω. Este es un importante teorema de unicidad.

Nota: El teorema no se verifica si eliminamos la hipótesis de que Ω sea conexo; si $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$, y Ω_0 y Ω_1 son conjuntos abiertos disjuntos, pongamos $f=0$ en Ω_0 y $f=1$ en Ω_1.

10.4.2. Definición. *Si $a \in \Omega$ y $f \in (\Omega - \{a\})$,* entonces se dice que f tiene una *singularidad aislada* en el punto a. Si f puede definirse en a de tal manera que la función extendida sea holomorfa en Ω, la singularidad se dice *evitable.*

10.4.3. Teorema. *Supongamos que $f \in H(\Omega - \{a\})$ y que f es acotada en $D'(a; r)$, para algún $r > 0$. Entonces f tiene una singularidad evitable en a.*

Recordemos que $D'(a; r) = \{z : 0 < |z-a| < r\}$.

DEMOSTRACIÓN. Definamos $h(a)=0$ y $h(z)=(z-a)^2 f(z)$ en $\Omega - \{a\}$. Nuestra hipótesis de acotación muestra que $h'(a)=0$. Como h es evidentemente diferenciable en todo otro punto de Ω, tenemos que $h \in H(\Omega)$; por tanto:

$$h(z) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad (z \in D(a; r)).$$

Obtenemos la extensión holomorfa buscada de f haciendo $f(a) = c_2$, porque entonces

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2} (z-a)^n \qquad (z \in D(a; r)). \qquad ////$$

10.4.4. Teorema. *Si $a \in \Omega$ y $f \in H(\Omega - \{a\})$, entonces debe presentarse uno de los siguientes tres casos:*

a) *f tiene una singularidad evitable en a.*
b) *Existen números complejos $c_1, \ldots, c_m$, donde m es un entero positivo y $c_m \neq 0$, tales que*

$$f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}$$

tiene una singularidad evitable en a.
c) *Si $r > 0$ y $D(a; r) \subset \Omega$, entonces $f(D'(a; r))$ es denso en el plano.*

En el caso *b)* se dice que f tiene un *polo de orden m* en a. La función

$$\sum_{k=1}^{m} c_k (z-a)^{-k},$$

un polinomio en $(z-a)^{-1}$, se llama la *parte principal* de f en a. Es claro en este caso que $|f(z)| \to \infty$ cuando $z \to a$.

En el caso *c)* se dice que f tiene una *singularidad esencial* en a. Un enunciado equivalente a *c)* es el de que a todo número complejo w le corresponde una sucesión $\{z_n\}$ tal que $z_n \to a$ y $f(z_n) \to w$ cuando $n \to \infty$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que *c)* no se verifica. Entonces existen $r > 0$, $\delta > 0$ y un número complejo w tal que $|f(z) - w| > \delta$ en $D'(a; r)$. Escribamos D en lugar de $D(a; r)$ y D' en el de $D'(a; r)$. Definamos

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w} \qquad (z \in D'). \tag{10.62}$$

Entonces $g \in H(D')$ y $|g| < 1/\delta$. Por el teorema 10.4.3, g puede extenderse como función holomorfa en D.

Si $g(a) \neq 0$, [10.62] muestra que f está acotada en $D'(a; \rho)$ para algún $\rho > 0$. Por tanto, *a)* se verifica, por el teorema 10.4.3.

Si g tiene un cero de orden $m \geqslant 1$ en a, el teorema 10.4.1 dice que

$$g(z) = (z - a)^m g_1(z) \qquad (z \in D), \tag{10.63}$$

donde $g_1 \in H(D)$ y $g_1(a) \neq 0$. Además, g_1 no tiene ningún cero en D', por [10.62]. Pongamos $h = 1/g_1$ en D. Entonces $h \in H(D)$, h no tiene ningún cero en D, y

$$f(z) - w = (z - a)^{-m} h(z) \qquad (z \in D'). \tag{10.64}$$

Pero h tiene un desarrollo de la forma

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - a)^n \qquad (z \in D), \tag{10.65}$$

con $b_0 \neq 0$. Entonces [10.64] muestra que se verifica *b)*, con $c_k = b_{m-k}$, $k = 1, \ldots, m$.

Esto completa la demostración. ////

Explotaremos ahora el hecho de que la restricción de una serie de potencias $\Sigma c_n (z - a)^n$ a una circunferencia de centro a es una serie trigonométrica.

10.4.5. Teorema. *Si*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n \qquad (z \in D(a; R)) \tag{10.66}$$

y si $0 < r < R$, *entonces*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(a + re^{i\theta})|^2 \, d\theta. \tag{10.67}$$

DEMOSTRACIÓN. Tenemos

$$f(a + re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{in\theta}. \tag{10.68}$$

Para $r < R$, la serie [10.68] converge uniformemente en $[-\pi, \pi]$. Por tanto:

$$c_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a + re^{i\theta}) e^{-in\theta}\, d\theta \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \qquad [10.69]$$

y [10.67] resulta ser un caso especial de la fórmula de Parseval. ////

He aquí algunas consecuencias:

10.4.6. Teorema de Liouville. *Toda función entera acotada es constante.*

Recordemos que una función es *entera* si es holomorfa en todo el plano.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que f es entera, $|f(z)| < M$ para todo z, y $f(z) = \Sigma c_n z^n$ para todo z. Por el teorema 10.4.5,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} < M^2$$

para todo r, lo que es posible sólo si $c_n = 0$ para todo $n \geqslant 1$. ////

10.4.7. El teorema del módulo máximo. *Supongamos que Ω es una región, que $f \in H(\Omega)$ y $\bar{D}(a; r) \subset \Omega$. Entonces*

$$|f(a)| \leqslant \max_{\theta} |f(a + re^{i\theta})|. \qquad [10.70]$$

La igualdad se presenta en [10.66] *si, y sólo si, f es constante en Ω.*

Consecuentemente, $|f|$ no tiene ningún máximo local en ningún punto de Ω, a menos que f sea constante.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $|f(a + re^{i\theta})| \leqslant |f(a)|$ para todo real. En la notación del teorema 10.4.5 se tiene entonces que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} \leqslant |f(a)|^2 = |c_0|^2.$$

En consecuencia, $c_1 = c_2 = c_3 = \ldots = 0$, lo que implica que $f(z) = f(a)$ en $D(a; r)$. Como Ω es conexo, el teorema 10.4.1 muestra que f es constante en Ω. ////

10.4.8. Teorema. *Si n es un entero positivo y*

$$P(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0,$$

donde $a_1, \ldots, a_{n-1}$ son números complejos, entonces P tiene precisamente n ceros en el plano.

Por supuesto, estos ceros se cuentan de acuerdo con sus multiplicidades: Un cero de orden m, por ejemplo, se cuenta como m ceros. Este teorema contiene el hecho de que el cuerpo complejo es algebraicamente cerrado, es decir, que todo polinomio no constante con coeficientes complejos tiene al menos un cero complejo.

DEMOSTRACIÓN. Tomemos $r > 1+2|a_0|+|a_1|+\ldots+|a_{n-1}|$. Entonces

$$|P(re^{i\theta})| > |P(0)| \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi).$$

Si P no tuviera ceros, entonces la función $f=1/P$ sería entera y satisfaría $|f(0)| > |f(re^{i\theta})|$ para todo θ, lo que contradice el teorema del módulo máximo. Entonces $P(z_1)=0$ para algún z_1. Consecuentemente, existe un polinomio Q, de grado $n-1$, tal que $P(z)=(z-z_1)Q(z)$. La demostración se completa por inducción respecto de n. ////

10.4.9. Teorema (acotaciones de Cauchy). *Si $f \in H(D(a; R))$ y $|f(z)| \leqslant M$ para todo $z \in D(a; R)$, entonces*

$$|f^{(n)}(a)| \leqslant \frac{n!\,M}{R^n} \qquad (n=1, 2, 3, \ldots). \qquad [10.71]$$

DEMOSTRACIÓN. Para cada $r < R$, cada término de la serie [10.67] está acotado superiormente por M^2. ////

Si tomamos $a=0$, $R=1$ y $f(z)=z^n$, entonces $M=1$, $F^{(n)}(0)=n!$, y vemos que [10.71] no puede mejorarse.

10.4.10. Definición. Una sucesión $\{f_j\}$ de funciones en Ω se dice que *converge a f uniformemente en subconjuntos compactos de Ω* si a todo compacto $K \subset \Omega$ y a todo $\epsilon > 0$ le corresponde un $N=N(K, \epsilon)$ tal que $|f_j(z)-f(z)| < \epsilon$ para todo $z \in K$ si $j > N$.

Por ejemplo, la sucesión $\{z^n\}$ converge a 0 uniformemente en subconjuntos compactos de $D(0; 1)$, pero la convergencia no es uniforme en $D(0; 1)$.

Es la convergencia en subconjuntos compactos la que surge más naturalmente en conexión con operaciones de paso al límite de funciones holomorfas. El término «convergencia casi uniforme» se utiliza a veces para este concepto.

10.4.11. Teorema. *Supongamos que $f_j \in H(\Omega)$, para $j=1, 2, 3, \ldots$, y $f_j \to f$ uniformemente en subconjuntos compactos de Ω. Entonces $f \in H(\Omega)$, y $f_j' \to f'$ uniformemente en subconjuntos compactos de Ω.*

DEMOSTRACIÓN. Como la convergencia es uniforme en cada disco compacto de Ω, f es continua. Sea Δ un triángulo en Ω. Entonces Δ es compacto, por lo que

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \lim_{j\to\infty} \int_{\partial\Delta} f_j(z)\,dz = 0,$$

por el teorema de Cauchy. En consecuencia, el teorema de Morera implica que $f \in H(\Omega)$.

Sea K compacto, $K \subset \Omega$. Existe un $r > 0$ tal que la unión E de los discos cerrados $\bar{D}(z; r)$, para todo $z \in K$, es un subconjunto compacto de Ω. Aplicando el teorema 10.4.9 a $f-f_j$, tenemos

$$|f'(z)-f_j'(z)| \leqslant r^{-1}\|f-f_j\|_E \qquad (z \in K),$$

donde $\|f\|_E$ denota el supremo de $|f|$ sobre E. Como $f_j \to f$ uniformemente en E, se deduce que $f_j' \to f'$ uniformemente en K. ////

Corolario. *Bajo las mismas hipótesis, $f_j^{(n)} \to f^{(n)}$ uniformemente, cuando $j \to \infty$, en todo conjunto compacto $K \subset \Omega$, y para todo entero positivo n.*

Compárese este resultado con la situación en la recta real, en donde sucesiones de funciones infinitamente diferenciables pueden converger uniformemente a funciones que no son diferenciables en ningún punto.

10.5. EL TEOREMA DE LA APLICACION ABIERTA

Si Ω es una región y $f \in H(\Omega)$, entonces $f(\Omega)$ es o una región o un punto.

Esta importante propiedad de las funciones holomorfas se demostrará, más detalladamente, en el teorema 10.5.4.

10.5.1. Lema. *Si $f \in H(\Omega)$ y g se define en $\Omega \times \Omega$ mediante*

$$g(z, w) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(w)}{z - w} & \text{si } w \neq z, \\ f'(z) & \text{si } w = z, \end{cases}$$

entonces g es continua en $\Omega \times \Omega$.

DEMOSTRACIÓN. Los únicos puntos $(z, w) \in \Omega \times \Omega$ en los que g puede no ser continua son aquéllos en los que $z = w$.

Fijemos $a \in \Omega$ y $\epsilon > 0$. Existe un $r > 0$ tal que $D(a; r) \subset \Omega$ y $|f'(\zeta) - f'(a)| < \epsilon$ para todo $\zeta \in D(a; r)$. Si z y w están en $D(a; r)$ y si

$$\zeta(t) = (1 - t)z + tw,$$

entonces $\zeta(t) \in D(a; r)$ para $0 \leqslant t \leqslant 1$, y

$$g(z, w) - g(a, a) = \int_0^1 [f'(\zeta(t)) - f'(a)]\, dt.$$

El valor absoluto del integrando es $< \epsilon$, para todo t. Entonces

$$|g(z, w) - g(a, a)| < \epsilon.$$

Esto demuestra que g es continua en (a, a). ////

10.5.2. Teorema. *Supongamos que $\varphi \in H(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$ y $\varphi'(z_0) \neq 0$. Entonces Ω contiene un entorno V de z_0 tal que*

a) *φ es uno a uno en V,*
b) *$W = \varphi(V)$ es un conjunto abierto, y*
c) *si $\psi: W \to V$ se define mediante $\psi(\varphi(z)) = z$, entonces $\psi \in H(W)$.*

Se deduce, pues, que $\varphi: V \to W$ tiene una inversa holomorfa.

DEMOSTRACIÓN. El lema 10.5.1, aplicado a φ en lugar de a f, muestra que Ω contiene un entorno V de z_0 tal que

$$|\varphi(z_1)-\varphi(z_2)| \geqslant \frac{1}{2}\,|\varphi'(z_0)|\,|z_1-z_2| \qquad [10.72]$$

si $z_1 \in V$ y $z_2 \in V$. Entonces se verifica *a)*, y además

$$\varphi'(z) \neq 0 \qquad (z \in V). \qquad [10.73]$$

Para demostrar *b)*, fijemos $\zeta \in V$. Tomemos $r > 0$ de modo que $\bar{D}(\zeta;\, r) \subset V$. Por [10.72] existe un $\delta > 0$ tal que

$$|\varphi(\zeta + re^{i\theta}) - \varphi(\zeta)| > 2\delta \qquad (-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi). \qquad [10.74]$$

Sea α un número complejo que no esté en $f(V)$. Entonces $h = 1/(\alpha - \varphi)$ es holomorfa en V. Como

$$2\delta < |\alpha - \varphi(\zeta)| + |\alpha - \varphi(\zeta + re^{i\theta})|$$

para todo θ, el teorema del módulo máximo implica que

$$\frac{1}{|\alpha - \varphi(\zeta)|} = |h(\zeta)| \leqslant \sup_{\theta} |h(\zeta + re^{i\theta})| \leqslant \frac{1}{2\delta - |\alpha - \varphi(\zeta)|}.$$

Por tanto, $|\alpha - \varphi(\zeta)| \geqslant \delta$.

Esto demuestra que $\varphi(V) \supset D(\varphi(\zeta);\, \delta)$. Como ζ es un punto arbitrario de V, $\varphi(V)$ es abierto.

Para demostrar *c)*, fijemos $w_1 \in W$. Entonces $\varphi(z_1) = w_1$ para un único $z_1 \in V$. Si $w \in W$ y $\psi(w) = z \in V$, tenemos

$$\frac{\psi(w) - \psi(w_1)}{w - w_1} = \frac{z - z_1}{\varphi(z) - \varphi(z_1)}. \qquad [10.75]$$

Por [10.72], $z \to z_1$ cuando $w \to w_1$. Por tanto, [10.73] implica que $\psi'(w) = 1/\varphi'(z)$. Entonces $\psi \in H(W)$. ////

10.5.3. Definición. Para $m = 1, 2, 3, \ldots$, denotamos la «función m-ésima potencia» $z \to z^m$ por π_m.

Cada $w \neq 0$ es $\pi_m(z)$ para precisamente m valores distintos de z: Si $w = re^{i\theta}$, $r > 0$, entonces $\pi_m(z) = w$ si, y sólo si, $z = r^{1/m} e^{i(\theta + 2k\pi)/m}$, $k = 1, \ldots, m$.

Nótese también que cada π_m es una aplicación abierta: Si V es abierto y no contiene al 0, entonces $\pi_m(V)$ es abierto por el teorema 10.5.2. Por otra parte, $\pi_m(D(0;\, r)) = D(0;\, r^m)$.

Las composiciones de aplicaciones abiertas son claramente abiertas. En particular, $\pi_m \circ \varphi$ es abierta, por el teorema 10.5.2, si φ' no tiene ningún cero. El teorema siguiente (que contiene la versión más detallada del teorema de la aplicación abierta que ya fue mencionada antes del lema 10.5.1) enuncia un recíproco: Toda función holomorfa no constante es localmente de la forma $\pi_m \circ \varphi$, salvo por una constante aditiva.

10.5.4. Teorema. *Supongamos que Ω es una región, $f \in H(\Omega)$, f es no constante, $z_0 \in \Omega$ y $w_0 = f(z_0)$. Sea m el orden del cero que la función $f - w_0$ posee en z_0.*

Entonces existe un entorno V de z_0, $V \subset \Omega$, y existe una $\varphi \in H(V)$, tales que

a) $f(z) = w_0 + [\varphi(z)]^m$ *para todo* $z \in V$,

b) φ' *no tiene ningún cero en* V *y* φ *es una aplicación invertible de* V *sobre un disco* $D(0; r)$.

Por tanto, $f - w_0 = \pi_m \circ \varphi$ en V. Se tiene que f es una aplicación exactamente m a uno de $V - \{z_0\}$ sobre $D'(w; r^m)$, y que cada $w_0 \in f(\Omega)$ es un punto interior de $f(\Omega)$. En consecuencia, $f(\Omega)$ es abierto.

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que Ω es un entorno convexo de z_0 tan pequeño que $f(z) \neq w_0$ si $z \in \Omega - \{z_0\}$. Entonces

$$f(z) - w_0 = (z - z_0)^m g(z) \qquad (z \in \Omega) \qquad [10.76]$$

para alguna $g \in H(\Omega)$ que no tenga ceros en Ω. En consecuencia, $g'/g \in H(\Omega)$. Por el teorema 10.3.3, $g'/g = h'$ para alguna $h \in H(\Omega)$. La derivada de $g \cdot \exp(-h)$ es 0 en Ω. Si h se modifica por la adición de una constante conveniente, se deduce que $g = \exp(h)$. Definamos

$$\varphi(z) = (z - z_0) \exp \frac{h(z)}{m} \qquad (z \in \Omega). \qquad [10.77]$$

Entonces se verifica *a)* para todo $z \in \Omega$.

Además, $\varphi(z_0) = 0$ y $\varphi'(z_0) \neq 0$. La existencia de un conjunto abierto V que satisfaga *b)* se deduce ahora del teorema 10.5.2. Ello completa la demostración. ////

El siguiente teorema está contenido en realidad en los resultados precedentes, pero parece aconsejable enunciarlo explícitamente.

10.5.5. Teorema. *Supongamos que Ω es una región, $f \in H(\Omega)$, y que f es uno a uno en Ω. Entonces $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$, y la inversa de f es holomorfa.*

DEMOSTRACIÓN. Si $f'(z_0)$ fuera 0 para algún $z_0 \in \Omega$, las hipótesis del teorema 10.5.4 se verificarían con algún $m > 1$, de modo que f sería m a uno en algún entorno perforado de z_0. Se aplica ahora la parte *c)* del teorema 10.5.2. ////

Notemos que el recíproco del teorema 10.5.5 es falso: Si $f(z) = e^z$, entonces $f'(z) \neq 0$ para todo z, pero f no es uno a uno en todo el plano complejo.

10.6. EL TEOREMA DE CAUCHY GLOBAL

Antes de enunciar y demostrar este teorema, que eliminará la restricción a regiones convexas que fue impuesta en el teorema 10.3.3, será conveniente añadir algo al aparato de integración que ha sido suficiente hasta ahora. Esencialmente, de lo que se trata es de no restringirnos a integrales a lo largo de un único camino, sino de poder considerar integrales a lo largo de «sumas» finitas de caminos. Un ejemplo simple de esto ya apareció en el apartado 10.2.2, *c*).

10.6.1. Cadenas y ciclos. Supongamos que $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ son caminos en el plano, y pongamos $K = \gamma_1^* \cup \ldots \cup \gamma_n^*$. Cada γ_i induce un funcional lineal $\tilde{\gamma}_i$ sobre el espacio vectorial $C(K)$, mediante la fórmula

$$\tilde{\gamma}_i(f) = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz. \qquad [10.78]$$

Definamos

$$\tilde{\Gamma} = \tilde{\gamma}_1 + \ldots + \tilde{\gamma}_n. \qquad [10.79]$$

Explícitamente, $\tilde{\Gamma}(f) = \tilde{\gamma}_1(f) + \ldots + \tilde{\gamma}_n(f)$ para toda $f \in C(K)$. La relación [10.79] sugiere que introduzcamos una «suma formal»

$$\Gamma = \gamma_1 \dot{+} \ldots \dot{+} \gamma_n \qquad [10.80]$$

y definamos

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = \tilde{\Gamma}(f). \qquad [10.81]$$

Entonces [10.80] es meramente una abreviatura del enunciado

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f(z)\, dz \qquad (f \in C(K)). \qquad [10.82]$$

Notemos que [10.82] sirve como definición de su primer miembro.

Los objetos Γ así definidos se llaman *cadenas*.

Si Ω es un conjunto abierto, si $\gamma_i^* \subset \Omega$ para $1 \leqslant i \leqslant n$, y si Γ se define mediante [10.80], entonces Γ es una *cadena* en Ω.

Si se verifica [10.80] y cada γ_i es un camino cerrado, entonces Γ se llama un *ciclo*.

Una cadena puede representarse como suma de caminos de muchas formas. Decir que

$$\gamma_1 \dot{+} \ldots \dot{+} \gamma_n = \delta_1 \dot{+} \ldots \dot{+} \delta_k$$

significa simplemente que

$$\sum_i \int_{\gamma_i} f(z)\, dz = \sum_j \int_{\delta_j} f(z)\, dz$$

para toda f que sea continua en $\gamma_1^* \cup \ldots \cup \gamma_n^* \cup \delta_1^* \cup \ldots \cup \delta_k^*$. En particular, un ciclo puede representarse muy bien como suma de caminos que no sean cerrados.

Si se verifica [10.80], definimos

$$\Gamma^* = \gamma_1^* \cup \ldots \cup \gamma_n^*. \qquad [10.82]$$

Si Γ es un ciclo y $\alpha \notin \Gamma$, definimos el *índice* de α con respecto a Γ mediante

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{z-\alpha}, \qquad [10.83]$$

tal como se hizo en el teorema 10.2.3. Obviamente, [10.80] implica que

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ind}_{\gamma_i}(\alpha). \qquad [10.84]$$

Si cada γ_i en [10.80] se cambia por su camino opuesto (véase el apartado 10.2.1), la cadena resultante se denotará mediante $-\Gamma$. Entonces

$$\int_{-\Gamma} f(z)\,dz = -\int_\Gamma f(z)\,dz \qquad (f \in C(\Gamma^*)). \qquad [10.85]$$

En particular, $\mathrm{Ind}_{-\Gamma}(\alpha) = -\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha)$ si Γ es un ciclo y $\alpha \notin \Gamma^*$.

Finalmente, notemos que las cadenas pueden sumarse y restarse de manera obvia, sumando o restando los funcionales correspondientes: El enunciado $\Gamma = \Gamma_1 \dot{+} \Gamma_2$ significa

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz \qquad [10.86]$$

para toda $f \in C(\Gamma_1^* \cup \Gamma_2^*)$.

10.6.2. Teorema de Cauchy. *Supongamos que $f \in H(\Omega)$, donde Ω es un conjunto abierto arbitrario del plano complejo. Si Γ es un ciclo en Ω que satisface*

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0 \qquad [10.87]$$

para todo α que no esté en Ω, entonces

$$f(z) \cdot \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw \qquad [10.88]$$

para $z \in \Omega - \Gamma^*$ y

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0. \qquad [10.89]$$

Si Γ_0 y Γ_1 son ciclos en Ω tales que

$$\mathrm{Ind}_{\Gamma_0}(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\Gamma_1}(\alpha) \qquad [10.90]$$

para todo α que no esté en Ω, entonces

$$\int_{\Gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz. \qquad [10.91]$$

DEMOSTRACIÓN. La función g definida en $\Omega \times \Omega$ mediante

$$g(z, w) = \begin{cases} \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{si } w \neq z, \\ f'(z) & \text{si } w = z, \end{cases} \qquad [10.92]$$

es continua en $\Omega \times \Omega$ (lema 10.5.1). Por tanto, podemos definir

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} g(z, w)\,dw \qquad (z \in \Omega). \qquad [10.93]$$

Para $z \in \Omega - \Gamma^*$, la fórmula de Cauchy [10.88] es claramente equivalente a la afirmación de que

$$h(z) = 0. \qquad [10.94]$$

Para demostrar [10.94], demostremos en primer lugar que $h \in H(\Omega)$. Notemos que g es uniformemente continua en cada subconjunto compacto de $\Omega \times \Omega$. Si $z \in \Omega$, $z_n \in \Omega$ y $z_n \to z$, se tiene que $g(z_n, w) \to g(z, w)$ uniformemente para $w \in \Gamma^*$ (un subconjunto compacto de Ω). En consecuencia, $h(z_n) \to h(z)$. Esto demuestra que h es continua en Ω. Sea Δ un triángulo cerrado en Ω. Entonces

$$\int_{\partial\Delta} h(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left(\int_{\partial\Delta} g(z, w)\,dz\right)dw. \qquad [10.95]$$

Para cada $w \in \Omega$, $z \to g(z, w)$ es holomorfa en Ω. (La singularidad en $z = w$ es evitable.) La integral interior en el segundo miembro de [10.95] es, por tanto, 0 para toda $w \in \Gamma^*$. El teorema de Morera muestra que $h \in H(\Omega)$.

Por otro lado, sea Ω_1 el conjunto de todos los números complejos z para los que $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 0$, y definamos

$$h_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \qquad (z \in \Omega_1). \qquad [10.96]$$

Si $z \in \Omega \cap \Omega_1$, la definición de Ω_1 es tal que $h_1(z) = h(z)$. Por tanto, existe una función $\varphi \in H(\Omega \cup \Omega_1)$ cuya restricción a Ω es h y cuya restricción a Ω_1 es h_1.

Nuestra hipótesis [10.87] muestra que Ω_1 contiene al complementario de Ω. Por tanto, φ es una función entera. Ω_1 también contiene a la componente no acotada del complementario de Γ^*, puesto que ahí $\operatorname{Ind}_\Gamma(z)$ es 0. En consecuencia:

$$\lim_{|z| \to \infty} \varphi(z) = \lim_{|z| \to \infty} h_1(z) = 0. \qquad [10.97]$$

El teorema de Liouville implica ahora que $\varphi(z) = 0$ para todo z. Esto demuestra [10.94], y, por tanto, [10.88].

Para deducir [10.89] de [10.88], tomemos $a \in \Omega - \Gamma^*$ y definamos $F(z) =$

$(z-a)f(z)$. Entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{F(z)}{z-a}\,dz=F(a)\cdot \mathrm{Ind}_\Gamma(a)=0, \qquad [10.98]$$

porque $F(a)=0$.

Finalmente, [10.91] se deduce de [10.90] si [10.89] se aplica al ciclo $\Gamma=\Gamma_1-\Gamma_0$. Esto completa la demostración. ////

10.6.3. Observaciones.

a) Si γ es un camino cerrado en una región convexa Ω y si $\alpha\notin\Omega$, la aplicación del teorema 10.3.3 a $f(z)=(z-\alpha)^{-1}$ muestra que $\mathrm{Ind}_\gamma(\alpha)=0$. La hipótesis [10.87] se satisface, por tanto, por todo ciclo en Ω si Ω es convexo. Esto muestra que el teorema 10.6.2 generaliza los teoremas 10.3.3 y 10.3.4.

b) La última parte del teorema 10.6.2 dice bajo qué circunstancias la integración a lo largo de un ciclo puede cambiarse por la integración a lo largo de otro, sin cambiar el valor de la integral. Por ejemplo, sea Ω el plano en el que se eliminan tres discos cerrados D_i. Si Γ, γ_1, γ_2, γ_3 son circunferencias orientadas positivamente en Ω tales que Γ rodea $D_1\cup D_2\cup D_3$ y γ_i rodea a D_i pero no a D_j para $j\neq i$, entonces:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz=\sum_{i=1}^{3}\int_{\gamma_i} f(z)\,dz.$$

Para toda $f\in H(\Omega)$.

c) Para aplicar el teorema 10.6.2, es deseable disponer de un método razonablemente eficiente para obtener el índice de un punto con respecto a un camino cerrado. El teorema siguiente lo proporciona para todos los caminos que aparecen en la práctica. Dice, esencialmente, que el índice *aumenta* en 1 cuando el camino se cruza «de derecha a izquierda». Si recordamos que $\mathrm{Ind}_\gamma(\alpha)=0$ si α está en la componente no acotada del complementario W de γ^*, podemos entonces determinar sucesivamente $\mathrm{Ind}_\gamma(\alpha)$ en las otras componentes de W, con tal que W tenga sólo un número finito de componentes y γ no atraviese ningún arco más de una vez.

10.6.4. Teorema. *Supongamos que γ es un camino cerrado en el plano, con $[\alpha,\beta]$ como intervalo del parámetro. Supongamos $\alpha<u<v<\beta$, que a y b son números complejos, que $|b|=r>0$, y*

1) $\gamma(u)=a-b$, $\gamma(v)=a+b$.
2) $|\gamma(s)-a|<r$ *si, y sólo si,* $u<s<v$.
3) $|\gamma(s)-a|=r$ *si, y sólo si,* $s=u$ *ó* $s=v$.

Supongamos además que $D(a;r)-\gamma^*$ sea la unión de dos regiones, D_+ y D_-, denotadas de tal manera que $a+bi\in D_+$ y $a-bi\in D_-$. Entonces:

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z)=1+\mathrm{Ind}_\gamma(w)$$

si $z\in D_+$ y $w\in D_-$.

Cuando $\gamma(t)$ atraviesa $D(a;r)$ de $a-b$ a $a+b$, D_- está «a la derecha» y D_+ está «a la izquierda» del camino.

DEMOSTRACIÓN. Para simplificar la escritura, parametrizamos γ otra vez de tal manera que $u=0$ y $v=\pi$. Definamos

$$C(s)=a-be^{is} \qquad (0\leqslant s\leqslant 2\pi)$$

$$f(s)=\begin{cases} C(s) & (0\leqslant s\leqslant \pi) \\ \gamma(2\pi-s) & (\pi\leqslant s\leqslant 2\pi) \end{cases}$$

$$g(s)=\begin{cases} \gamma(s) & (0\leqslant s\leqslant \pi) \\ C(s) & (\pi\leqslant s\leqslant 2\pi) \end{cases}$$

$$h(s)=\begin{cases} \gamma(s) & (\alpha\leqslant s\leqslant 0 \text{ ó } \pi\leqslant s\leqslant \beta) \\ C(s) & (0\leqslant s\leqslant \pi). \end{cases}$$

Como $\gamma(0)=C(0)$ y $\gamma(\pi)=C(\pi)$, f, g y h son caminos cerrados.

Si $E\subset \bar{D}(a;\, r)$, $|\zeta-a|=r$ y $\zeta\notin E$, entonces E está en el disco $D(2a-\zeta;\, 2r)$ que no contiene a ζ. Aplicamos esto a $E=g^*$, $\zeta=a-bi$, para ver (de la observación 10.6.3, *a*)) que $\mathrm{Ind}_g\,(a-bi)=0$. Como $\bar{D}_-$ es conexo y D_- no intersecta g^*, se tiene que

$$\mathrm{Ind}_g\,(w)=0 \qquad \text{si } w\in D_-. \tag{10.99}$$

El mismo razonamiento muestra que

$$\mathrm{Ind}_f\,(z)=0 \qquad \text{si } z\in D_+. \tag{10.100}$$

Concluimos que

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_\gamma\,(z)&=\mathrm{Ind}_h\,(z)=\mathrm{Ind}_h\,(w)\\ &=\mathrm{Ind}_C\,(w)+\mathrm{Ind}_\gamma\,(w)=1+\mathrm{Ind}_\gamma\,(w).\end{aligned}$$

La primera de estas igualdades se deduce de [10.100], puesto que $h=\gamma\dot{+}f$. La segunda se verifica porque z y w están en $D(a;\, r)$, un conjunto conexo que no intersecta h^*. La tercera se desprende de [10.99], puesto que $h\dot{+}g=C\dot{+}\gamma$, y la cuarta es una consecuencia del teorema 10.2.4. Esto completa la demostración. ////

Volvemos ahora a una breve discusión sobre otro concepto topológico de interés en conexión con el teorema de Cauchy.

10.6.5. Homotopía. Supongamos que γ_0 y γ_1 son curvas cerradas en un espacio topológico X, ambas con $I=[0,1]$ como intervalo del parámetro. Decimos que γ_0 y γ_1 son homotópicas en X si existe una aplicación continua H del cuadrado unidad $I^2=I\times I$ en X tal que

$$H(s,0)=\gamma_0(s), \qquad H(s,1)=\gamma_1(s), \qquad H(0,t)=H(1,t) \tag{10.101}$$

para todo $s\in I$ y $t\in I$. Pongamos $\gamma_t(s)=H(s,t)$. Entonces [10.101] define una *familia uniparamétrica de curvas cerradas* γ_t *en* X, que *conecta* γ_0 y γ_1. Intuitivamente, esto significa que γ_0 puede deformarse continuamente hasta γ_1, dentro de X.

Si γ_0 es homotópica en X a una aplicación constante γ_1 (es decir, si γ_1^* consta de un solo punto), decimos que γ_0 es *homotópica a un punto*. Si X es conexo y si toda curva cerrada en X es homotópica a un punto, X se dice *simplemente conexo*.

Por ejemplo, toda región convexa Ω es simplemente conexa. Para verlo, sea γ_0 una curva cerrada en Ω, fjiemos $z_1 \in \Omega$, y definamos

$$H(s, t) = (1-t)\gamma_0(s) + tz_1 \qquad (0 \leqslant s \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant 1). \qquad [10.102]$$

El teorema 10.6.7 probará que la condición [10.90] se verifica siempre que Γ_0 y Γ_1 sean caminos cerrados homotópicos en Ω. Como caso especial de esto, notemos que *la condición* [10.87] *se verifica para todo camino cerrado* Γ *en* Ω *si* Ω *es simplemente conexo.*

10.6.6. Lema. *Si* γ_0 *y* γ_1 *son caminos cerrados con* [0, 1] *como intervalo del parámetro, si* α *es un número complejo, y si*

$$|\gamma_1(s) - \gamma_0(s)| < |\alpha - \gamma_0(s)| \qquad (0 \leqslant s \leqslant 1) \qquad [10.102]$$

entonces $\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\gamma_0}(\alpha)$.

DEMOSTRACIÓN. Notemos en primer lugar que [10.102] implica que $\alpha \notin \gamma_0^*$ y $\alpha \notin \gamma_1^*$. En consecuencia, se puede definir $\gamma = (\gamma_1 - \alpha)/(\gamma_0 - \alpha)$. Entonces:

$$\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{\gamma_1'}{\gamma_1 - \alpha} - \frac{\gamma_0'}{\gamma_0 - \alpha} \qquad [10.103]$$

y $|1-\gamma| < 1$, por [10.102]. Por tanto, $\gamma^* \subset D(1; 1)$, lo que implica que $\mathrm{Ind}_\gamma(0) = 0$. La integración de [10.103] en [0, 1] proporciona el resultado buscado.

10.6.7. Teorema. *Si* Γ_0 *y* Γ_1 *son caminos cerrados homotópicos en una región* Ω, *y si* $\alpha \notin \Omega$, *entonces*

$$\mathrm{Ind}_{\Gamma_1}(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\Gamma_0}(\alpha). \qquad [10.104]$$

DEMOSTRACIÓN. Por definición, existe una $H: I^2 \to \Omega$ continua tal que

$$H(s, 0) = \Gamma_0(s), \qquad H(s, 1) = \Gamma_1(s), \qquad H(0, t) = H(1, t). \qquad [10.104]$$

Como I^2 es compacto, también lo es $H(I^2)$. Por tanto, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$|\alpha - H(s, t)| > 2\epsilon \quad \text{si} \quad (s, t) \in I^2. \qquad [10.105]$$

Como H es uniformemente continua, existe un entero positivo n tal que

$$|H(s, t) - H(s', t')| < \epsilon \quad \text{si} \quad |s - s| + |t - t'| \leqslant 1/n. \qquad [10.106]$$

Definamos caminos cerrados poligonales $\gamma_0, \ldots, \gamma_n$ mediante

$$\gamma_k(s) = H\left(\frac{i}{n}, \frac{k}{n}\right)(ns + 1 - i) + \mathrm{H}\left(\frac{i-1}{n}, \frac{k}{n}\right)(i - ns) \qquad [10.107]$$

si $i-1 \leqslant ns \leqslant i$ y $i=1, \ldots, n$. De [10.106] y [10.107],

$$|\gamma_k(s) - H(s, k/n)| < \epsilon \quad (k=0, \ldots, n;\ 0 \leqslant s \leqslant 1). \qquad [10.108]$$

En particular, tomando $k=0$ y $k=n$,

$$|\gamma_0(s) - \Gamma_0(s)| < \epsilon, \quad |\gamma_n(s) - \Gamma_1(s)| < \epsilon. \qquad [10.109]$$

De [10.108] y [10.105],

$$|\alpha - \gamma_k(s)| > \epsilon \quad (k=0, \ldots, n;\ 0 \leqslant s \leqslant 1). \qquad [10.110]$$

Por otra parte, [10.106] y [10.107] proporcionan también

$$|\gamma_{k-1}(s) - \gamma_k(s)| < \epsilon \quad (k=1, \ldots, n;\ 0 \leqslant s \leqslant 1). \qquad [10.111]$$

Se deduce ahora de [10.109], [10.110], [10.111] y de $n+2$ aplicaciones del lema 10.6.6 que α tiene el mismo índice con respecto a cada uno de los caminos $\Gamma_0, \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, \Gamma_1$. Esto demuestra el teorema. ////

Nota: Si $\Gamma_t(s) = H(s, t)$ en la demostración anterior, cada una de las Γ_t es una curva cerrada, pero no necesariamente un camino, porque no se ha supuesto que H sea diferenciable. Los caminos γ_k fueron introducidos por esta razón. Otra forma (y quizá más satisfactoria) de evitar esta dificultad es extender la definición de índice a curvas cerradas. Esto se esboza en el ejercicio 28.

10.7. EL CALCULO DE RESIDUOS

10.7.1. Definición. Se dice que una función f es *meromorfa* en un conjunto abierto Ω si existe un conjunto $A \subset \Omega$ tal que

a) A no tiene puntos límites en Ω,
b) $f \in H(\Omega - A)$,
c) f posee un polo en cada punto de A.

Nótese que no se excluye la posibilidad de que $A = \varnothing$. Por tanto, toda $f \in H(\Omega)$ es meromorfa en Ω.

Nótese también que *a)* implica que ningún subconjunto compacto de Ω contiene infinitos puntos de A, y que A es, por tanto, a lo sumo numerable.

Si f y A son como antes, si $a \in A$, y si

$$Q(z) = \sum_{k=1}^{m} c_k (z-a)^{-k} \qquad [10.112]$$

es la parte principal de f en a, como fue definida en el teorema 10.4.4 (es decir, si $f - Q$ tiene una singularidad evitable en a), entonces el número c_1 se llama el *residuo* de f en a:

$$c_1 = \operatorname{Res}(f;\ a). \qquad [10.113]$$

Si Γ es un ciclo y $a \notin \Gamma^*$, [10.112] implica

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma Q(z)\,dz = c_1 \operatorname{Ind}_\Gamma(a) = \operatorname{Res}(Q;\,a)\operatorname{Ind}_\Gamma(a). \qquad [10.114]$$

Este caso muy especial del teorema siguiente se utilizará en su demostración.

10.7.2. El teorema de los residuos. *Supongamos que f es una función meromorfa en Ω. Sea A el conjunto de puntos de Ω en el que f tiene polos. Si Γ es un ciclo en $\Omega - A$ tal que*

$$\operatorname{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0 \quad \textit{para todo} \quad \alpha \notin \Omega, \qquad [10.115]$$

entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{a \in A} \operatorname{Res}(f;\,a)\operatorname{Ind}_\Gamma(a). \qquad [10.116]$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $B = \{a \in A : \operatorname{Ind}_\Gamma(a) \neq 0\}$. Sea W el complementario de Γ^*. Entonces $\operatorname{Ind}_\Gamma(z)$ es constante en cada componente V de W. Si V es no acotada o si V intersecta Ω^c, [10.115] implica que $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 0$ para todo $z \in V$. Como A no tiene puntos límite en Ω, concluimos que B es un conjunto finito.

La suma [10.116], aunque formalmente infinita, es en realidad finita.

Sean $a_1, \ldots, a_n$ los puntos de B, sean $Q_1, \ldots, Q_n$ las partes principales de f en $a_1, \ldots, a_n$, y hagamos $g = f - (Q_1 + \ldots + Q_n)$. (Si $B = \varnothing$, una posibilidad no excluida, entonces $g = f$.) Pongamos $\Omega_0 = \Omega - (A - B)$. Como g posee singularidades evitables en $a_1, \ldots, a_n$, el teorema 10.6.2, aplicado a la función g y al conjunto abierto Ω_0, muestra que

$$\int_\Gamma g(z)\,dz = 0. \qquad [10.117]$$

En consecuencia:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma Q_k(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(Q_k;\,a_k)\operatorname{Ind}_\Gamma(a_k),$$

y como f y Q_k tienen el mismo residuo en a_k, obtenemos [10.116]. ////

Concluimos este capítulo con dos aplicaciones típicas del teorema de los residuos. La primera se refiere a los ceros de las funciones holomorfas, y la segunda es el cálculo de cierta integral.

10.7.3. Teorema. *Supongamos que γ es un camino cerrado en una región Ω, tal que $\operatorname{Ind}_\gamma(\alpha) = 0$ para todo α que no esté en Ω. Supongamos también que $\operatorname{Ind}_\gamma(\alpha) = 0$ ó 1 para todo $\alpha \in \Omega - \gamma^*$, y sea Ω_1 el conjunto de todos los α con $\operatorname{Ind}_\gamma(\alpha) = 1$.*

Para cualquier $f \in H(\Omega)$, sea N_f el número de ceros de f en Ω_1, contados de acuerdo con sus multiplicidades.

a) *Si $f \in H(\Omega)$ y f no tiene ceros en γ^* entonces*

$$N_f = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \mathrm{Ind}_\Gamma (0) \qquad [10.118]$$

donde $\Gamma = f \circ \gamma$.

b) *Si también $g \in H(\Omega)$ y*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \quad \textit{para todo } z \in \gamma^* \qquad [10.119]$$

entonces $N_g = N_f$.

La parte *b)* se conoce habitualmente como teorema de Rouché. Dice que dos funciones holomorfas tienen el mismo número de ceros en Ω_1 si son suficientemente próximas en la frontera de Ω_1, como especifica [10.119].

DEMOSTRACIÓN. Hagamos $\varphi = f'/f$, una función meromorfa en Ω. Si $a \in \Omega$ y f tiene un cero de orden $m = m(a)$ en a, entonces $f(z) = (z-a)^m h(z)$, donde h y $1/h$ son holomorfas en algún entorno V de a. En $V - \{a\}$,

$$\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{h'(z)}{h(z)}. \qquad [10.120]$$

Por tanto,

$$\mathrm{Res}\,(\varphi;\, a) = m(a). \qquad [10.121]$$

Sea $A = \{a \in \Omega_1 : f(a) = 0\}$. Si nuestras hipótesis sobre el índice de γ se combinan con el teorema de los residuos, se obtiene

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{a \in A} \mathrm{Res}\,(\varphi;\, a) = \sum_{a \in A} m(a) = N_f.$$

Esto demuestra una mitad de [10.118]. La otra mitad se obtiene por cálculo directo:

$$\mathrm{Ind}_\Gamma (0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\, ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f'(\gamma(s))}{f(\gamma(s))}\, \gamma'(s)\, ds = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz.$$

El intervalo del parámetro de γ se ha tomado aquí como $[0, 2\pi]$.

Por otro lado, [10.119] muestra que g no tiene ningún cero en γ^*. En consecuencia [10.118] se verifica con g en lugar de f. Pongamos $\Gamma_0 = g \circ \gamma$. Entonces se deduce, de [10.118], [10.119], y del lema 10.6.6, que

$$N_g = \mathrm{Ind}_{\Gamma_0} (0) = \mathrm{Ind}_\Gamma (0) = N_f. \qquad ////$$

10.7.4. Problema. *Para t real, obtener el límite, cuando $A \to \infty$, de*

$$\int_{-A}^{A} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, e^{ixt}\, dx. \qquad [10.122]$$

SOLUCIÓN. Como $z^{-1} \cdot \operatorname{sen} z \cdot e^{itz}$ es entera, su integral sobre $[-A, A]$ es igual que sobre el camino Γ_A obtenido yendo de $-A$ a -1 a lo largo del eje real, de -1 a 1 a lo largo de la mitad inferior de la circunferencia unidad, y de 1 a A a lo largo del eje real. Esto se deduce del teorema de Cauchy. Γ_A evita el origen, y podemos, por tanto, utilizar la identidad

$$2i \operatorname{sen} z = e^{iz} - e^{-iz}$$

para ver que [10.122] es igual a $\varphi_A(t+1) - \varphi_A(t-1)$, donde

$$\frac{1}{\pi} \varphi_A(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_A} \frac{e^{isz}}{z} \, dz. \qquad [10.123]$$

Completemos Γ_A hasta formar un camino cerrado de dos maneras: Primero, con la semicircunferencia de A a $-Ai$ a $-A$; segundo, con la semicircunferencia de A a Ai a $-A$. La función e^{isz}/z tiene un único polo, en $z=0$, donde su residuo es 1. Se tiene que

$$\frac{1}{\pi} \varphi_A(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} \exp(isAe^{i\theta}) \, d\theta \qquad [10.124]$$

y

$$\frac{1}{\pi} \varphi_A(s) = 1 - \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} \exp(isAe^{i\theta}) \, d\theta. \qquad [10.125]$$

Notemos que

$$|\exp(isAe^{i\theta})| = \exp(-As \operatorname{sen} \theta). \qquad [10.126]$$

y que es < 1 y tiende a 0 cuando $A \to \infty$ si s y $\operatorname{sen} \theta$ tienen el mismo signo. El teorema de la convergencia dominada muestra entonces que la integral en [10.124] tiende a 0 si $s < 0$, y la de [10.125] tiende a 0 si $s > 0$. Por tanto:

$$\lim_{A \to \infty} \varphi_A(s) = \begin{cases} \pi & \text{si} \quad s > 0, \\ 0 & \text{si} \quad s < 0, \end{cases} \qquad [10.127]$$

y si aplicamos [10.127] a $s = t+1$ y a $s = t-1$, obtenemos

$$\lim_{A \to \infty} \int_{-A}^{A} \frac{\operatorname{sen} x}{x} e^{itx} \, dx = \begin{cases} \pi & \text{si} \quad -1 < t < 1, \\ 0 & \text{si} \quad |t| > 1 \end{cases} \qquad [10.128]$$

Como $\varphi_A(0) = \pi/2$, el límite en [10.128] es $\pi/2$ cuando $t = \pm 1$. ////

Notemos que [10.128] proporciona la transformada de Fourier de $\operatorname{sen} x/x$. Dejamos como ejercicio comprobar el resultado frente al teorema de inversión.

EJERCICIOS

1. El siguiente hecho ha sido utilizado tácitamente en este capítulo: Si A y B son subconjuntos disjuntos del plano, si A es compacto, y B es cerrado, entonces existe un $\delta > 0$ tal que $|\alpha - \beta| \geqslant \delta$ para todo $\alpha \in A$ y $\beta \in B$. Demuéstrese en un espacio métrico arbitrario en lugar del plano.

2. Al final del apartado 10.2.1 aparece una definición de longitud de un camino. ¿Concuerda con la definición dada en el ejercicio 10 del capítulo 8?

3. Supóngase que f y g son funciones enteras, y $|f(z)| \leqslant |g(z)|$ para todo z. ¿Qué conclusión se puede deducir?

4. Supóngase que f es una función entera, y que

$$|f(z)| \leqslant A + B|z|^k$$

para todo z, donde A, B y k son números positivos. Demuéstrese que f debe ser un polinomio.

5. Supóngase que $\{f_n\}$ es una sucesión uniformemente acotada de funciones holomorfas en Ω tal que $\{f_n(z)\}$ converge para todo $z \in \Omega$. Demuéstrese que la convergencia es uniforme en todo subconjunto compacto de Ω.

Sugerencia: Aplíquese el teorema de la convergencia dominada a la fórmula de Cauchy para $f_n - f_m$.

6. Existe una región Ω tal que $\exp(\Omega) = D(1;1)$. Demuéstrese que exp es uno a uno en Ω, pero que existen muchas Ω. Fíjese una, y defínase $\log z$, para $|z-1| < 1$, como el $w \in \Omega$ para el que $e^w = z$. Pruébese que $\log'(z) = 1/z$. Obténganse los coeficientes a_n en

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n$$

y obténganse, en consecuencia, los coeficientes c_n del desarrollo de

$$\log z = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-1)^n.$$

¿En qué otros discos se puede hacer esto?

7. Si $f \in H(\Omega)$, la fórmula de Cauchy para las derivadas de f,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \, d\zeta \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

es válida en ciertas condiciones para z y Γ. Enúnciense y demuéstrese la fórmula.

8. Supóngase que P y Q son polinomios, que el grado de Q supera al de P al menos por 2, y que la función racional $R = P/Q$ no tiene polos en el eje real. Demuéstrese que la integral de R sobre $(-\infty, \infty)$ es $2\pi i$ veces la suma de los residuos de R en el semiplano superior. Cámbiese la integral sobre $(-A, A)$ por una sobre una semicircunferencia conveniente, y aplíquese el teorema de los residuos. ¿Cuál es el enunciado análogo para el semiplano inferior? Utilícese este método para calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} \, dx.$$

9. Calcúlese

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{1+x^2} \, dx$$

para t real, mediante el método descrito en el ejercicio 8. Compruébese con respecto al teorema de inversión para transformadas de Fourier.

10. Sea γ la circunferencia unidad orientada positivamente. Calcúlese

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^z-e^{-z}}{z^4}\,dz.$$

11. Sea α un número complejo. $|\alpha|\neq 1$. Calcúlese

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2}$$

integrando $(z-\alpha)^{-1}(z-1/\alpha)^{-1}$ sobre la circunferencia unidad.

12. Calcúlese

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 e^{itx}\,dx \qquad \text{(para } t \text{ real).}$$

13. Calcúlese

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^n} \qquad (n=2,3,4,\ldots).$$

(Para n par, es posible utilizar el método del ejercicio 8. Sin embargo, puede tomarse un camino de integración diferente, que simplifica los cálculos y que también sirve para n impar: de 0 a R, de R a $R\exp(2\pi i/n)$ y de aquí otra vez a 0.)

Solución: $(\pi/n)/\operatorname{sen}(\pi/n)$.

14. Supóngase que Ω_1 y Ω_2 son regiones planas, que f y g son funciones complejas no constantes definidas en Ω_1 y Ω_2, respectivamente, y que $f(\Omega_1)\subset\Omega_2$. Hágase $h=g\circ f$. Si f y g son holomorfas, sabemos que h es holomorfa. Supongamos que sabemos que f y h son holomorfas. ¿Puede concluirse algo sobre g? ¿Y si sabemos que g y h son holomorfas?

15. Supongamos que Ω es una región, $\varphi\in H(\Omega)$, φ' no tiene ceros en Ω, $f\in H(\varphi(\Omega))$, $g=f\circ\varphi$, $z_0\in\Omega$, $z_0\in\Omega$ y $w_0=\varphi(z_0)$. Demuéstrese que si f tiene un cero de orden m en w_0, g también tiene un cero de orden m en z_0. ¿Cómo cambia esto si φ' tiene un cero de orden k en z_0?

16. Supongamos que μ es una medida compleja sobre un espacio de medida X, Ω es un conjunto abierto del plano, φ es una función acotada sobre $\Omega\times X$ tal que $\varphi(z,t)$ es una función medible de t, para cada $z\in\Omega$, y $\varphi(z,t)$ es holomorfa en Ω para cada $t\in X$. Definamos

$$f(z)=\int_X \varphi(z,t)\,d\mu(t)$$

para $z\in\Omega$. Demuéstrese que $f\in H(\Omega)$.

Sugerencia: Pruébese que a todo compacto $K\subset\Omega$ le corresponde una constante $M<\infty$ tal que

$$\left|\frac{\varphi(z,t)-\varphi(z_0,t)}{z-z_0}\right|<M \qquad (z \text{ y } z_0\in K,\ t\in X).$$

17. Determínense las regiones en las que las funciones siguientes están definidas y son holomorfas:

$$f(z)=\int_0^1\frac{dt}{1+tz},\qquad g(z)=\int_0^{\infty}\frac{e^{tz}}{1+t^2}\,dt,\qquad h(z)=\int_{-1}^{1}\frac{e^{tz}}{1+t^2}\,dt.$$

Sugerencia: Utilícese el ejercicio 16, o combínese el teorema de Morera con el de Fubini.

18. Supóngase que $f \in H(\Omega)$, $\bar{D}(a; r) \subset \Omega$, γ es la circunferencia orientada positivamente con centro en a y radio r, y que f no tiene ningún cero en γ^*. Para $p=0$, la integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} z^p \, dz$$

es igual al número de ceros de f en $D(a; r)$. ¿Cuál es el valor de esta integral (en términos de los ceros de f) para $p=1, 2, 3, \ldots$? ¿Cuál es la respuesta si se cambia z^p por cualquier $\varphi \in H(\Omega)$?

19. Supóngase $f \in H(U)$, $g \in H(U)$, y que ni f ni g tienen ningún cero en U. Si

$$\frac{f'}{f}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{g'}{g}\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

obténgase otra relación simple entre f y g.

20. Supóngase que Ω es una región, $f \in H(\Omega)$ para $n=1, 2, 3, \ldots$, que ninguna de las funciones f_n tiene ceros en Ω, y que $\{f_n\}$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω. Demuéstrese que o f no tiene ningún cero en Ω o $f(z)=0$ para todo $z \in \Omega$.

Si Ω' es una región que contiene a todo $f_n(\Omega)$, y si f es no constante, pruébese que $f(\Omega) \subset \Omega'$.

21. Supóngase que $f \in H(\Omega)$, que Ω contiene el disco unidad cerrado, y que $|f(z)| < 1$ si $|z| < 1$. ¿Cuántos puntos fijos debe tener f en el disco? Esto es, ¿cuántas soluciones tiene en él la ecuación $f(z)=z$?

22. Supóngase que $f \in H(\Omega)$, que Ω contiene al disco unidad cerrado, que $|f(z)| > 2$ si $|z|=1$ y $f(0)=1$. ¿Debe tener f algún cero en el disco unidad?

23. Supóngase $P_n(z)=1+z/1!+\ldots+z^n/n!$, $Q_n(z)=P_n(2)-1$, donde $n=1,-2, 3, \ldots$ ¿Qué se puede decir sobre la situación de los ceros de P_n y de Q_n para n grande? Conviene ser tan específico como se pueda.

24. Demuéstrese la siguiente forma general del teorema de Rouché: Sea Ω el interior de un conjunto compacto del plano. Supóngase que f y g son continuas en K y holomorfas en Ω, y $|f(z)-g(z)| < |f(z)|$ para todo $z \in K-\Omega$. Entonces f y g tienen el mismo número de ceros en Ω.

25. Sea A el anillo $\{z : r_1 < |z| < r_2\}$, donde r_1 y r_2 son números positivos dados.

a) Demuéstrese que la fórmula de Cauchy

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\gamma_1}+\int_{\gamma_2}\right)\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

es válida en las siguientes condiciones: $f \in H(A)$,

$$r_1+\epsilon < |z| < r_2-\epsilon,$$

y

$$\gamma_1(t)=(r_1+\epsilon)e^{-it}, \qquad \gamma_2(t)=(r_2-\epsilon)e^{it} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

b) Demuéstrese por medio de *a)* que toda $f \in H(A)$ puede descomponerse en una suma $f=f_1+f_2$, donde f_1 es holomorfa fuera de $\bar{D}(0; r_1)$ y $f_2 \in H(D(0; r_2))$; la descomposición es única si requerimos que $f_1(z) \to 0$ cuando $|z| \to \infty$.

c) Utilícese esta descomposición para asociar a cada $f \in H(A)$ su llamada «serie de Laurent»

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

que converge a f en A. Demuéstrese que existe sólo una tal serie para cada f. Pruébese que converge a f uniformemente en subconjuntos compactos de A.

d) Si $f \in H(A)$ y f está acotada en A, demuéstrese que las componentes f_1 y f_2 también están acotadas.

e) ¿Cuánto de lo anterior puede extenderse al caso $r_1=0$ (o $r_2=\infty$, o ambos)?

f) ¿Cuánto de lo anterior puede extenderse a regiones acotadas por un número finito de circunferencias (más de dos)?

26. Se pide desarrollar la función

$$\frac{1}{1-z^2}+\frac{1}{3-z}$$

en serie de la forma $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n$.

¿Cuántos desarrollos así existen? ¿En qué regiones es válido cada uno de ellos? Obténganse explícitamente los coeficientes c_n para cada uno de estos desarrollos.

27. Supongamos que Ω es una banda horizontal, determinada por las desigualdades $a < y < b$, por ejemplo. Supongamos que $f \in H(\Omega)$, y $f(z)=f(z+1)$ para todo $z \in \Omega$. Demuéstrese que f posee un desarrollo de Fourier en Ω,

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n z},$$

que converge uniformemente en $\{z : a+\epsilon \leqslant y \leqslant b-\epsilon\}$, para todo $\epsilon > 0$.

Sugerencia: La aplicación $z \to e^{2\pi i z}$ convierte a f en una función sobre un anillo.

Obténganse las fórmulas integrales que permiten hallar los coeficientes c_n a partir de f.

28. Supongamos que Γ es una curva cerrada en el plano, con $[0, 2\pi]$ como intervalo del parámetro. Tomemos $\alpha \notin \Gamma^*$. Aproximemos Γ uniformemente mediante polinomios trigonométricos Γ_n. Demuéstrese que $\mathrm{Ind}_{\Gamma_n}(\alpha)=\mathrm{Ind}_{\Gamma_m}(\alpha)$ si m y n son suficientemente grandes. Definamos este valor común como $\mathrm{Ind}_{\Gamma}(\alpha)$. Demuéstrese que el resultado no depende de la elección de $\{\Gamma_n\}$; pruébese que el lema 10.6.6 es, pues, cierto para curvas cerradas, y utilícese para dar una demostración diferente del teorema 10.6.7.

FUNCIONES ARMONICAS

11.1. LAS ECUACIONES DE CAUCHY-RIEMANN

11.1.1. Los operadores ∂ y $\bar{\partial}$. Supongamos que f es una función compleja definida en un conjunto abierto plano Ω. Consideraremos f como una transformación que aplica Ω en R^2, y supondremos que f posee diferencial en algún punto $z_0 \in \Omega$, en el sentido de la definición 8.4.1. Por simplicidad, supondremos $z_0 = f(z_0) = 0$. Nuestra hipótesis de diferenciabilidad es, pues, equivalente a la existencia de dos números complejos α y β (las derivadas parciales de f con respecto a x y a y en $z_0 = 0$) tales que

$$f(z) = \alpha x + \beta y + \eta(z) z \qquad (z = x + iy), \tag{11.1}$$

donde $\eta(z) \to 0$ cuando $z \to 0$.

Como $2x = z + \bar{z}$ y $2iy = z - \bar{z}$, [11.1] puede escribirse en la forma

$$f(z) = \frac{\alpha - i\beta}{2} z + \frac{\alpha + i\beta}{2} \bar{z} + \eta(z) z. \tag{11.2}$$

Esto sugiere la introducción de los operadores diferenciales

$$\partial = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \bar{\partial} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{11.3}$$

Con ellos, [11.2] se convierte en

$$\frac{f(z)}{z} = (\partial f)(0) + (\bar{\partial} f)(0) \cdot \frac{\bar{z}}{z} + \eta(z) \qquad (z \neq 0). \tag{11.4}$$

Para z real, $\bar{z}/z = 1$; para z imaginaria pura, $\bar{z}/z = -1$. En consecuencia $f(z)/z$ tiene límite en 0 si, y sólo si, $(\bar{\partial} f)(0) = 0$, y obtenemos la siguiente caracterización de las funciones holomorfas:

11.1.2. Teorema. *Supongamos que f es una función compleja en Ω que tiene diferencial en todo punto de Ω. Entonces $f \in H(\Omega)$ si, y sólo si, se verifica la ecuación de Cauchy-Riemann*

$$(\bar{\partial} f)(z) = 0 \tag{11.5}$$

para todo $z \in \Omega$. En ese caso tenemos

$$f'(z) = (\partial f)(z) \qquad (z \in \Omega). \tag{11.6}$$

Si $f=u+iv$, u y v reales, [11.5] se desdobla en el par de ecuaciones

$$u_x=v_y, \qquad u_y=-v_x$$

donde los subíndices indican derivación parcial respecto de la variable correspondiente. Estas son las *ecuaciones de Cauchy-Riemann,* que deben satisfacerse para las partes real e imaginaria de una función holomorfa.

11.1.3. El laplaciano. Sea f una función compleja definida en un conjunto abierto plano Ω, tal que existen f_{xx} y f_{yy} en todo punto de Ω. Se define entonces el *laplaciano* de f como

$$\Delta f=f_{xx}+f_{yy}. \qquad [11.7]$$

Si f es continua en Ω y si

$$\Delta f=0 \qquad [11.8]$$

en todo punto de Ω, se dice entonces que f es *armónica* en Ω.

Como el laplaciano de una función real es real (si existe), es claro que *una función compleja es armónica en Ω si, y sólo si, tanto su parte real como su parte imaginaria son armónicas en Ω.*

Notemos que

$$\Delta f=4\partial\bar{\partial}f \qquad [11.9]$$

con tal que $f_{xy}=f_{yx}$, y que esto ocurre para toda f que tenga derivadas de segundo orden continuas.

Si f es holomorfa, entonces $\bar{\partial}f=0$, f tiene derivadas continuas de todos los órdenes, y [11.9] muestra, por tanto, que

11.1.4. Teorema. *Las funciones holomorfas son armónicas.*

Volveremos ahora nuestra atención a una representación integral de las funciones armónicas relacionada estrechamente con la fórmula de Cauchy para funciones holomorfas. Probará, entre otras cosas, que toda función armónica real es localmente la parte real de una función holomorfa, y proporcionará información sobre el comportamiento en la frontera de funciones holomorfas en discos abiertos.

11.2. LA INTEGRAL DE POISSON

11.2.1. El núcleo de Poisson. Este es la función

$$P_r(t)=\sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|}\, e^{int} \qquad (0\leqslant r<1,\ t \text{ real}). \qquad [11.10]$$

Podemos considerar $P_r(t)$ como una función de dos variables r y t, o como una familia de funciones de t, de índice r.

Si $z=re^{i\theta}$ $(0\leqslant r<1,\ \theta$ real), un cálculo simple, hecho en el apartado 5.6.2, muestra que

$$P_r(\theta-t)=\mathrm{Re}\left[\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right]=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}. \qquad [11.11]$$

De [11.10] vemos que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)\,dt = 1 \qquad (0 \leqslant r < 1). \tag{11.12}$$

De [11.11] se deduce que $P_r(t) > 0$, $P_r(t) = P_r(-t)$, que

$$P_r(t) < P_r(\delta) \qquad (0 < \delta < |t| \leqslant \pi), \tag{11.13}$$

y que

$$\lim_{r \to 1} P_r(\delta) = 0 \qquad (0 < \delta \leqslant \pi). \tag{11.14}$$

11.2.2. Notación. De ahora en adelante, U denotará el disco unidad abierto, es decir, $U = D(0;\,1)$, y T será la circunferencia unidad, la frontera de U en el plano complejo.

Si f es una función de T y μ es una medida sobre T, será deseable a menudo escribir

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t)\,d\mu(t) \tag{11.15}$$

en lugar de $\int_T f\,d\mu$, donde α es un número real convenientemente elegido. La integración en [11.15] se entiende que se realiza sobre el intervalo semiabierto

$$[\alpha,\, \alpha + 2\pi).$$

Por supuesto, una interpretación literal de [11.15] no tiene sentido; f y μ están definidas sobre T, no sobre un intervalo del eje real. Sin embargo, si f y μ están definidas sobre T, y si definimos

$$\tilde{f}(t) = f(e^{it}), \qquad \tilde{\mu}(E) = \mu(\varphi(E)), \tag{11.16}$$

para $\alpha \leqslant t < \alpha + 2\pi$, $E \subset [\alpha, \alpha + 2\pi)$, donde $\varphi(t) = e^{it}$, entonces es cierto que

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \tilde{f}(t)\,d\tilde{\mu}(t) = \int_T f\,d\mu. \tag{11.17}$$

La notación [11.15] equivale, pues, a una identificación de $\tilde{f}$ con f y $\tilde{\mu}$ con μ y no debe provocar confusión.

La razón de preferir [11.15] a $\int_T f\,d\mu$ es simplemente que es más fácil manejar las integrales en la forma en que aparecen en dicha expresión.

Continuaremos identificando los espacios $L^p(T)$ y $C(T)$ con los espacios correspondientes de funciones de periodo 2π sobre R, como en el apartado 4.3.1.

11.2.3. La integral de Poisson. Si $f \in L^1(T)$ y

$$F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(t)\,dt, \tag{11.18}$$

la función F así definida en U se llama la *integral de Poisson* de f; a veces

abreviaremos la relación [11.18] en la forma

$$F = P[f]. \qquad [11.19]$$

La integral de Poisson $F = P[d\mu]$ de una medida de Borel compleja μ sobre T se define análogamente mediante

$$F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\, d\mu(t). \qquad [11.20]$$

Si asociamos a cada $f \in L^1(T)$ su integral indefinida $\mu(E) = \int_E f(t)\, dt$, vemos que las funciones F de la forma [11.18] forman una subclase de las definidas mediante [11.20].

Si μ es real, la fórmula [11.11] muestra que $P[d\mu]$ es la parte real de

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, d\mu(t) \qquad (z = re^{i\theta};\ z \in U). \qquad [11.21]$$

Pero [11.21] define una función holomorfa en U, por el teorema 10.1.7. En consecuencia $P[d\mu]$ es una función armónica. Como combinaciones lineales (con coeficientes constantes) de funciones armónicas son armónicas, hemos demostrado el siguiente:

11.2.4. Teorema. *Toda medida de Borel compleja μ sobre T es tal que su integral de Poisson $P[d\mu]$ es una función armónica en U. En consecuencia $P[f]$ es armónica en U para toda $f \in L^1(T)$.*

El siguiente teorema muestra que las integrales de Poisson de funciones continuas se comportan particularmente bien cerca de la frontera de U.

11.2.5. Teorema. *Si $f \in C(T)$ y si Hf se define en el disco unidad cerrado $\bar{U}$ mediante*

$$(Hf)(re^{i\theta}) = \begin{cases} f(e^{i\theta}) & \text{si } r = 1, \\ P[f](re^{i\theta}) & \text{si } 0 \leqslant r < 1, \end{cases} \qquad [11.22]$$

entonces $Hf \in C(\bar{U})$.

Demostración. Como $P_r(t) > 0$, la fórmula [11.12] muestra, para toda $g \in C(T)$, que

$$|P[g](re^{i\theta})| \leqslant \|g\|_T \qquad (0 \leqslant r < 1), \qquad [11.23]$$

así que

$$\|Hg\|_{\bar{U}} = \|g\|_T \qquad (g \in C(T)). \qquad [11.24]$$

(Como en la sección 5.6, utilizamos la notación $\|g\|_E$ para expresar el supremo de g sobre el conjunto E.) Si

$$g(e^{i\theta}) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\theta} \qquad [11.25]$$

es un polinomio trigonométrico cualquiera, se deduce de [11.10] que

$$(Hg)(re^{i\theta}) = \sum_{n=-N}^{N} c_n r^{|n|} e^{in\theta}, \qquad [11.26]$$

de modo que $Hg \in C(\bar{U})$.

Por último, existen polinomios trigonométricos g_k tales que $\|g_k - f\|_T \to 0$ cuando $k \to \infty$. (Véase el apartado 4.3.2.) De [11.24] se deduce que

$$\|Hg_k - Hf\|_{\bar{U}} = \|H(g_k - f)\|_{\bar{U}} \to 0 \qquad [11.27]$$

cuando $k \to \infty$. Esto dice que las funciones $Hg_k \in C(\bar{U})$ convergen, uniformemente en U, a Hf. Por tanto, $Hf \in C(\bar{U})$. ////

Nota: Este teorema proporciona la solución de un problema de contorno (el *problema de Dirichlet*): Se da una función continua f sobre T y se pide obtener una función armónica F en U (cuyo valor en la frontera sea f». El teorema proporciona una solución, por medio de la integral de Poisson de f, y establece más precisamente la relación entre f y F. El teorema de unicidad que corresponde a este teorema de existencia, está contenido en el resultado siguiente.

11.2.6. *Teorema.* *Supongamos que u es una función real continua en el disco unidad cerrado $\bar{U}$, y supongamos que u es armónica en U. Entonces (en U) u es la integral de Poisson de su restricción a T, y u es la parte real de la función holomorfa*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} u(e^{it})\, dt \qquad (z \in U). \qquad [11.28]$$

DEMOSTRACIÓN. El teorema 10.1.7 muestra que $f \in H(U)$. Si $u_1 = \operatorname{Re} f$, entonces [11.28] muestra que u_1 es la integral de Poisson de los valores de u en la frontera, y el teorema estará demostrado tan pronto como probemos que $u = u_1$.

Hagamos $h = u - u_1$. Entonces h es continua en $\bar{U}$ (aplicando el teorema 11.2.5 a u_1), h es armónica en U, y $h = 0$ en todos los puntos de T. Supongamos (lo que conducirá a una contradicción) que $h(z_0) > 0$ para algún $z_0 \in U$. Fijemos ϵ de modo que $0 < \epsilon < h(z_0)$, y definamos

$$g(z) = h(z) + \epsilon |z|^2 \qquad (z \in \bar{U}). \qquad [11.29]$$

Entonces $g(z_0) \geqslant h(z) > \epsilon$. Como $g \in C(\bar{U})$ y $g = \epsilon$ en los puntos de T, existe un punto $z_1 \in U$ en el que g tiene un máximo local. Esto implica que $g_{xx} \leqslant 0$ y $g_{yy} \leqslant 0$ en z_1. Pero [11.29] dice que el laplaciano de g es $4\epsilon > 0$, y tenemos una contradicción.

Entonces $u - u_1 \leqslant 0$. El mismo razonamiento muestra que $u_1 - u \leqslant 0$. Por tanto, $u = u_1$, lo que completa la demostración. ////

Nuestro próximo objetivo será el comportamiento de $P[d\mu](re^{i\theta})$, para θ fijo, cuando $r \to 1$. En otras palabras, vamos a estudiar los límites radiales (si existen) de integrales de Poisson de medidas. El lema siguiente contiene la parte de cálculo de este estudio.

11.2.7. *Supongamos que μ es una medida de Borel real sobre T, fijemos θ, pongamos*

$$J(\theta;\, s)=\{e^{it}:\, \theta-s<t<\theta+s\}, \qquad [11.30]$$

de modo que $J(\theta;\, s)$ sea el arco circular abierto de longitud $2s$ con centro en $e^{i\theta}$, y supongamos que existe un δ, $0<\delta<\pi$, y un número real A tales que

$$\mu(J(\theta;\, s))<2sA \quad \text{si } 0<s<\delta. \qquad [11.31]$$

Si $F=P[d\mu]$, estas condiciones implican que

$$F(re^{i\theta})<A+|A|P_r(\delta)+\frac{1}{2\pi}P_r(\delta)\|\mu\| \quad (0\leqslant r<1), \qquad [11.32]$$

donde $\|\mu\|=|\mu|(T)$ es la variación total de μ.

DEMOSTRACIÓN. Tenemos

$$F(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi}P_r(\theta-t)\,d\mu(t). \qquad [11.33]$$

Desdoblemos la integral en dos partes. Si $\delta\leqslant|\theta-t|\leqslant\pi$, entonces

$$P_r(\theta-t)\leqslant P_r(\delta),$$

y, por tanto, la integral sobre este recorrido no es mayor que el último término de [11.32]. La integral restante sobre $I(\delta)=(\theta-\delta,\theta+\delta)$ puede acotarse mediante una integración por partes, utilizando el teorema de Fubini. Integramos

$$P_r'(s)\,ds\,d\mu(t) \qquad [11.34]$$

(la diferenciación es con respecto a s) sobre el triángulo

$$\{(s,t):\, \theta-s<t<\theta+s,\, 0<s<\delta\} \qquad [11.35]$$

y obtenemos

$$\int_0^\delta \mu(I(s))P_r'(s)\,ds=\int_{I(\delta)}[P_r(\delta)-P_r(\theta-t)\,d\mu(t). \qquad [11.36]$$

El primer miembro de [11.36] se ha obtenido integrando en primer lugar con respecto a t; en el segundo mimebro se realizó primero la integración con respecto a s. Como $\mu(I(s))<2sA$, por hipótesis (nótese que hemos identificado μ y $\bar{\mu}$, como en la sección 11.2.2), y como $P_r'(s)<0$ en $(0,\pi)$ (esto se deduce de la desigualdad [11.13]), concluimos de [11.36] que

$$\begin{aligned}\int_{I(\delta)}P_r(\theta-t)\,d\mu(t)&=P_r(\delta)\mu(I(\delta))+\int_0^\delta \mu(I(s))[-P_r'(s)]\,ds\\ &<2A[\delta P_r(\delta)-\int_0^\delta sP_r'(s)\,ds]\\ &=2A\int_0^\delta P_r(s)\,ds\end{aligned}$$

$$= 2\pi A - 2A \int_{\delta}^{\pi} P_r(s)\, ds$$

$$\leqslant 2\pi A + 2\pi |A| P_r(\delta).$$

Esto proporciona [11.32]. ////

11.2.8. Teorema. *Supongamos que μ es una medida de Borel real sobre T, $J(\theta; s)$ es como en el lema* 11.2.7, *definamos*

$$(\bar{D}\mu)(\theta) = \limsup_{s \to 0} \frac{\mu(J(\theta; s))}{2s}, \qquad [11.37]$$

y definamos $(D\mu)(\theta)$ y $(\underline{D})(\theta)$ análogamente, con lím *y* lím inf *en lugar de* lím sup. *Pongamos*

$$F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\, d\mu(t) \qquad (0 \leqslant r < 1). \qquad [11.38]$$

Entonces

$$(\underline{D}\mu)(\theta) \leqslant \liminf_{r \to 1} F(re^{i\theta}) \leqslant \limsup_{r \to 1} F(re^{i\theta}) \leqslant (\bar{D}\mu)(\theta) \qquad [11.39]$$

para todo θ, y

$$\lim_{r \to 1} F(re^{i\theta}) = (D\mu)(\theta) \qquad [11.40]$$

existe y es finito para casi todo θ (con respecto a la medida de Lebesgue).

Nótese que $(D\mu)(\theta)$ se define aquí como la derivada *simétrica* de μ en θ, y que ésta puede existir en ciertos puntos θ en los que μ no es diferenciable en el sentido más general que fue estudiado en el capítulo 8.

DEMOSTRACIÓN. Fijemos θ, y supongamos $A > (\bar{D}\mu)(\theta)$. Entonces existe un $\delta > 0$ tal que se verifican las hipótesis del lema 11.2.7. Cuando $r \to 1$, $P_r(\delta) \to 0$, y, por tanto, la última desigualdad de [11.39] se deduce del lema 11.2.7. La primera desigualdad de [11.39] se obtiene si aplicamos la última a $-\mu$ en lugar de a μ, y [11.40] es una consecuencia del caso unidimensional del teorema 8.1.6. ////

Corolario. *Si $f \in L^1(T)$ y $F = P[f]$, entonces*

$$\lim_{r \to 1} F(re^{i\theta}) = f(e^{i\theta}) \quad \text{en c.t.p.}$$

Esto se deduce de [11.40], puesto que f es igual casi en todo punto a la derivada de su integral definida.

11.2.9. Resumen. Hasta ahora hemos considerado sólo el disco unidad $U = D(0; 1)$. Es claro que el trabajo precedente puede trasladarse a discos circulares arbitrarios, mediante un simple cambio de variables. En consecuencia resumiremos meramente algunos de los resultados.

Si u es una función real continua en la frontera del disco $D(a; R)$ y si u se define en $D(a; R)$ mediante la integral de Poisson

$$u(a+re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-t)+r^2}\,u(a+Re^{it})\,dt \qquad [11.41]$$

entonces u es continua en $\bar{D}(a; R)$ y armónica en $D(a; R)$.

Si u es armónica (y real) en un conjunto abierto Ω y si $\bar{D}(a; R)\subset\Omega$, entonces u satisface [11.41] en $D(a; R)$ y existe una función holomorfa f definida en $D(a; R)$ cuya parte real es u. Esta f está definida de manera única, salvo una constante aditiva imaginaria pura. Porque si dos funciones holomorfas en la misma región tienen la misma parte real, su diferencia debe ser una constante (un corolario del teorema de la aplicación abierta, o de las ecuaciones de Cauchy-Riemann).

Podemos resumir esto diciendo que *toda función armónica rael es localmente la parte real de una función holomorfa.*

Consecuentemente, toda función armónica tiene derivadas parciales continuas de todos los órdenes.

La integral de Poisson también proporciona información sobre sucesiones de funciones armónicas:

11.2.10. Teorema de Harnack. *Sea $\{u_n\}$ una sucesión de funciones armónicas en una región Ω.*

a) *Si $u_n\to u$ uniformemente en subconjuntos compactos de Ω, entonces u es armónica en Ω.*

b) *Si $u_1\leqslant u_2\leqslant u_3\leqslant\ldots$, entonces o $\{u_n\}$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω, o $u_n(z)\to\infty$ para todo $z\in\Omega$.*

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar *a)*, supongamos que $\bar{D}(a; R)\subset\Omega$, y cambiemos u por u_n en la integral de Poisson [11.4]. Como $u_n\to u$ uniformemente en la frontera de $\bar{D}(a; R)$, concluimos que u también satisface [11.41] en $D(a; R)$.

En la demostración de *b)*, podemos suponer que $u_1\geqslant 0$. (Si no, cambiamos u_n por u_n-u_1.) Pongamos $u=\sup u_n$, sea $A=\{z\in\Omega: u(z)<\infty\}$, y $B=\Omega-A$. Tomemos $\bar{D}(a; R)\subset\Omega$. El núcleo de Poisson satisface las desigualdades

$$\frac{R-r}{R+r}\leqslant\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-t)+r^2}\leqslant\frac{R+r}{R-r}$$

para $0\leqslant r\leqslant R$. En consecuencia

$$\frac{R-r}{R+r}\,u_n(a)\leqslant u_n(a+re^{i\theta})\leqslant\frac{R+r}{R-r}\,u_n(a).$$

Las mismas desigualdades se verifican con u en lugar de u_n. Se deduce que o $u(z)=\infty$ para todo $z\in D(a; R)$ o $u(z)<\infty$ para todo $z\in D(a; R)$.

Por consiguiente, tanto A como B son abiertos; y como Ω es conexo, tenemos que o $A=\varnothing$ (en cuyo caso no hay nada que demostrar) o $A=\Omega$. En el último caso, el teorema de convergencia monótona muestra que la fórmula de Poisson se verifica para u en todo disco de Ω. Por tanto, u es armónica en Ω. Si una sucesión de funciones continuas converge monótonamente a un límite con-

tinuo, la convergencia es uniforme en conjuntos compactos ([26], teorema 7.13). Esto completa la demostración. ////

11.3. LA PROPIEDAD DEL VALOR MEDIO

11.3.1. Definición. Decimos que una función continua u en un conjunto abierto Ω tiene la *propiedad del valor medio* si a todo $z \in \Omega$ le corresponde una sucesión $\{r_n\}$ tal que $r_n > 0$, $r_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, y

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z + r_n e^{it})\, dt \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{11.42}$$

En otras palabras, $u(z)$ es igual al valor medio de u sobre las circunferencias de radios r_n y de centro z.

Notemos que la fórmula de Poisson dice que [11.42] se verifica para toda función armónica u, y para *todo* r tal que $\bar{D}(z; r) \subset \Omega$. Por tanto, las funciones armónicas satisfacen una propiedad de valor medio mucho más fuerte que la que se ha definido. El teorema siguiente puede, por tanto, constituir una sorpresa:

11.3.2. Teorema. *Si una función continua u tiene la propiedad del valor medio en un conjunto abierto Ω, u es armónica en Ω.*

DEMOSTRACIÓN. Basta demostrarlo para u real. Fijemos $\bar{D}(a; R) \subset \Omega$. La integral de Poisson nos proporciona una función continua h en $\bar{D}(a; R)$ que es armónica en $D(a; R)$ y que coincide con u en la frontera de $D(a; R)$. Pongamos $v = u - h$, y sea $m = \sup\{v(z) : z \in \bar{D}(a; R)\}$. Supongamos $m > 0$, y sea E el conjunto de todos los $z \in \bar{D}(a; R)$ en los que $v(z) = m$. Como $v = 0$ en la frontera de $D(a; R)$, E es un subconjunto compacto de $D(a; R)$. En consecuencia existe un $z_0 \in E$ tal que

$$|z_0 - a| \geqslant |z - a|$$

para todo $z \in E$. Para *todo* r suficientemente pequeña, al menos la mitad de la circunferencia con centro en z_0 y radio r está fuera de E, de modo que los valores medios correspondientes de v son todos menos que $m = v(z_0)$. Pero v tiene la propiedad del valor medio, y llegamos a una contradicción. Por tanto, $m = 0$, por lo que $v \leqslant 0$. El mismo razonamiento puede aplicarse a $-v$. En consecuencia $v = 0$, o $u = h$ en $D(a; R)$, y como $\bar{D}(a; R)$ es un disco cerrado arbitrario en Ω, u es armónica en Ω. ////

El teorema 11.3.2 conduce a un teorema de reflexión para funciones holomorfas. Por *semiplano superior* Π^+ entendemos el conjunto de todos los $z = x + iy$ con $y > 0$; el *semiplano inferior* Π^- consiste en todos los z cuya parte imaginaria es negativa.

11.3.3. Teorema (el principio de reflexión de Schwarz). *Supongamos que L es un segmento del eje real, Ω^+ es una región de Π^+, y que todo $t \in L$ es el centro de un disco abierto D_t tal que $\Pi^+ \cap D_t$ está en Ω^+. Sea Ω^- la reflexión de Ω^+:*

$$\Omega^- = \{z : \bar{z} \in \Omega^+\}. \tag{11.43}$$

Supongamos que $f=u+iv$ es holomorfa en Ω^+, y que

$$\lim_{n\to\infty} v(z_n)=0 \qquad [11.44]$$

para toda sucesión $\{z_n\}$ en Ω^+ que converja a un punto de L.

Entonces existe una función F, holomorfa en $\Omega^+\cup L\cup\Omega^-$, tal que $F(z)=f(z)$ en Ω^+; esta F satisface la relación

$$F(\bar{z})=\overline{F(z)} \qquad (z\in\Omega^+\cup L\cup\Omega^-). \qquad [11.45]$$

El teorema afirma que f se puede extender a una función que sea holomorfa en una región simétrica con respecto al eje real, y [11.45] establece que F preserva seta simetría. Notemos que la hipótesis de continuidad [11.44] se impone meramente a la parte imaginaria de f.

DEMOSTRACIÓN. Pongamos $\Omega=\Omega^+\cup L\cup\Omega^-$. Extendemos v a Ω definiendo $v(z)=0$ para $z\in L$ y $v(z)=-v(\bar{z})$ para $z\in\Omega^-$. Es inmediato entonces el que v es continua y que v tiene la propiedad del valor medio en Ω, así que v es armónica en Ω, por el teorema 11.3.2.

En consecuencia, v es localmente la parte imaginaria de una función holomorfa. Esto significa que a cada uno de los discos D_t le corresponde una $f_t\in H(D_t)$ tal que $\operatorname{Im} f_t=v$. Cada f_t está determinada por v salvo una constante aditiva real. Si esta constante se elige de modo que $f_t(z)=f(z)$ para *algún* $z\in D_t\cap\Pi^+$, se verificará lo mismo para todo $z\in D_t\cap\Pi^+$, porque $f-f_t$ es constante en la región $D_t\cap\Pi^+$. Suponemos que las funciones f_t están ajustadas así.

El desarrollo de f_t en serie de potencias de $z-t$ tiene sólo coeficientes reales, puesto que $v=0$ en L, de modo que todas las derivadas de f_t son reales en t. Se tiene que

$$f_t(\bar{z})=\overline{f_t(z)} \qquad (z\in D_t). \qquad [11.46]$$

Por otro lado, supongamos que $D_s\cap D_t\neq\varnothing$. Entonces $f_t=f=f_s$ en $D_t\cap D_s\cap\Pi^+$; y como $D_t\cap D_s$ es conexo, el teorema 10.4.1 muestra que

$$f_t(z)=f_s(z) \qquad (z\in D_t\cap D_s). \qquad [11.47]$$

Por tanto, es consistente definir

$$F(z)=\begin{cases} f(z) & \text{para } z\in\Omega^+ \\ f_t(z) & \text{para } z\in D_t \\ \overline{f(\bar{z})} & \text{para } z\in\Omega^- \end{cases} \qquad [11.48]$$

y queda por demostrar que F es holomorfa en Ω^-. Si $D(a;r)\subset\Omega^-$, entonces $D(\bar{a};r)\subset\Omega^+$, por lo que para todo $z\in D(a;r)$ tenemos

$$f(\bar{z})=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\bar{z}-\bar{a})^n. \qquad [11.49]$$

En consecuencia,

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \bar{c}_n(z-a)^n \qquad (z\in D(a;r)). \qquad [11.50]$$

Esto completa la demostración. ////

11.4. FUNCIONES ARMONICAS POSITIVAS

11.4.1. Observación. Es claro que la integral de Poisson $P[d\mu]$ de toda medida de Borel positiva finita μ sobre la circunferencia unidad T es una función armónica positiva en el disco abierto U. Surge la cuestión de si toda función armónica positiva en U se obtiene de esta forma.

La observación siguiente conducirá a una respuesta afirmativa. Si $h=P[d\mu]$, donde μ es *cualquier* medida de Borel compleja sobre T, el teorema de Fubini muestra que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |h(re^{i\theta})|\, d\theta \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\, d\theta \right] d|\mu|(t) = \|\mu\|, \qquad [11.51]$$

donde $\|\mu\|$ es la variación total de μ sobre T. Por tanto, la primera integral de [11.51] es una función acotada de r en $[0, 1)$, una condición que deben satisfacer todas las integrales de Poisson.

Ahora bien, si h es una función armónica positiva, entonces $|h|=h$, por lo que la primera integral de [11.51] es $2\pi h(0)$, para todo $r \in [0, 1)$. Por tanto, las funciones armónicas positivas satisfacen la condición necesaria que acabamos de obtener, lo que nos lleva al teorema, más fuerte, siguiente.

11.4.2. Teorema. *La aplicación $\mu \to P[d\mu]$ es una correspondencia uno a uno lineal entre el espacio de todas las medidas de Borel complejas sobre T y el espacio de todas las funciones armónicas h en U que satisfacen la condición de crecimiento*

$$\sup_{0 \leqslant r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} |h(re^{i\theta})|\, d\theta < \infty. \qquad [11.52]$$

El conjunto de todas las medidas de Borel positivas finitas sobre T se pone así en correspondencia uno a uno con el conjunto de todas las funciones armónicas positivas en U.

Corolario. *Toda función armónica h en U que satisface* [11.52] *tiene límites radiales finitos en casi todos (con respecto a la medida de Lebesgue) los puntos de T.*

DEMOSTRACIÓN. Es claro que la aplicación $\mu \to P[d\mu]$ es lineal. La discusión del apartado 11.4.1 mostró que [11.32] se verifica para todo $P[d\mu]$.

Para demostrar que $\mu \to P[d\mu]$ es uno a uno, supongamos $P[d\mu]=0$ en U. Tenemos que probar que $\mu=0$. Tomemos $f \in C(T)$. El teorema 11.2.5 muestra que

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, d\mu(\theta) &= \lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} d\mu(\theta) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) P_r(\theta - t)\, dt \\ &= \lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t-\theta)\, d\mu(\theta) \\ &= \lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) P[d\mu](re^{it})\, dt = 0.\end{aligned}$$

Por tanto, $\int f\,d\mu=0$ para toda $f \in C(T)$, y la afirmación de unicidad del teorema 6.5.2 implica que $\mu=0$.

Volvemos ahora a la demostración de la parte más significativa del teorema: *Toda* función armónica en U que satisface [11.52] es $P[d\mu]$ para alguna medida de Borel compleja μ sobre T. La demostración se basa en la noción de «convergencia débil», que se define, para situaciones más generales, en el ejercicio 18.

Sea h una función armónica en U para la que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |h(re^{i\theta})|\,d\theta \leqslant M < \infty \qquad (0 \leqslant r < 1). \tag{11.53}$$

Para $0 < s < 1$, definamos

$$\Lambda_s f = \int_{-\pi}^{\pi} h(se^{it}) f(t)\,dt \qquad (f \in C(T)). \tag{11.54}$$

Cada Λ_s es entonces un funcional lineal sobre $C(T)$, de norma $\|\Lambda_s\| \leqslant M$. Sea $\{f_j\}$ un subconjunto denso numerable de $C(T)$. (Por ejemplo, tomemos todos los polinomios trigonométricos cuyos coeficientes están en algún subconjunto denso numerable del plano complejo.) Para cada j los números $\Lambda_s f_j$ forman un conjunto acotado. El proceso diagonal (véase [26], pág. 145) garantiza, por tanto, la existencia de una sucesión $\{s_n\}$ tal que $s_n \to 1$ y tal que

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda_{s_n} f_j \tag{11.55}$$

existe para todo f_j.

Pretendemos probar que $\{\Lambda_{s_n} f\}$ es una sucesión de Cauchy para *toda* $f \in C(T)$: Fijemos $f \in C(T)$, $\epsilon > 0$, tomemos f_j de modo que $\|f-f_j\|_\infty < \epsilon/M$, y tomemos N tan grande que

$$|\Lambda_{s_n} f_j - \Lambda_{s_m} f_j| < \epsilon \quad \text{si } n > N,\ m > N. \tag{11.56}$$

Como

$$|\Lambda_{s_n} f - \Lambda_{s_m} f| \leqslant |\Lambda_{s_n}(f-f_j)| + |\Lambda_{s_n} f_j - \Lambda_{s_m} f_j| + |\Lambda_{s_m}(f_j - f)|,$$

se deduce que $|\Lambda_{s_n} f - \Lambda_{s_m} f| < 3\epsilon$ si $n > N$ y $m > N$. Por tanto,

$$\Lambda f = \lim \Lambda_{s_n} f \tag{11.57}$$

existe para toda $f \in C(T)$, y [11.57] define un funcional lineal Λ sobre $C(T)$, con $\|\Lambda\| \leqslant M$. El teorema de representación de Riesz 6.5.2 proporciona una medida de Borel compleja μ sobre T tal que se verifica la relación

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) h(s_n e^{it})\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,d\mu(t) \tag{11.58}$$

para toda $f \in C(T)$; esto se deduce de [11.54] y [11.57].

Para cada n, $h(s_n re^{i\theta})$ es armónica en el disco $D(0;\,1/s_n)$ que contiene a $\bar{U}$. En U esta función es, por tanto, la integral de Poisson de su restricción a T.

En otras palabras,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)h(s_n e^{it})\,dt = h(s_n r e^{i\theta}) \qquad (0 \leqslant r < 1). \qquad [11.59]$$

Si hacemos $n \to \infty$ en [11.59] y utilizamos [11.58], obtenemos

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)\,d\mu(t) = h(re^{i\theta}) \qquad (0 \leqslant r < 1,\ -\pi \leqslant \theta < \pi), \qquad [11.60]$$

que es la representación deseada de h: $h = P[d\mu]$.

Si h es real, también lo es μ, por la propiedad de unicidad establecida previamente. Si $h > 0$, entonces cada Λ_s es un funcional lineal positivo sobre T, y, por tanto, también lo es Λ, y la positividad de μ se desprende del teorema 2.3.1, de representación de Riesz.

Esto completa la demostración. El corolario es una consecuencia del teorema 11.2.8. ////

Existen, por supuesto, muchas aplicaciones de este teorema. Daremos ahora una que muestra que existe una fórmula de Cauchy para funciones holomorfas acotadas en U, en la que el camino de integración se traslada a T. Otras aplicaciones aparecen en el capítulo 17.

11.4.3. Definición. Sea H^∞ el espacio de todas las funciones holomorfas acotadas en U, normado mediante

$$\|f\|_\infty = \sup_{z \in U} |f(z)|.$$

Como antes, $L^\infty(T)$ será el espacio de todas las (clases de equivalencia de) funciones esencialmente acotadas sobre T, normado mediante la norma del supremo esencial (relativa a la medida de Lebesgue). Para $g \in L^\infty(T)$, $\|g\|_\infty$ significa el supremo esencial de $|g|$.

11.4.4. Teorema. *A toda $f \in H^\infty$ le corresponde una función $f^* \in L^\infty(T)$, definida en casi todo punto mediante*

$$f^*(e^{it}) = \lim_{r \to 1} f(re^{it}). \qquad [11.61]$$

Se verifica la igualdad $\|f\|_\infty = \|f^*\|_\infty$. Para todo $z \in U$, se verifica la fórmula de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f^*(\xi)}{\xi - z}\,d\xi \qquad [11.62]$$

donde γ es la circunferencia unidad orientada positivamente: $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Las funciones $f^* \in L^\infty(T)$ que se obtienen de esta manera son precisamente aquellas que satisfacen las relaciones

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^*(e^{it})e^{-int}\,dt = 0 \qquad (n = -1, -2, -3, \ldots). \qquad [11.63]$$

El hecho de que toda $f \in H^\infty$ posea límites radiales en casi todos los puntos de T fue demostrado por Fatou en una de las primeras aplicaciones de la integral de Lebesgue al estudio de las funciones holomorfas.

DEMOSTRACIÓN. La existencia de f^* en c.t.p. se deduce del corolario del teorema 11.19, y [11.61] muestra que $\|f^*\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$.

Si $z \in U$ y $|z| < r < 1$, pongamos $\gamma_r(t) = re^{it}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$. Entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \frac{r}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(re^{it})}{re^{it} - z}\, e^{it}\, dt. \qquad [11.64]$$

Sea $\{r_n\}$ una sucesión, $r_n \to 1$, y apliquemos el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue a la última integral de [11.64]. El resultado es

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f^*(e^{it})}{1 - ze^{-it}}\, dt \qquad [11.65]$$

que es el mismo que en [11.62]. El teorema de Cauchy proporciona

$$\int_{\gamma_r} f(\xi)\xi^n\, d\xi = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \qquad [11.66]$$

Por tanto, un paso al límite, análogo al anterior, muestra que f^* satisface [11.63]. Podemos en consecuencia convertir [11.65] en una integral de Poisson: Si $z = re^{i\theta}$,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(e^{it}) \sum_{n=0}^{\infty} r^n\, e^{in(\theta - t)}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(e^{it}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}\, e^{in(\theta - t)}\, dt \qquad [11.67] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f^*(e^{it})\, dt. \end{aligned}$$

De esto concluimos que $\|f\|_\infty \leqslant \|f^*\|_\infty$, así que las dos normas son iguales.

Finalmente, si $f^* \in L^\infty(T)$ es tal que se verifica [11.63], y si definimos f mediante [11.65] para todo $z \in U$, entonces esta ecuación muestra que $f \in H(U)$, [11.63] implica que la integral de Cauchy [11.65] es igual a la integral de Poisson [11.67], de modo que f está acotada, y la representación de f como la integral de Poisson de f^* muestra que [11.61] se verifica en casi todo punto, por el corolario del teorema 11.2.8. ////

Existe un teorema de unicidad que se deduce fácilmente de la fórmula de Cauchy anterior:

11.4.5. Teorema. *Supongamos que $f \in H^\infty$, que J es un subarco de T, y que $f^*(e^{it}) = 0$ en c.t.p. de J. Entonces $f(z) = 0$ para todo $z \in U$.*

(Un enunciado considerablemente más fuerte se obtendrá más adelante, en el teorema 15.4.4. Véase también el teorema 17.5.5 y el apartado 17.5.6.)

DEMOSTRACIÓN. Sea n un entero positivo tal que la longitud de J es mayor que $2\pi/n$, sea $\eta = \exp\{2\pi i/n\}$, y pongamos

$$g(z) = \prod_{k=1}^{n} f(\eta^k z) \qquad (z \in U). \tag{11.68}$$

Como f está acotada y $f^* = 0$ en c.t.p. de J, vemos que $g^* = 0$ en c.t.p. de T, y $g \in H^\infty$. Como g es la integral de Cauchy de g^*, $g(z) = 0$ para todo $z \in U$. si $Z(f)$, el conjunto cero de f en U, es a lo sumo numerable, entonces también lo es $Z(g)$, puesto que $Z(g)$ es la unión de n conjuntos obtenidos de $Z(f)$ por rotaciones. Pero $Z(g) = U$. En consecuencia $f = 0$, por el teorema 10.4.1. ////

EJERCICIOS

1. Supongamos que u y v son funciones armónicas reales en una región plana Ω. ¿Bajo qué condiciones es armónica uv? (Nótese que la respuesta se basa fuertemente en el hecho de que la cuestión se refiere a funciones *reales.)* Demostrar que u^2 no puede ser armónica en Ω, a menos que u sea constante. ¿Para qué funciones $f \in H(\Omega)$ es $|f|^2$ armónica?

2. Supongamos que f es una función compleja en una región Ω, y que tanto f como f^2 son armónicas en Ω. Demostrar que o f o $\bar{f}$ es holomorfa en Ω.

3. Si u es una función armónica en una región Ω, ¿qué se puede decir sobre el conjunto de puntos en los que el gradiente de u es 0? (Este es el conjunto en el que $u_x = u_y = 0$.)

4. Demostrar que toda derivada parcial de toda función armónica es armónica.
   Comprobar, por cálculo directo, que $P_r(\theta - t)$ es, para cada t fijo, una función armónica de $re^{i\theta}$. Dedúzcase (sin hacer referencia a funciones holomorfas) que la integral de Poisson $P[d\mu]$ de toda medida de Borel finita μ sobre T es armónica en U, demostrando que toda derivada parcial de $P[d\mu]$ es igual a la integral de la derivada parcial correspondiente del núcleo.

5. Supongamos que $f \in H(\Omega)$ y que f no tiene ningún cero en Ω. Demostrar que $\log|f|$ es armónica en Ω, calculando su Laplaciano. ¿Existe alguna forma más fácil?

6. Supongamos que $f \in H(U)$, donde U es el disco unidad abierto, que f es uno a uno en U, $\Omega = f(U)$, y que $f(z) = \Sigma c_n z^n$. Demostrar que el área de Ω es

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} n|c_n|^2.$$

   Sugerencia: El Jacobiano de f es $|f'|^2$.

7. *a)* Si $f \in H(\Omega)$, $f(z) \neq 0$ para $z \in \Omega$, y $-\infty < \alpha < \infty$, demuéstrese que

$$\Delta(|f|^\alpha) = \alpha^2 |f|^{\alpha-2} |f'|^2,$$

   probando la fórmula

$$\partial\bar{\partial}(\psi \circ (f\bar{f})) = (\varphi \circ |f|^2) \cdot |f'|^2,$$

   en la que ψ es dos veces diferenciable en $(0, \infty)$ y

$$\varphi(t) = t\psi''(t) + \psi'(t).$$

b) Supongamos que $f \in H(\Omega)$ y Φ es una función compleja cuyo dominio es $f(\Omega)$, la cual tiene derivadas parciales de segundo orden continuas. Demuéstrese que

$$\Delta[\Phi \circ f] = [(\Delta\Phi) \circ f] \cdot |f'|^2.$$

Demuéstrese que éste se reduce al resultado de *a)* si $\Phi(w) = \Phi(|w|)$.

8. El procedimiento utilizado en la demostración del lema 11.2.7 proporciona un teorema general que legitima la aplicación del proceso de integración por partes a integrales de la forma $\int_I f\, d\mu$, donde μ es una medida de Borel sobre un segmento I de la recta real. Enúnciese un tal teorema y demuéstrese.

9. Supongamos que u es una función Lebesgue medible en una región Ω, y que u está localmente en L^1. Esto significa que la integral de $|u|$ sobre cualquier subconjunto compacto de Ω es finita. Demuéstrese que u es armónica si satisface la siguiente forma de la propiedad del valor medio:

$$u(a) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{D(a;r)} u(x, y)\, dx\, dy$$

si $\bar{D}(a; r) \subset \Omega$.

10. Supongamos que $I = [a, b]$ es un intervalo del eje real, φ es una función continua en I, y

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\varphi(t)}{t - z}\, dt \qquad (z \notin I).$$

Demuéstrese que

$$\lim_{\epsilon \to 0} [f(x + i\epsilon) - f(x - i\epsilon)] \qquad (\epsilon > 0)$$

existe para todo x real, y obténgase en términos de φ.

¿Cómo se modifica el resultado si suponemos meramente que $\varphi \in L^1$? ¿Qué sucede entonces en los puntos x en los que φ tiene límites a la derecha y a la izquierda?

11. Supongamos que $I - [a, b]$, que Ω es una región, $I \subset \Omega$, que f es continua en Ω, y que $f \in H(\Omega - I)$. Demuéstrese que en realidad $f \in H(\Omega)$.

Cámbiese I por algunos otros conjuntos para los que se pueda obtener la misma conclusión.

12. Supongamos que Ω es una región, que K es un subconjunto compacto de Ω y que $z_0 \in \Omega$. Demuéstrese que existen números positivos α y β (que dependen de z, K y Ω) tales que

$$\alpha u(z_0) \leqslant u(z) \leqslant \beta u(z_0)$$

para toda función armónica positiva u en Ω y para todo $z \in K$.

Si $\{u_n\}$ es una sucesión de funciones armónicas positivas en Ω y si $u_n(z_0) \to 0$, descríbase el comportamiento de $\{u_n\}$ en el resto de Ω. Hágase lo mismo si $u_n(z_0) \to \infty$. Demuéstrese que la hipótesis de positividad de $\{u_n\}$ es esencial para estos resultados.

13. Supongamos que u es una función armónica positiva en U y $u(0) = 1$. ¿Cómo puede ser de grande $u(\frac{1}{2})$? ¿Cómo de pequeño? Obténganse las mejores acotaciones posibles.

14. Supongamos que μ es una medida de Borel positiva sobre T, no idénticamente 0, y que μ es singular (relativa a la medida de Lebesgue). Si $u = P[d\mu]$, demuéstrese que $u(re^{i\theta}) \to \infty$ cuando $r \to 1$, al menos para un θ.

Sugerencia: Teorema 8.1.10.

15. Supongamos que u es una función armónica positiva en U, y que $u(re^{i\theta}) \to 0$ cuando $r \to 1$, para toda $e^{i\theta} \neq 1$. Demuéstrese que existe una constante c tal que

$$u(re^{i\theta}) = cP_r(\theta).$$

16. He aquí un ejemplo de función armónica en U que no es idénticamente 0 pero que *todos* sus límites radiales son 0:

$$u(z) = \operatorname{Im}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2\right].$$

Demuéstrese que esta u no es la integral de Poisson de ninguna medida sobre T y que no es la diferencia de dos funciones armónicas positivas en U.

17. Sea Φ el conjunto de todas las funciones armónicas positivas u en U tales que $u(0)=1$. Demuéstrese que Φ es un conjunto convexo y obténganse los puntos extremos de Φ. (Un punto x de un conjunto convexo Φ se llama un *punto extremo* de Φ si x no está en ningún segmento tal que sus extremos estén en Φ y que sean diferentes de x.)

Sugerencia: Si C es el conjunto convexo cuyos elementos son las medidas de Borel positivas sobre T, de variación total 1, demuéstrese que los puntos extremos de C son precisamente aquellas $\mu \in C$ cuyo soporte consta sólo de un punto de T.

18. Sea X^* el espacio dual del espacio de Banach X. Una sucesión $\{\Lambda_n\}$ en X^* se dice que *converge débilmente a* $\Lambda \in X^*$ *si* $\Lambda_n x \to \Lambda x$ cuando $n \to \infty$, para todo $x \in X$. Nótese que $\Lambda_n \to \Lambda$ débilmente si $\Lambda_n \to \Lambda$ en la norma de X^*. (Véase el ejercicio 8 del capítulo 5.) El recíproco no es necesariamente cierto. Por ejemplo, los funcionales $f \to \hat{f}(n)$ sobre $L^2(T)$ tienden a cero débilmente (por la desigualdad de Bessel), pero cada uno de esos funcionales tiene norma 1.

a) Demuéstrese que $\{\|\Lambda_n\|\}$ debe ser acotada si $\{\Lambda_n\}$ converge débilmente.

b) Supongamos que X es un espacio de Banach separable y que $\{\Lambda_n\}$ es una sucesión en X^* tal que $\{\|\Lambda_n\|\}$ está acotada. Demuéstrese que $\{\Lambda_n\}$ contiene una subsucesión débilmente convergente. (La demostración es muy análoga al caso especial del teorema 11.4.2.)

19. Si $h = P[d\mu]$ y $f \in C(T)$, demuéstrese que

$$\lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)h(re^{it})\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} f\,d\mu.$$

(Compárese este resultado con la demostración del teorema 11.4.2.)

20. Supongamos que $f \in L^p(T)$, $1 \leqslant p < \infty$, y $F = P[f]$. Demuéstrese que

$$\lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^p\,d\theta = 0.$$

(Compárese con los teoremas 9.2.2 y 9.2.7. También puede aplicarse aquí el ejercicio 17 del capítulo 3.)

21. Si $1 \leqslant p \leqslant \infty$ y $f \in L^p(R^1)$, demuéstrese que $(f * h_\lambda)(x)$ es una función armónica de $x + i\lambda$ en el semiplano superior. (h_λ se definió en el apartado 9.2.4; es el núcleo de Poisson para el semiplano.)

22. Supongamos que Ω es una región, $f_n \in H(\Omega)$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, u_n es la parte real de f_n, $\{u_n\}$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω, y $\{f_n(z)\}$ converge para al menos un $z \in \Omega$. Demuéstrese que entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω.

EL PRINCIPIO DEL MODULO MAXIMO

12.1. INTRODUCCION

El teorema del módulo máximo (10.4.7) afirma que las constantes son las únicas funciones holomorfas en una región Ω cuyo valor absoluto tiene un máximo local en cualquier punto de Ω.

He aquí otro enunciado: *Si K es la adherencia de una región acotada Ω, si f es continua en K y holomorfa en Ω, entonces*

$$|f(z)| \leqslant \|f\|_{\partial\Omega} \qquad [12.1]$$

para todo $z \in \Omega$. Si se verifica la igualdad en un punto $z \in \Omega$, entonces f es constante.

(El segundo miembro de [12.1] es el supremo de $|f|$ en la frontera $\partial\Omega$ de Ω.)

En efecto, si $|f(z)| \geqslant \|f\|_{\partial\Omega}$ en algún $z \in \Omega$, el máximo de $|f|$ en K (que es alcanzado en algún punto de K, por ser éste compacto) es alcanzado en realidad en algún punto de Ω, y, por tanto, f es constante, por el teorema 10.4.7.

La igualdad $\|f\|_\infty = \|f^*\|_\infty$, que es parte del teorema 11.4.4, implica que

$$|f(z)| \leqslant \|f^*\|_\infty \qquad (z \in U,\ f \in H^\infty(U)). \qquad [12.2]$$

Esto dice (a grandes rasgos) que $|f(z)|$ no es mayor que el supremo de los valores de f en la frontera, un enunciado análogo a [12.1]. Pero esta vez basta la acotación en U; no se necesita la continuidad en $\bar{U}$.

Este capítulo contiene generalizaciones adicionales del teorema del módulo máximo, así como algunas aplicaciones suyas bastante sorprendentes, y concluye con un teorema que prueba que la propiedad de máximo «casi» caracteriza a la clase de las funciones holomorfas.

12.2. EL LEMA DE SCHWARZ

Este es el nombre que se da habitualmente al teorema siguiente. Utilizamos la notación que fue establecida en la definición 11.4.3.

12.2.1. Teorema. *Supongamos $f \in H^\infty$, $\|f\|_\infty \leqslant 1$, y $f(0)=0$. Entonces*

$$|f(z)| \leqslant |z| \qquad (z \in U), \qquad [12.3]$$

$$|f'(0)| \leqslant 1; \qquad [12.4]$$

si se verifica la igualdad en [12.3] *para algún* $z \in U-\{0\}$, *o si se verifica la igualdad en* [12.4], *entonces* $f(z)=\lambda z$, *donde* λ *es una constante,* $|\lambda|=1$.

En lenguaje geométrico, la hipótesis es que f es una aplicación holomorfa de U en U que conserva fijo el origen; parte de la conclusión es que o f es una rotación o f traslada a cada $z \in U-\{0\}$ más cerca del origen de lo que estaba.

DEMOSTRACIÓN. Como $f(0)=0$, $f(z)/z$ tiene una singularidad evitable en $z=0$, y, por tanto, existe una $g \in H(U)$ tal que $f(z)=zg(z)$. Como $1/|z|$ está acotada cerca de la frontera de U, $g \in H^\infty$. Sus límites radiales satisfacen la relación $|g^*|=|f^*|$. Por tanto, $\|g\|_\infty \leqslant 1$. Por el teorema 11.4.4, $\|g\|_\infty \leqslant 1$, y el teorema del módulo máximo muestra ahora que $|g(z)|=1$ para algún $z \in U$ si, y sólo si, g es constante. Como $f'(0)=g(0)$, esto completa la demostración. ////

Nota: No hemos hecho uso en realidad de la existencia de límites radiales en c.t.p. de T; podríamos haber aplicado el teorema 10.4.7 a g en discos $D(0;1-\epsilon)$ y hacer $\epsilon \to 0$ para obtener el resultado final.

Pueden obtenerse muchas variantes del lema de Schwarz con ayuda de las aplicaciones siguientes de U sobre U:

12.2.2. Definición. *Para cualquier* $\alpha \in U$, *definimos*

$$\varphi_\alpha(z)=\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}.$$

12.2.3. Teorema. *Fijemos* $\alpha \in U$. *Entonces* φ_α *es una aplicación uno a uno que lleva* T *sobre* T, U *sobre* U *y* α *a* 0. *La inversa de* φ_α *es* $\varphi_{-\alpha}$. *Tenemos*

$$\varphi_\alpha'(0)=1-|\alpha|^2, \qquad \varphi_\alpha'(\alpha)=\frac{1}{1-|\alpha|^2}. \tag{12.5}$$

DEMOSTRACIÓN. φ_α es holomorfa en todo el plano, salvo por un polo en $1/\bar{\alpha}$ que está fuera de $\bar{U}$. Una sustitución directa muestra que

$$\varphi_{-\alpha}(\varphi_\alpha(z))=z. \tag{12.6}$$

Por tanto, φ_α es uno a uno, y $\varphi_{-\alpha}$ es su inversa. Como, para t real,

$$\left|\frac{e^{it}-\alpha}{1-\bar{\alpha}e^{it}}\right|=\frac{|e^{it}-\alpha|}{|e^{-it}-\bar{\alpha}|}=1 \tag{12.7}$$

(z y $\bar{z}$ tienen el mismo valor absoluto), φ_α aplica T en T; lo mismo hace $\varphi_{-\alpha}$; por tanto, $\varphi_\alpha(T)=T$. Del teorema del módulo máximo se deduce ahora que $\varphi_\alpha(U) \subset U$, y considerando de nuevo $\varphi_{-\alpha}$ se obtiene en realidad que $\varphi_\alpha(U)=U$. ////

12.2.4. Un problema extremal. Supongamos que α y β son números complejos, $|\alpha|<1$ y $|\beta|<1$. *¿Cómo de grande puede ser* $f'(\alpha)$ *si se somete a* f *a las condiciones* $f \in H^\infty$, $\|f\|_\infty \leqslant 1$, *y* $f(\alpha)=\beta$?

Para resolver este problema, pongamos

$$g = \varphi_\beta \circ f \circ \varphi_{-\alpha}. \qquad [12.8]$$

Como $\varphi_{-\alpha}$ y φ_β aplican U sobre U, vemos que $g \in H^\infty$ y que $\|g\|_\infty \leqslant 1$; además, $g(0)=0$. El paso de f a g ha reducido nuestro problema al lema de Schwarz, que proporciona $|g'(0)| \leqslant 1$. Por [12.8], la regla de la cadena proporciona

$$g'(0) = \varphi'_\beta(\beta) f'(\alpha) \varphi'_{-\alpha}(0). \qquad [12.9]$$

Si utilizamos las ecuaciones [12.5], obtenemos la desigualdad

$$|f'(\alpha)| \leqslant \frac{1-|\beta|^2}{1-|\alpha|^2}. \qquad [12.10]$$

Esto resuelve nuestro problema, puesto que puede presentarse la igualdad en [12.10]. Esto sucede si, y sólo si, $|g'(0)|=1$, en cuyo caso g es una rotación (teorema 12.2.1), de modo que

$$f(z) = \varphi_{-\beta}(\lambda \varphi_\alpha(z)) \qquad (z \in U) \qquad [12.11]$$

para alguna constante λ tal que $|\lambda|=1$.

Debe ponerse de manifiesto una característica notable de la solución. No hemos impuesto ninguna condición de regularidad (como continuidad en $\bar{U}$, por ejemplo) para el comportamiento de f cerca de la frontera de U. Sin embargo, resulta que las funciones f que maximizan $|f'(\alpha)|$ en las restricciones enunciadas, son en realidad funciones racionales. Notemos también que estas funciones extremales aplican U sobre U (no sólo en) y son uno a uno. Esta observación puede servir como motivación para la demostración del teorema de la aplicación de Riemann en el capítulo 14.

Por el momento, demostraremos meramente cómo este problema extremal puede utilizarse para caracterizar las aplicaciones holomorfas uno a uno de U sobre U.

12.2.5. Teorema. *Supongamos que $f \in H(U)$, que f es uno a uno, $f(U)=U$ y $f(\alpha)=0$. Entonces existe una constante λ, $|\lambda|=1$, tal que*

$$f(z) = \lambda \varphi_\alpha(z) \qquad (z \in U). \qquad [12.12]$$

En otras palabras, obtenemos f componiendo la aplicación φ_α con una rotación.

DEMOSTRACIÓN. Sea g la inversa de f, definida mediante $g(f(z))=z$, $z \in U$. Como f es uno a uno, f' no tiene ningún cero en U, y, por tanto, $g \in H(U)$, por el teorema 10.5.5. Por la regla de la cadena,

$$g'(0) f'(\alpha) = 1. \qquad [12.13]$$

La solución de 12.2.4, aplicada a f y a g, proporciona las desigualdades

$$|f'(\alpha)| \leqslant \frac{1}{1-|\alpha|^2}, \qquad |g'(0)| \leqslant 1-|\alpha|^2. \qquad [12.14]$$

Por [12.13], debe verificarse la igualdad en [12.14]. Como observamos en el problema precedente (con $\beta=0$), ello obliga a f a satisfacer [12.12]. ////

12.3. EL METODO DE PHRAGMEN-LINDELÖF

12.3.1. Observación. Para una región acotada Ω, vimos en la sección 12.1 que si f es continua en la adherencia de Ω y si $f \in H(\Omega)$, el teorema del módulo máximo implica que

$$\|f\|_{\Omega}=\|f\|_{\partial\Omega} \qquad [12.15]$$

Para regiones no acotadas, esto deja de ser cierto.

Para ver un ejemplo, sea

$$\Omega=\left\{z=x+iy: -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right\}; \qquad [12.16]$$

Ω es la banda abierta acotada por las rectas paralelas $y=\pm\pi/2$; su frontera $\partial\Omega$ es la unión de esas dos rectas. Pongamos

$$f(z)=\exp(\exp(z)). \qquad [12.17]$$

Para x real,

$$f\left(x\pm\frac{\pi i}{2}\right)=\exp(\pm ie^{x}) \qquad [12.18]$$

puesto que $\exp(\pi i/2)=i$, y, por tanto, $|f(z)|=1$ para $z \in \partial\Omega$. Pero $f(z)\to\infty$ muy rápidamente cuando $x\to\infty$ a lo largo del eje real positivo, que está en Ω.

«Muy» es la palabra clave en la frase anterior. Un método desarrollado por Phragmen y Lindelöf hace posible demostrar teoremas del tipo siguiente: Si $f \in H(\Omega)$ y $|f|<g$, donde $g(z)\to\infty$ «lentamente» cuando $z\to\infty$ en Ω (el significado de «lentamente» depende de Ω), entonces f está en realidad acotada en Ω, y esto implica habitualmente conclusiones adicionales sobre f, por el teorema del módulo máximo.

Más que describir el método mediante un teorema que cubriría un gran número de situaciones, mostraremos cómo funciona en dos casos. En ambos, Ω será una banda. En el primero, se supondrá que f está acotada, y el teorema mejorará la acotación; en el segundo, se impondrá una condición de crecimiento a f que excluye precisamente la función [12.17]. Con vistas a posteriores aplicaciones, Ω será una banda vertical en el teorema 12.3.2.

En primer lugar, sin embargo, mencionemos otro ejemplo que también posee este carácter general: *Supongamos que f es una función entera y que*

$$|f(z)|<1+|z|^{1/2} \qquad [12.19]$$

para todo z. Entonces f es constante.

Esto se deduce inmediatamente de las acotaciones de Cauchy 10.4.9, puesto que demuestran que $f^{(n)}(0)=0$ para $n=1, 2, 3, \ldots$

12.3.2. Teorema. *Supongamos que*

$$\Omega=\{x+iy: a<x<b\}, \qquad \bar{\Omega}=\{x+iy: a\leqslant x\leqslant b\}, \qquad [12.20]$$

que f es continua en $\bar{\Omega}$, $f \in H(\Omega)$, y supongamos que $|f(z)| < B$ para todo $z \in \Omega$ y algún $B < \infty$ fijo. Si

$$M(x) = \sup\{|f(x+iy)| : -\infty < y < \infty\} \qquad (a \leqslant x \leqslant b) \qquad [12.21]$$

entonces tenemos en realidad

$$M(x)^{b-a} \leqslant M(a)^{b-x} M(b)^{x-a} \qquad (a < x < b). \qquad [12.22]$$

Nota: La conclusión [12.22] implica que la desigualdad $|f| < B$ puede cambiarse por $|f| < \text{máx}\,(M(a), M(b))$, de modo que $|f|$ no supera en Ω al supremo de $|f|$ en la *frontera* de Ω.

Si aplicamos el teorema a bandas acotadas por rectas $x = \alpha$ y $x = \beta$, donde $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$, la conclusión puede enunciarse de la siguiente manera:

Corolario. *Bajo las hipótesis del teorema,* $\log M$ *es una función convexa en* (a, b).

DEMOSTRACIÓN. Suponemos en primer lugar que $M(a) = M(b) = 1$. En este caso tenemos que demostrar que $|f(z)| \leqslant 1$ para todo $z \in \Omega$.

Para cada $\epsilon > 0$, definimos una función auxiliar

$$h_\epsilon(z) = \frac{1}{1 + \epsilon(z-a)} \qquad (z \in \bar{\Omega}). \qquad [12.23]$$

Como $\text{Re}\,\{1 + \epsilon(z-a)\} = 1 + \epsilon(x-a) \geqslant 1$ en $\bar{\Omega}$, tenemos $|h_\epsilon| \leqslant 1$ en $\bar{\Omega}$, de modo que

$$|f(z)h_\epsilon(z)| \leqslant 1 \qquad (z \in \partial\Omega). \qquad [12.24]$$

Además, $|1 + \epsilon(z-a)| \geqslant \epsilon|y|$, así que

$$|f(z)h_\epsilon(z)| \leqslant \frac{B}{\epsilon|y|} \qquad (z = x + iy \in \bar{\Omega}). \qquad [12.25]$$

Sea R el rectángulo limitado en $\bar{\Omega}$ por las rectas $y = \pm B/\epsilon$. De [12.24] y [12.25], $|fh_\epsilon| \leqslant 1$ en ∂R, y, por tanto, $|fh_\epsilon| \leqslant 1$ en R, por el teorema del módulo máximo. Pero [12.25] muestra que $|fh_\epsilon| \leqslant 1$ en el resto de $\bar{\Omega}$. Por tanto, $|f(z)h_\epsilon(z)| \leqslant 1$ para todo $z \in \Omega$ y todo $\epsilon > 0$. Si fijamos $z \in \Omega$ y hacemos entonces $\epsilon \to 0$, obtenemos el resultado buscado $|f(z)| \leqslant 1$.

Volvemos ahora al caso general. Pongamos

$$g(z) = M(a)^{(b-z)/(b-a)}\, M(b)^{(z-a)/(b-a)}, \qquad [12.26]$$

donde, para $M > 0$ y w complejo, M^w se define mediante

$$M^w = \exp\,(w \log M), \qquad [12.27]$$

y $\log M$ es real. Entonces g es entera, no tiene ningún cero, $1/g$ está acotada en $\bar{\Omega}$,

$$|g(a+iy)| = M(a), \qquad |g(b+iy)| = M(b), \qquad [12.28]$$

y, por tanto, f/g satisface nuestras hipótesis previas. Entonces $|f/g| \leqslant 1$ en Ω, y esto proporciona [12.22]. (Véase el ejercicio 7.) ////

12.3.3. Teorema. *Supongamos*

$$\Omega = \left\{ x+iy : |y| < \frac{\pi}{2} \right\}, \qquad \bar{\Omega} = \left\{ x+iy : |y| \leqslant \frac{\pi}{2} \right\}. \qquad [12.29]$$

Supongamos que f es continua en $\bar{\Omega}$, $f \in H(\Omega)$, existen constantes $\alpha < 1$, $A < \infty$, tales que

$$|f(z)| < \exp\{A \exp(\alpha|x|)\} \qquad (z = x+iy \in \Omega), \qquad [12.30]$$

y

$$\left| f\left(x \pm \frac{\pi i}{2}\right) \right| \leqslant 1 \qquad (-\infty < x < \infty). \qquad [12.31]$$

Entonces $|f(z)| \leqslant 1$ para todo $z \in \Omega$.

Notemos que la conclusión no se obtiene si $\alpha = 1$, como se demuestra mediante la función $\exp(\exp z)$.

DEMOSTRACIÓN. Tomemos $\beta > 0$ de modo que $\alpha < \beta < 1$. Para $\epsilon > 0$, definamos

$$h_\epsilon(z) = \exp\{-\epsilon(e^{\beta z} + e^{-\beta z})\}. \qquad [12.32]$$

Para $z \in \bar{\Omega}$.

$$\operatorname{Re}[e^{\beta z} + e^{-\beta z}] = (e^{\beta x} + e^{-\beta x}) \cos \beta y \geqslant \delta(e^{\beta x} + e^{-\beta x}) \qquad [12.33]$$

donde $\delta = \cos(\beta\pi/2) > 0$, puesto que $|B| < 1$. En consecuencia,

$$|h_\epsilon(z)| \leqslant \exp\{-\epsilon\delta(e^{\beta x} + e^{-\beta x})\} < 1 \qquad (z \in \bar{\Omega}). \qquad [12.34]$$

Se deduce que $|fh_\epsilon| \leqslant 1$ en $\partial\Omega$ y que

$$|f(z)h_\epsilon(z)| \leqslant \exp\{Ae^{\alpha|x|} - \epsilon\delta(e^{\beta x} + e^{-\beta x})\} \qquad (z \in \bar{\Omega}). \qquad [12.35]$$

Fijemos $\epsilon > 0$. Como $\epsilon\delta > 0$ y $\beta > \alpha$, el exponente en [12.35] tiende a $-\infty$ cuando $x \to \pm\infty$. Por tanto, existe un x_0 de modo que el segundo miembro de [12.35] es menor que 1 para todo $x > x_0$. Puesto que $|fh_\epsilon| \leqslant 1$ en la frontera del rectángulo cuyos vértices son $\pm x_0 \pm (\pi i/2)$, el teorema del módulo máximo muestra que en realidad $|fh_\epsilon| \leqslant 1$ en este rectángulo. Por tanto, $|fh_\epsilon| \leqslant 1$ en todo punto de Ω, para todo $\epsilon > 0$. Cuando $\epsilon \to 0$, $h_\epsilon(z) \to 1$ para todo z, por lo que concluimos que $|f(z)| = 1$ para todo $z \in \Omega$. ////

12.4. UN TEOREMA DE INTERPOLACION

12.4.1. Ejemplo. El teorema de convexidad 12.3.2 puede utilizarse a veces para demostrar que ciertas transformaciones lineales son acotadas con respecto a ciertas normas en L^p. Más que discutir esto con completa generalidad, consideraremos una situación particular de este tipo.

Sea X un espacio de medida, con una medida positiva μ, y supongamos que $\{\psi_n\}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ es un conjunto ortonormal de funciones en $L^2(\mu)$; recordemos que esto significa:

$$\int_X \psi_n \bar{\psi}_m \, d\mu = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{si } m \neq n. \end{cases} \qquad [12.36]$$

Supongamos además que $\{\psi_n\}$ es una sucesión acotada en $L^\infty(\mu)$: Existe un $M < \infty$ tal que

$$|\psi_n(x)| \leqslant M \qquad (n=1, 2, 3, \ldots; \; x \in X). \qquad [12.37]$$

Entonces para cualquier $f \in L^p(\mu)$, donde $1 \leqslant p \leqslant 2$, las integrales

$$\hat{f}(n) = \int_X f \bar{\psi}_n \, d\mu \qquad (n=1, 2, 3, \ldots) \qquad [12.38]$$

existen y definen una función $\hat{f}$ en el conjunto de todos los enteros positivos.

Tenemos ahora dos teoremas muy fáciles: Para $f \in L^1(\mu)$, [12.37] proporciona

$$\|\hat{f}\|_\infty \leqslant M \|f\|_1, \qquad [12.39]$$

y para $f \in L^2(\mu)$, la desigualdad de Bessel da

$$\|\hat{f}\|_2 \leqslant \|f\|_2, \qquad [12.40]$$

donde las normas se definen como es habitual:

$$\|f\|_p = \left[\int |f|^p \, d\mu \right]^{1/p}, \qquad \|\hat{f}\|_q = [\Sigma \, |\hat{f}(n)|^q]^{1/q}, \qquad [12.41]$$

y $\|\hat{f}\|_\infty = \sup_n |\hat{f}(n)|$.

Como $(1, \infty)$ y $(2, 2)$ son pares de exponentes conjugados, se puede conjeturar que $\|\hat{f}\|_q$ es finita si $f \in L^p(\mu)$ y $1 < p < 2$, $q = p/(p-1)$. Esto es cierto y puede demostrarse por «interpolación» entre los casos triviales precedentes $p=1$ y $p=2$:

12.4.2. El teorema de Hausdorff-Young. *Bajo las hipótesis anteriores, se verifica la desigualdad*

$$\|\hat{f}\|_q \leqslant M^{(2-p)/p} \|f\|_p \qquad [12.42]$$

si $1 \leqslant p \leqslant 2$ *y si* $f \in L^p(\mu)$.

DEMOSTRACIÓN. Demostremos en primer lugar una forma reducida del teorema.

Fijemos p, $1 < p < 2$. Sea f una función compleja *simple* tal que $\|f\|_p = 1$, y sean $b_1, \ldots, b_N$ números complejos tales que $\Sigma |b_n|^p = 1$. Nuestro objetivo es la desigualdad

$$\left| \sum_{n=1}^{N} b_n \hat{f}(n) \right| \leqslant M^{(2-p)/p}. \qquad [12.43]$$

Pongamos $F = |f|^p$, y $B_n = |b_n|^p$. Entonces existe una función φ y números complejos $\beta_1, \ldots, \beta_N$ tales que

$$f = F^{1/p}\varphi, \qquad |\varphi| = 1, \qquad \int_X F \, d\mu = 1, \qquad [12.44]$$

y

$$b_n = B_n^{1/p}\beta_n, \qquad |\beta_n| = 1, \qquad \sum_{n=1}^{N} B_n = 1. \qquad [12.45]$$

Si utilizamos estas relaciones y la definición de $\hat{f}(n)$ dada en el apartado 12.4.1, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{N} b_n \hat{f}(n) = \sum_{n=1}^{N} B_n^{1/p}\beta_n \int_X F^{1/p}\varphi\bar{\psi}_n \, d\mu. \qquad [12.46]$$

Cambiemos ahora $1/p$ por z en [12.46], y definamos

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{N} B_n^z \beta_n \int_X F^z \varphi \bar{\psi}_n \, d\mu \qquad [12.47]$$

para cualquier número complejo z. Recordemos que $A^z = \exp(z \log A)$ si $A > 0$; si $A = 0$, convenimos que $A^z = 0$. Como F es simple, $F \geqslant 0$, y $B_n = 0$, vemos que Φ es una combinación lineal finita de tales exponenciales, y, por tanto, Φ es una función entera que está acotada en

$$\{z : a \leqslant \mathrm{Re}\,(z) \leqslant b\}$$

para cualesquiera a y b finitos. Tomaremos $a = \frac{1}{2}$ y $b = 1$, acotaremos Φ en los bordes de esta banda, y aplicaremos entonces el teorema 12.3.2 para acotar $\Phi(1/p)$.

Para $-\infty < y < \infty$, definamos

$$c_n(y) = \int_X F^{1/2} F^{iy} \varphi \bar{\psi}_n \, d\mu. \qquad [12.48]$$

La desigualdad de Bessel proporciona

$$\sum_{n=1}^{N} |c_n(y)|^2 \leqslant \int_X |F^{1/2} F^{iy} \varphi|^2 \, d\mu = \int_X |F| \, d\mu = 1, \qquad [12.49]$$

y entonces la desigualdad de Schwarz muestra que

$$|\Phi(\tfrac{1}{2}+iy)| = \left| \sum_{n=1}^{N} B_n^{1/2} B_n^{iy} \beta_n c_n \right| \leqslant \left\{ \sum_{n=1}^{N} B_n \cdot \sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 \right\}^{1/2} \leqslant 1. \qquad [12.50]$$

La acotación

$$|\Phi(1+iy)| \leqslant M \qquad (-\infty < y < \infty) \qquad [12.51]$$

se deduce trivialmente de [12.44], [12.45] y [12.47], puesto que $\|\psi_n\|_\infty \leqslant M$.

Concluimos ahora de [12.30], [12.31] y el teorema 12.3.2 que

$$|\Phi(x+iy)| \leqslant M^{2x-1} \qquad (\tfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1,\ -\infty < y < \infty). \qquad [12.52]$$

Con $x=1/p$ e $y=0$, se obtiene la desigualdad buscada [12.43].

La demostración se completa ahora fácilmente. Notemos en primer lugar que

$$\left\{ \sum_{n=1}^{N} |\hat{f}(n)|^q \right\}^{1/q} = \sup \left| \sum_{n=1}^{N} b_n \hat{f}(n) \right|, \qquad [12.53]$$

donde el supremo está tomado sobre todos los $\{b_1, \ldots, b_N\}$ tales que $\Sigma |b_n|^p = 1$, puesto que la norma en L^q de cualquier función sobre cualquier espacio de medida es igual a su norma como funcional lineal sobre L^p. En consecuencia [12.43] muestra que

$$\left\{ \sum_{n=1}^{N} |\hat{f}(n)|^q \right\}^{1/q} \leqslant M^{(2-p)/p} \|f\|_p \qquad [12.54]$$

para toda función compleja simple $f \in L^p(\mu)$.

Si ahora $f \in L^p(\mu)$, existen funciones simples f_j tales que $\|f_j - f\|_p \to 0$ cuando $j \to \infty$. Entonces $\hat{f}_j(n) \to \hat{f}(n)$ para todo n, porque $\psi_n \in L^q(\mu)$. Por tanto, como [12.54] se verifica para cada f_j, también se verifica para f. Como N es arbitrario, obtenemos finalmente [12.42].

12.5. UN RECIPROCO DEL TEOREMA DEL MODULO MAXIMO

Llegamos ahora al teorema a que se aludió en la introducción de este capítulo.

La letra j denotará la función identidad: $j(z)=z$.

Se denotará mediante 1 a la función que asigna el número 1 a cada $z \in \bar{U}$.

12.5.1. Teorema. *Supongamos que M es un espacio vectorial de funciones complejas continuas sobre el disco unidad cerrado $\bar{U}$, con las propiedades siguientes:*

a) $1 \in M$.

b) *Si $f \in M$, entonces también $jf \in M$.*

c) *Si $f \in M$, entonces $\|f\|_U = \|f\|_T$.*

Entonces toda $f \in M$ es holomorfa en U.

Notemos que *c)* es una forma bastante débil del principio del módulo máximo; *c)* afirma sólo que el máximo global de $|f|$ en $\bar{U}$ se alcanza en algún punto de la frontera T, pero *c)* no excluye, a priori, la existencia de máximos *locales* de $|f|$ en U.

DEMOSTRACIÓN. Por *a)* y *b)*, M contiene a todos los polinomios. Junto con *c)*, ello muestra que M satisface las hipótesis del teorema 5.6.3. Por tanto, toda $f \in M$ es armónica en U. Utilizaremos *b)* para demostrar que toda $f \in M$ satisface en realidad las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Sean ∂ y $\bar{\partial}$ los operadores diferenciales introducidos en el apartado 11.1.1. La regla del producto para diferenciación proporciona

$$(\partial\bar{\partial})(fg) = f \cdot (\partial\bar{\partial}g) + (\partial f) \cdot (\bar{\partial}g) + (\bar{\partial}f) \cdot (\partial g) + (\partial\bar{\partial}f) \cdot g.$$

Fijemos $f \in M$, y tomemos $g = j$. Entonces $fj \in M$. Por tanto, f y fj son armónicas, por lo que $\partial\bar{\partial}f = 0$ y $(\partial\bar{\partial})(fj) = 0$. Además, $\bar{\partial}j = 0$ y $\partial j = 1$. La identidad anterior se reduce, en consecuencia, a $\bar{\partial}f = 0$. Por tanto, $f \in H(U)$. ////

Este resultado se utilizará en la demostración siguiente.

12.5.2. Teorema de Radó. *Supongamos que $f \in C(\bar{U})$, que Ω es el conjunto de todos los $z \in U$ en que $f(z) \neq 0$, y f es holomorfa en Ω. Entonces f es holomorfa en U.*

En particular, el teorema afirma que $U - \Omega$ es a lo sumo numerable, a menos que $\Omega = \emptyset$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos $\Omega \neq \emptyset$. Demostraremos en primer lugar que Ω es denso en U. Si no, existen $\alpha \in \Omega$ y $\beta \in U - \bar{\Omega}$ tales que $2|\beta - \alpha| < 1 - |\beta|$. Tomemos n de modo que $2^n|f(\alpha)| > \|f\|_T$. Definamos $h(z) = (z - \beta)^{-n} f(z)$, para $z \in \bar{\Omega}$. Si $z \in U \cap \partial\Omega$, entonces $f(z) = 0$, por lo que $h(z) = 0$. Si $z \in T \cap \partial\Omega$, entonces

$$|h(z)| \leqslant (1 - |\beta|)^{-n} \|f\|_T < |\alpha - \beta|^{-n} |f(\alpha)| = |h(\alpha)|.$$

lo que contradice el teorema del módulo máximo.

Por tanto, Ω es denso en U.

Por otro lado, sea M el espacio vectorial de todas las $g \in C(\bar{U})$ que sean holomorfas en Ω. Fijemos $g \in M$. Para $n = 1, 2, 3, \ldots$, $fg^n = 0$ en $U \cap \partial\Omega$. El teorema del módulo máximo implica en consecuencia, para todo $\alpha \in \Omega$, que

$$|f(\alpha)||g(\alpha)|^n \leqslant \|fg^n\|_{\partial\Omega} = \|fg^n\|_T \leqslant \|f\|_T \|g\|_T^n.$$

Si tomamos la raíz n-ésima y hacemos entonces $n \to \infty$, vemos que $|g(\alpha)| \leqslant \|g\|_T$, para todo $\alpha \in \Omega$. Como Ω es denso en U, $\|g\|_U = \|g\|_T$.

Se tiene, pues, que M satisface las hipótesis del teorema 12.5.1. Como $f \in M$, f es holomorfa en U. ////

EJERCICIOS

1. Dése una demostración del teorema 12.2.1 que no requiera el conocimiento de los valores de f en la frontera.

2. Supongamos $f \in H(\Pi^+)$, donde Π^+ es el semiplano superior, y $|f| \leqslant 1$. ¿Cómo de grande puede ser $|f'(i)|$? Obténganse las funciones extremales. (Compárese con la discusión en el apartado 12.2.4.)

3. Supongamos $f \in H(\Omega)$. ¿Bajo qué condiciones puede tener $|f|$ un *mínimo* local en Ω?

4. *a)* Supongamos que Ω es una región, D un disco, $\bar{D} \subset \Omega$, $f \in H(\Omega)$, f no constante, y $|f|$ constante en la frontera de D. Demuéstrese que f tiene al menos un cero en D.

   b) Obténganse todas las funciones enteras f tales que $|f(z)|=1$ si $|z|=1$.

5. Supongamos que Ω es una región acotada, $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones continuas en $\bar{\Omega}$ que son holomorfas en Ω, y $\{f_n\}$ converge uniformemente en la frontera de Ω. Demuéstrese que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $\bar{\Omega}$.

6. Supongamos que $f \in H(\Omega)$, que Γ es un ciclo en Ω tal que $\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha)=0$ para todo $\alpha \notin \Omega$, $|f(\zeta)| \leqslant 1$ para todo $\zeta \in \Gamma^*$, y que $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) \neq 0$. Demuéstrese que $|f(z)| \leqslant 1$.

7. En la demostración del teorema 12.3.2 se supuso tácitamente que $M(a) > 0$ y $M(b) > 0$. Demuéstrese que el teorema es cierto si $M(a)=0$, y que entonces $f(z)=0$ para todo $z \in \Omega$.

8. Si $0 < R_1 < R_2 < \infty$, sea $A(R_1, R_2)$ el anillo

$$\{z : R_1 < |z| < R_2\}.$$

Existe una banda vertical tal que la función exponencial la aplica sobre $A(R_1, R_2)$.

Utilícese este hecho para demostrar el *teorema de los tres círculos* de Hadamard: Si $f \in H(A(R_1, R_2))$, si

$$M(r) = \max_\theta |f(re^{i\theta})| \qquad (R_1 < r < R_2),$$

y si $R_1 < a < r < b < R_2$, entonces

$$\log M(r) \leqslant \frac{\log (b/r)}{\log (b/a)} \log M(a) + \frac{\log (r/a)}{\log (b/a)} \log M(b).$$

[En otras palabras, $\log M(r)$ es una función convexa de $\log r$.] ¿Para qué f se verifica la igualdad en esa desigualdad?

9. Sea Π el semiplano derecho abierto ($z \in \Pi$ si, y sólo si, $\mathrm{Re}\, z > 0$). Supongamos que f es continua en la adherencia de Π ($\mathrm{Re}\, z \geqslant 0$), $f \in H(\Pi)$, y que existen constantes $A < \infty$ y $\alpha < 1$ tales que

$$|f(z)| < A \exp (|z|^\alpha)$$

para todo $z \in \Pi$. Además, $|f(iy)| \leqslant 1$ para todo y real. Demuéstrese que $|f(z)| \leqslant 1$ en Π.

Demuéstrese que la conclusión es falsa para $\alpha=1$.

¿Cómo ha de modificarse el resultado si se cambia Π por una región acotada por dos rayos que pasan por el origen, y que forman un ángulo distinto de π?

10. Sea Π el semiplano derecho abierto. Supongamos que $f \in H(\Pi)$, que $|f(z)| < 1$ para todo $z \in \Pi$, y que existe α, $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$, tal que

$$\frac{\log |f(re^{i\alpha})|}{r} \to -\infty \quad \text{cuando} \quad r \to \infty.$$

Demuéstrese que $f=0$.

Sugerencia: Hacer $g_n(z)=f(z)e^{nz}$, $n=1, 2, 3, \ldots$ Aplíquese el ejercicio 9 a las dos regiones angulares definidas mediante $-\pi/2 < \theta < \alpha$, $\alpha < \theta < \pi/2$. Concluyase que cada g_n está acotada en Π, y, por tanto, que $|g_n| < 1$ en Π, para todo n.

11. Supongamos que Γ es la frontera de una región no acotada Ω, $f \in H(\Omega)$, f es continua en $\Omega \cup \Gamma$, y existen constantes $B < \infty$ y $M < \infty$ tales que $|f| \leqslant M$ en Γ y $|f| \leqslant B$ en Ω. Demuéstrese que entonces se tiene en realidad que $|f| \leqslant M$ en Ω.

Sugerencia: Demuéstrese que no significa una pérdida de generalidad el suponer que $U \cap \Omega = \varnothing$. Fíjese $z_0 \in \Omega$, y para un entero grande n, y un disco grande V con centro en 0, aplíquese el teorema del módulo máximo a la función $f^{(n)}(z)/z$ en la componente de $V \cap \Omega$ que contiene a z_0.

12. Sea f una función entera. Si existe una aplicación continua γ de $[0, 1)$ en el plano complejo tal que $\gamma(t) \to \infty$ y $f(\gamma(t)) \to \alpha$ cuando $t \to 1$, decimos que α es un *valor asintótico* de f. [En el plano complejo, «$\gamma(t) \to \infty$ cuando $t \to 1$» significa que a cada $R < \infty$ le corresponde un $t_R < 1$ tal que $|\gamma(t)| > R$ si $t_R < t < 1$.] Demuéstrese que toda función entera no constante tiene a ∞ como valor asintótico.

Sugerencia: Sea $E_n = \{z : |f(z)| > n\}$. Cada componente de E_n es no acotada (demuéstrese) y contiene una componente de E_{n+1}, por el ejercicio 11.

13. Demuéstrese que exp tiene exactamente dos valores asintóticos: 0 y ∞. ¿Qué ocurre con sen y cos? *Nota:* sen z y cos z están definidos, para todo z complejo, mediante

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

14. Si f es entera y α no está en el recorrido de f, demuéstrese que α es un valor asintótico de f a menos que f sea constante.

15. Supongamos que $f \in H(U)$. Demuéstrese que existe una sucesión $\{z_n\}$ en U tal que $|z_n| \to 1$ y que $\{f(z_n)\}$ está acotada.

16. Supongamos que Ω es una región acotada, $f \in H(\Omega)$, y

$$\limsup_{n \to \infty} |f(z_n)| \leqslant M$$

para toda sucesión $\{z_n\}$ en Ω que converja a un punto frontera de Ω. Demuéstrese que $|f(z)| \leqslant M$ para todo $z \in \Omega$.

APROXIMACION POR FUNCIONES RACIONALES

13.1. PREPARACION

13.1.1. La esfera de Riemann. Es a menudo conveniente en el estudio de las funciones holomorfas el compactificar el plano complejo añadiendo un nuevo punto llamado ∞. El conjunto resultante S^2 (la *esfera de Riemann,* la unión de R^2 y $\{\infty\}$) se dota de una topología de la siguiente manera. Para cualquier $r > 0$, sea $D'(\infty; r)$ el conjunto de todos los números complejos z tales que $|z| > r$, pongamos $D(\infty, r) = D'(\infty; r) \cup \{\infty\}$, y diremos que un subconjunto de S^2 es abierto si, y sólo si, es la unión de discos $D(a; r)$, donde los a son puntos arbitrarios de S^2 y los r son números positivos arbitrarios. En $S^2 - \{\infty\}$, esto proporciona, por supuesto, la topología ordinaria del plano. Es fácil ver que S^2 es homeomorfa a una esfera (y de ahí la denominación). De hecho, puede mostrarse explícitamente un homeomorfismo φ de S^2 sobre la esfera unidad en R^3: Pongamos $\varphi(\infty) = (0, 0, 1)$, y pongamos

$$\varphi(re^{i\theta}) = \left(\frac{2r\cos\theta}{r^2+1}, \frac{2r\,\mathrm{sen}\,\theta}{r^2+1}, \frac{r^2-1}{r^2+1} \right) \qquad [13.1]$$

para todo número complejo $re^{i\theta}$. Dejamos al lector la construcción de la representación geométrica que acompaña a [13.1].

Si f es holomorfa en $D'(\infty; r)$, decimos que f posee una singularidad aislada en ∞. La naturaleza de esta singularidad es la misma que la que la función $\tilde{f}$, definida en $D'(0; 1/r)$ mediante $\tilde{f}(z) = f(1/z)$, posee en 0.

Por tanto, si f está acotada en $D'(\infty; r)$, entonces existe $\lim_{z\to\infty} f(z)$ y es un número complejo (como vemos si aplicamos el teorema 10.4.3 a $\tilde{f}$), definimos $f(\infty)$ como este límite, y obtenemos, por tanto, una función en $D(\infty; r)$ que llamaremos holomorfa; notemos que ésta se ha definido en términos del comportamiento de $\tilde{f}$ cerca de 0, y no en términos de la diferenciabilidad de f en ∞.

Si $\tilde{f}$ tiene un polo de orden m en 0, se dice que f tiene un polo de orden m en ∞; la parte principal de f en ∞ es entonces un polinomio ordinario de grado m (compárese con el teorema 10.4.4), y si restamos este polinomio de f, obtenemos una función con una singularidad evitable en ∞.

Finalmente, si $\tilde{f}$ tiene una singularidad esencial en 0, se dice que f tiene una singularidad esencial en ∞. Por ejemplo, toda función entera que no sea un polinomio tiene una singularidad esencial en ∞.

Más adelante, en este capítulo, encontraremos la condición de que «$S^2 - \Omega$ sea conexo», donde Ω es un conjunto abierto en el plano. Notemos que esta condición no es equivalente a la condición de que «el complemento de Ω relativo al plano sea conexo». Por ejemplo, si Ω consiste en todos los com-

plejos $z=x+iy$ con $0<y<1$, el complementario de Ω relativo al plano tiene dos componentes, pero $S^2-\Omega$ es conexo.

13.1.2. Funciones racionales. Una función racional f es, por definición, un cociente de dos polinomios P y Q: $f=P/Q$. Se deduce del teorema 10.4.8 que todo polinomio no constante es un producto de factores de grado 1. Podemos suponer que P y Q no tienen en común ninguno de tales factores. Entonces f posee un polo en cada cero de Q (el polo de f tiene el mismo orden que el cero de Q). Si restamos las correspondientes partes principales, obtenemos una función racional cuya única singularidad está en ∞ y que es, por tanto, un polinomio.

Toda función racional tiene, pues, una representación de la forma

$$f(z)=A_0(z)+\sum_{j=1}^{k} A_j((z-a_j)^{-1}) \qquad [13.2]$$

donde $A_0, A_1, \ldots, A_k$ son polinomios $A_1, \ldots, A_k$ no tienen término constante, y $a_1, \ldots, a_k$ son los distintos ceros de Q; [13.2] se llama la *descomposición en fracciones simples* de f.

Volvemos ahora a algunas consideraciones topológicas. Sabemos que todo conjunto abierto del plano es una unión numerable de conjuntos compactos (discos cerrados, por ejemplo). Sin embargo, será conveniente disponer de algunas propiedades adicionales que poseen estos conjuntos compactos:

13.1.3. Teorema. *Todo conjunto abierto Ω en el plano es la unión de una sucesión $\{K_n\}$, $n=1, 2, 3, \ldots$, de conjuntos compactos tales que*

a) *K_n está en el interior de K_{n+1}, para $n=1, 2, 3, \ldots$*
b) *Todo subconjunto compacto de Ω está en algún K_n.*
c) *Toda componente de S^2-K_n contiene una componente de $S^2-\Omega$, para $n=1, 2, 3, \ldots$*

La propiedad *c)* indica, intuitivamente hablando, que K_n no tiene agujeros, excepto aquellos que corresponden a los agujeros de Ω. Notemos que no se ha supuesto que Ω sea conexo. El *interior* de un conjunto E es, por definición, el subconjunto abierto más grande de E.

DEMOSTRACIÓN. Para $n=1, 2, 3, \ldots$, pongamos

$$V_n=D(\infty;\, n)\cup\bigcup_{a\notin\Omega} D\left(a;\, \frac{1}{n}\right) \qquad [13.3]$$

y $K_n=S^2-V_n$. Por supuesto, $a\neq\infty$ en [13.3]. Entonces K_n es un subconjunto cerrado y acotado (en consecuencia, compacto) de Ω, y $\Omega=\cup K_n$. Si $z\in K_n$ y $r=n^{-1}-(n+1)^{-1}$, se comprueba fácilmente que $D(z;\, r)\subset K_{n+1}$. Esto proporciona *a)*. Por tanto, Ω es la unión de los interiores W_n de K_n. Si K es un subconjunto compacto de Ω, entonces $K\subset W_1\cup\ldots\cup W_N$ para algún N, y, por tanto, $K\subset K_N$.

Finalmente, cada uno de los discos en [13.3] intersecta $S^2-\Omega$; cada disco es conexo; en consecuencia, cada componente de V_n intersecta $S^2-\Omega$; como $V_n\supset S^2-\Omega$, ninguna componente de $S^2-\Omega$ puede tener intersección no vacía con dos componentes de V_n. Esto proporciona *c)*. ////

13.1.4. Conjuntos de intervalos orientados. Sea Φ una colección finita de intervalos orientados en el plano. Para cada punto p, sea $m_I(p)[m_E(p)]$ el número de elementos de Φ cuyo punto inicial [punto final] es p. Si $m_I(p)=m_E(p)$ para todo p, diremos que Φ es *equilibrada.*

Si Φ es equilibrada (y no vacía), puede llevarse a cabo la construcción siguiente.

Tomemos $\gamma_1=[a_0, a_1] \in \Phi$. Supongamos $k \geqslant 1$, y supongamos que se han escogido los distintos elementos $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ de Φ de tal manera que $\gamma_i=[a_{i-1}, a_i]$ para $1 \leqslant i \leqslant k$. Si $a_k=a_0$ paramos. Si $a_k \neq a_0$, y precisamente r de los intervalos $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ tienen a_k como punto final, entonces sólo $r-1$ de ellos tienen a_k como punto inicial; como Φ es equilibrada, Φ contiene al menos otro intervalo, por ejemplo γ_{k+1}, cuyo punto inicial es a_k. Como Φ es finita, tenemos que volver a a_0 eventualmente, por ejemplo, en el paso n-ésimo.

Juntemos $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ (en este orden) para formar un camino cerrado.

Los elementos restantes de Φ forman también una colección equilibrada a la que se le puede aplicar la construcción anterior. Se deduce que los elementos de Φ pueden numerarse de tal manera que formen un número finito de caminos cerrados. La suma de esos caminos es un ciclo. Se llega, pues, a la siguiente conclusión.

Si $\Phi=\{\gamma_1, \ldots, \gamma_N\}$ es una colección equilibrada de intervalos orientados, y si

$$\Gamma=\gamma_1 \dot{+} \ldots \dot{+} \gamma_N$$

entonces Γ es un ciclo.

13.1.5. Teorema. *Si K es un subconjunto compacto de un conjunto abierto plano Ω ($\neq \emptyset$), existe un ciclo Γ en $\Omega-K$ tal que se verifica la fórmula de Cauchy*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta \qquad [13.4]$$

para toda $f \in H(\Omega)$ y para todo $z \in K$.

DEMOSTRACIÓN. Como K es compacto y Ω es abierto, existe un $\eta > 0$ tal que la distancia de cualquier punto de K a cualquier punto que esté fuera de Ω es al menos 2η. Construyamos una red de rectas horizontales y verticales en el plano, tales que la distancia entre dos cualesquiera rectas horizontales adyacentes sea η, y lo mismo para las rectas verticales. Sean $Q_1, \ldots, Q_m$ los cuadrados (2-celdas cerradas) de lado η que están formados por esta red y que intersectan K. Entonces $Q_r \subset \Omega$ para $r=1, \ldots, m$.

Si a_r es el centro de Q_r y a_r+b es uno de sus vértices, sea γ_{rk} el intervalo orientado

$$\gamma_{rk}=[a_r+i^k b,\ a_r+i^{k+1}b] \qquad [13.5]$$

y definamos

$$\partial Q_r=\gamma_{r1} \dot{+} \gamma_{r2} \dot{+} \gamma_{r3} \dot{+} \gamma_{r4} \qquad (r=1, \ldots, m). \qquad [13.6]$$

Es entonces fácil de comprobar (por ejemplo, como caso especial del teorema 10.6.4, o por medio de los teoremas 10.2.4 y 10.6.7) que

$$\mathrm{Ind}_{\partial Q_r}(\alpha)=\begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \text{ está en el interior de } Q_r, \\ 0 & \text{si } \alpha \text{ no está en } Q_r. \end{cases} \qquad [13.7]$$

Sea Σ la colección de todos los $\gamma_{rk}(1 \leqslant r \leqslant m,\ 1 \leqslant k \leqslant 4)$. Es claro que Σ es equilibrada. Quitemos aquellos elementos de Σ cuyos opuestos (véase apartado 10.2.1) también pertenezcan a Σ. Sea Φ la colección de los restantes elementos de Σ. Entonces Φ es equilibrada. Sea Γ el ciclo construido a partir de Φ, como en el apartado 13.1.4.

Si un lado E de algún Q_r intersecta K, entonces los dos cuadrados en cuyas fronteras está E intersectan K. En consecuencia Σ contiene dos intervalos orientados que son opuestos uno del otro y cuyo recorrido es E. Estos intervalos no aparecen en Φ. Por tanto, Γ es un ciclo en $\Omega - E$.

La construcción de Φ a partir de Σ muestra también que

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = \sum_{r=1}^{m} \mathrm{Ind}_{\partial Q_r}(\alpha) \qquad [13.8]$$

si α no está en la frontera de ningún Q_r. Por tanto, [13.7] implica

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \alpha \text{ está en el interior de algún } Q_r, \\ 0 & \text{si} \quad \alpha \text{ no está en ningún } Q_r. \end{cases} \qquad [13.9]$$

Si $z \in K$, entonces $z \notin \Gamma^*$, y z es un punto límite del interior de algún Q_r. Como el primer miembro de [13.9] es constante en cada componente del complementario de Γ^*, [13.9] proporciona

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad z \in K \\ 0 & \text{si} \quad z \notin \Omega \end{cases} \qquad [13.10]$$

Se deduce [13.4], pues, del teorema de Cauchy 10.6.2. ////

13.2. EL TEOREMA DE RUNGE

El principal objetivo en esta sección es el teorema 13.2.4. Comenzamos con una versión ligeramente diferente en la que se hace énfasis n la aproximación uniforme en un conjunto compacto.

13.2.1. *Supongamos que K es un conjunto compacto en el plano y $\{\alpha_j\}$ es un conjunto que contiene un punto en cada componente de $S^2 - K$. Si Ω es abierto, $\Omega \supset K$, $f \in H(\Omega)$ y $\epsilon > 0$, existe una función racional R, todos cuyos polos están en el conjunto fijado $\{\alpha_j\}$, tal que*

$$|f(z) - R(z)| < \epsilon \qquad [13.11]$$

para todo $z \in K$.

Notemos que $S^2 - K$ tiene a lo sumo un número de componentes numerable. Notemos también que el punto asignado previamente en la componente no acotada de $S^2 - K$ puede muy bien ser ∞; de hecho, ésta resulta ser la elección más interesante.

DEMOSTRACIÓN. Consideramos el espacio de Banach $C(K)$ cuyos elementos son las funciones complejas continuas definidas sobre K, con la norma del

supremo. Sea M el subespacio de $C(K)$ que consiste en todas las restricciones a K de aquellas funciones racionales que tienen todos sus polos en $\{\alpha_j\}$. El teorema afirma que f está en la adherencia de M. Por el teorema 5.5.4 (una consecuencia del teorema de Hahn-Banach), esto es equivalente a decir que todo funcional lineal acotado sobre $C(K)$ que se anula en M también se anula en f, y en consecuencia el teorema de representación de Riesz (teorema 6.5.2) muestra que debemos demostrar la siguiente afirmación:

Si μ es una medida de Borel compleja sobre K tal que

$$\int_K R\, d\mu = 0 \qquad [13.12]$$

para toda función racional R con polos sólo en el conjunto $\{\alpha_j\}$, y si $f \in H(\Omega)$, entonces tenemos también

$$\int_K f\, d\mu = 0. \qquad [13.13]$$

Por tanto, supongamos que μ satisface [13.12]. Definamos

$$h(z) = \int_K \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z} \qquad (z \in S^2 - K). \qquad [13.14]$$

Por el teorema 10.1.7 (con $X = K$, $\varphi(\zeta) = \zeta$), $h \in H(S^2 - K)$.

Sea V_j la componente de $S^2 - K$ que contiene a α_j, y supongamos que $D(\alpha_j; r) \subset V_j$. Si $\alpha_j \neq \infty$ y si z se fija en $D(\alpha_j; r)$, entonces

$$\frac{1}{\zeta - z} = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(z - \alpha_j)^n}{(\zeta - \alpha_j)^{n+1}} \qquad [13.15]$$

uniformemente para $\zeta \in K$. A cada una de las funciones del segundo miembro de [13.15] se le puede aplicar [13.12]. Por tanto, $h(z) = 0$ para todo $z \in D(\alpha_j; r)$. Esto implica que $h(z) = 0$ para todo $z \in V_j$, por el teorema de unicidad 10.4.1.

Si $\alpha_j = \infty$, se cambia [13.15] por

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} z^{-n-1} \zeta^n \qquad (\zeta \in K,\ |z| > r), \qquad [13.16]$$

lo que implica otra vez que $h(z) = 0$ en $D(\infty; r)$, y, por tanto, en V_j. Hemos demostrado, pues, a partir de [13.12], que

$$h(z) = 0 \qquad (z \in S^2 - K). \qquad [13.17]$$

Tomemos ahora un ciclo Γ en $\Omega - K$, como en el teorema 13.1.5, e integremos esta representación integral de Cauchy de f con respecto a μ. Una aplicación del teorema de Fubini (legítima, porque estamos tratando con medidas de Borel y funciones continuas en espacios compactos), combinada con [13.17],

proporciona

$$\int_K f\,d\mu = \int_K d\mu(\zeta)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-\zeta}\,dw\right]$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(w)\,dw \int_K \frac{d\mu(\zeta)}{w-\zeta}$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(w)\,h(w)\,dw = 0.$$

La última igualdad se basa en el hecho de que $\Gamma^* \subset \Omega - K$, donde $h(w)=0$. Por tanto, se verifica [13.13], y la demostración está completa. ////

El siguiente caso especial es de particular interés.

13.2.2. Teorema. *Supongamos que K es un conjunto compacto del plano, que S^2-K es conexo y $f \in H(\Omega)$, donde Ω es un conjunto abierto que contiene a K. Entonces existe una sucesión $\{P_n\}$ de polinomios tales que $P_n(z) \to f(z)$ uniformemente en K.*

DEMOSTRACIÓN. Como S^2-K tiene ahora sólo una componente, necesitamos sólo un punto α_j para aplicar el teorema 13.2.1, y podemos tomar $\alpha_j=\infty$. ////

13.2.3. Observación. El resultado precedente es falso para *todo* compacto K del plano tal que S^2-K no sea conexo. Porque en tal caso S^2-K tiene una componente acotada V. Tomemos $\alpha \in V$, pongamos $f(z)=(z-\alpha)^{-1}$, y pongamos $m=\text{máx}\{|z-\alpha| : z \in K\}$. Supongamos que P es un polinomio, tal que $|P(z)-f(z)| < 1/m$ para todo $z \in K$. Entonces

$$|(z-\alpha)P(z)-1| < 1 \qquad (z \in K). \qquad [13.18]$$

En particular, [13.18] se verifica si z está en la frontera de V; como la adherencia de V es compacta, el teorema del módulo máximo muestra que [13.18] se verifica para todo $z \in V$; tomando $z=\alpha$, obtenemos $1 < 1$. En consecuencia, no es posible la aproximación uniforme.

El mismo razonamiento muestra que no se puede prescindir de ningún α_j en el teorema 13.2.1.

Aplicamos ahora los teoremas de aproximación precedentes a la aproximación en conjuntos abiertos. Ponemos de manifiesto que K no se supuso conexo en los teoremas 13.2.1 y 13.2.2 y que Ω *no* se supondrá conexo en el teorema siguiente.

13.2.4. Teorema. *Sea Ω un conjunto abierto del plano, sea A un conjunto que tiene un punto en cada componente de $S^2-\Omega$, y supongamos que $f \in H(\Omega)$. Entonces existe una sucesión $\{R_n\}$ de funciones racionales, con polos sólo en A, tal que $R_n \to f$ uniformemente en subconjuntos compactos de Ω.*

En el caso especial en que $S^2-\Omega$ sea conexo, podemos tomar $A=\{\infty\}$ y, por tanto, obtener polinomios P_n tales que $P_n \to f$ uniformemente en subconjuntos compactos de Ω.

Observemos que $S^2-\Omega$ puede tener un número de componentes no numerable; por ejemplo, podemos tener $S^2-\Omega=\{\infty\}\cup C$, donde C es un conjunto de Cantor.

DEMOSTRACIÓN. Tomemos una sucesión de conjuntos compactos K_n en Ω, con las propiedades especificadas en el teorema 13.1.3. Fijemos n de momento. Como cada componente de S^2-K_n contiene una componente de $S^2-\Omega$, cada componente de S^2-K_n contiene un punto de A, por tanto, el teorema 13.2.1 nos da una función racional R_n con polos en A tal que

$$|R_n(z)-f(z)|<\frac{1}{n} \quad (z\in K_n). \tag{13.19}$$

Si ahora es K un conjunto compacto cualquiera en Ω, existe un N tal que $K\subset K_n$ para todo $n\geqslant N$. Se deduce de [13.19] que

$$|R_n(z)-f(z)|<\frac{1}{n} \quad (z\in K,\ n\geqslant N), \tag{13.20}$$

lo que completa la demostración. ////

13.3. EL TEOREMA DE MITTAG-LEFFLER

El teorema de Runge se utilizará ahora para demostrar que pueden construirse funciones meromorfas con polos previamente asignados de forma arbitraria.

13.3.1. Teorema. *Supongamos que Ω es un conjunto abierto en el plano, $A\subset\Omega$, que A no tiene ningún punto límite en Ω, y que a cada $\alpha\in A$ le están asociados un entero positivo $m(\alpha)$ y una función racional*

$$P_\alpha(z)=\sum_{j=1}^{m(\alpha)} c_{j,\alpha}(z-\alpha)^{-j}.$$

Entonces existe una función meromorfa f en Ω, cuya parte principal en cada $\alpha\in A$ es P_α y que no tiene ningún otro polo en Ω.

DEMOSTRACIÓN. Tomemos una sucesión $\{K_n\}$ de conjuntos compactos en Ω, como en el teorema 13.1.3: Para $n=1,2,3,\ldots$, K_n está en el interior de K_{n+1}, todo subconjunto compacto de Ω está en algún K_n, y toda componente de S^2-K_n contiene una componente de $S^2-\Omega$. Pongamos $A_1=A\cap K$ y $A_n=A\cap(K_n-K_{n-1})$ para $n=2,3,4,$ Como $A_n\subset K_n$ y A no tiene ningún punto límite en Ω (por tanto, ninguno en K_n), cada A_n es un conjunto finito. Pongamos

$$Q_n(z)=\sum_{\alpha\in A_n} P_\alpha(z) \quad (n=1,2,3,\ldots). \tag{13.21}$$

Como cada A_n es finito, cada Q_n es una función racional. Los polos de Q_n están en K_n-K_{n-1}, para $n\geqslant 2$. En particular, Q_n es holomorfa en un conjunto

abierto que contiene a K_{n-1}. Se deduce ahora del teorema 13.2.1 que existen funciones racionales R_n, tales que sus polos están en $S^2-\Omega$, tales que

$$|R_n(z)-Q_n(z)| < 2^{-n} \quad (z \in K_{n-1}). \qquad [13.22]$$

Pretendemos obtener que

$$f(z)=Q_1(z)+\sum_{n=2}^{\infty}(Q_n(z)-R_n(z)) \quad (z \in \Omega) \qquad [13.23]$$

tiene las propiedades deseadas.

Fijemos N. En K_N, tenemos

$$f=Q_1+\sum_{n=2}^{N}(Q_n-R_n)+\sum_{N+1}^{\infty}(Q_n-R_n). \qquad [13.24]$$

Por [13.22], cada término de la última suma en [13.24] es menor que 2^{-n} en K_N; en consecuencia, esta última serie converge uniformemente en K_N, a una función que es holomorfa en el interior de K_N. Como los polos de cada R_n están fuera de Ω,

$$f-(Q_1+\ldots+Q_N)$$

es holomorfa en el interior de K_N. Por tanto, f tiene precisamente las prescritas partes principales en el interior de K_N, y, por tanto, en Ω, puesto que N es arbitrario. ////

13.4. REGIONES SIMPLEMENTE CONEXAS

Resumiremos ahora algunas propiedades de las regiones simplemente conexas (véase el apartado 10.6.5) que ilustran el importante papel que juegan en la teoría de las funciones holomorfas. De estas propiedades, *a)* y *b)* son los que podrían llamarse propiedades topológicas internas de Ω; *c)* y *d)* se refieren a la forma en que Ω está inmersa en S^2; las propiedades *e)* a *h)* tienen carácter analítico; *j)* es un enunciado algebraico sobre el anillo $H(\Omega)$. El teorema de la aplicación de Riemann 14.4.2 es otra propiedad muy importante de las regiones simplemente conexas. De hecho, lo utilizaremos para demostrar la implicación *j)* $\rightarrow$ *a)*.

13.4.1. Teorema. *Para una región plana Ω, cada una de las siguientes nueve condiciones implica todas las demás.*

a) *Ω es homeomorfa al disco unidad abierto U.*
b) *Ω es simplemente conexa.*
c) $\mathrm{Ind}_\gamma(\alpha)=0$ *para todo camino cerrado γ en Ω y para todo $\alpha \in S^2-\Omega$.*
d) *$S^2-\Omega$ es conexo.*
e) *Toda $f \in H(\Omega)$ puede aproximarse por polinomios, uniformemente en subconjuntos compactos de Ω.*

f) *Para toda* $f \in H(\Omega)$ *y todo camino cerrado* γ *en* Ω.

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

g) *A toda* $f \in H(\Omega)$ *le corresponde una* $F \in H(\Omega)$ *tal que* $F' = f$.
h) *Si* $f \in H(\Omega)$ *y* $1/f \in H(\Omega)$, *existe una* $g \in H(\Omega)$ *tal que* $f = \exp(g)$.
j) *Si* $f \in H(\Omega)$ *y* $1/f \in H(\Omega)$, *existe una* $\varphi \in H(\Omega)$ *tal que* $f = \varphi^2$.

La afirmación de *h)* es que f tiene un «logaritmo holomorfo» g en Ω; *j)* afirma que f tiene una «raíz cuadrada holomorfa» φ en Ω; y *f)* dice que el teorema de Cauchy se verifica para todo camino cerrado en una región simplemente conexa.

En el capítulo 16 veremos que el teorema de monodromía describe aún otra propiedad característica de las regiones simplemente conexas.

DEMOSTRACIÓN. *a)* implica *b)*. Decir que Ω es homeomorfa a U significa que existe una aplicación continua uno a uno ψ de Ω sobre U cuya inversa ψ^{-1} es también continua. Si γ es una curva cerrada en Ω, con $[0, 1]$ como intervalo del parámetro, pongamos

$$H(s, t) = \psi^{-1}(t\psi(\gamma(s))).$$

Entonces $H: I^2 \to \Omega$ es continua; $H(s, 0) = \psi^{-1}(0)$, es una constante; $H(s, 1) = \gamma(s)$; y $H(0, t) = H(1, t)$ porque $\gamma(0) = \gamma$ [13.25]. Por tanto, Ω es simplemente conexa.

b) implica *c)*. Si *b)* se verifica y γ es un camino cerrado en Ω, entonces γ es (por definición de «simplemente conexa») homotópica en Ω a un camino constante. En consecuencia, se verifica *c)*, por el teorema 10.6.7.

c) implica *d)*. Supongamos que *d)* es falso. Entonces $S^2 - \Omega$ es un subconjunto cerrado de S^2 que no es conexo. Como se hizo notar en la sección 10.1, se tiene que $S^2 - \Omega$ es la unión de dos conjuntos cerrados no vacíos disjuntos H y K. Sea H el que contiene a ∞. Sea W el complementario de H, relativo al plano. Entonces $W = \Omega \cup K$. Como K es compacto, el teorema 13.1.5 (con $f = 1$) muestra que existe un ciclo Γ en $W - K = \Omega$ tal que $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 1$ para $z \in K$. Como $K \neq \emptyset$, no se verifica *c)*.

d) implica *e)*. Esto es parte del teorema 13.2.4.

e) implica *f)*. Tomemos $f \in H(\Omega)$, sea γ un camino cerrado en Ω, y tomemos polinomios P_n que converjan a f, uniformemente en γ^*. Como

$$\int_\gamma P_n(z)\,dz = 0$$

para todo n, concluimos que se verifica *f)*.

f) implica *g)*. Supongamos que se verifica *f)*, fijemos $z_0 \in \Omega$, y pongamos

$$F(z) = \int_{\Gamma(z)} f(\zeta)\,d\zeta \qquad (z \in \Omega) \qquad [13.25]$$

donde $\Gamma(z)$ es un camino cualquiera en Ω de z_0 a z. Esto define una función F en Ω. Porque si $\Gamma_1(z)$ es otro camino de z_0 a z (en Ω), entonces Γ seguido

del opuesto de Γ_1 es un camino cerrado en Ω, la integral de f sobre este camino cerrado es 0, y, por tanto, [13.25] no es afectado si $\Gamma(z)$ se cambia por $\Gamma_1(z)$. Comprobemos ahora que $F'=f$. Fijemos $a \in \Omega$. Existe un $r > 0$ tal que $D(a; r) \subset \Omega$. Para $z \in D(a; r)$ podemos calcular $F(z)$ integrando f a lo largo de un camino $\Gamma(a)$, seguido por el intervalo $[a, z]$. En consecuencia, para $z \in D'(a; r)$,

$$\frac{F(z)-F(a)}{z-a}=\frac{1}{z-a}\int_{[a,z]} f(\zeta)\,d\zeta, \qquad [13.26]$$

y la continuidad de f en a implica que $F'(a)=f(a)$, como en la demostración del teorema 10.3.3.

g) implica *h)*. Si $f \in H(\Omega)$ y f no tiene ningún cero en Ω, entonces $f'/f \in H(\Omega)$, y *g)* implica que existe una $g \in H(\Omega)$ de modo que $g'=f'/f$. Podemos añadir una constante a g, de modo que $\exp\{g(z_0)\}=f(z_0)$ para algún $z_0 \in \Omega$. Nuestra elección de g muestra que la derivada de fe^{-g} es constante (porque Ω es conexa), y se tiene que $f=e^g$.

h) implica *j)*. Por *h)*, $f=e^g$. Pongamos $\varphi=\exp(\frac{1}{2}g)$.

j) implica *a)*. Si Ω es todo el plano, entonces Ω es homeomorfa a U; aplíquese z en $z/(1+|z|)$.

Si Ω es una subregión propia del plano que satisface *j)*, entonces existe en realidad un homeomorfismo *holomorfo* de Ω sobre U (una transformación conforme). Esta afirmación es el teorema de la aplicación de Riemann, que es el objetivo principal del próximo capítulo. En consecuencia, la demostración del teorema 13.4.1 estará completa tan pronto como se demuestra el teorema de la aplicación de Riemann. (Véase la nota que sigue al enunciado del teorema 14.4.2.) ////

El hecho de que se verifique *h)* en toda región simplemente conexa tiene la consecuencia siguiente (que también puede demostrarse por medios bastante elementales):

13.4.2. Teorema. *Si $f \in H(\Omega)$, donde Ω es un conjunto abierto cualquiera del plano, y si f no tiene ningún cero en Ω, entonces* $\log|f|$ *es armónica en Ω.*

DEMOSTRACIÓN. A todo disco $D \subset \Omega$ le corresponde una función $g \in H(D)$ tal que $f=e^g$ en D. Si $u=\operatorname{Re} g$, entonces u es armónica en D, y $|f|=e^u$. Por tanto, $\log|f|$ es armónica en todo disco de Ω, y esto proporciona la conclusión buscada. ////

EJERCICIOS

1. Demuéstrese que toda función meromorfa en S^2 es racional.

2. Sea $\Omega=\{z:|z|<1 \text{ y } |2z-1|>1\}$, y supongamos $f \in H(\Omega)$.
   a) ¿Debe existir alguna sucesión de polinomios P_n tal que $P_n \to f$ uniformemente en subconjuntos compactos de Ω?
   b) ¿Debe existir una tal sucesión que converja a f uniformemente en Ω?
   c) ¿Cambia la respuesta a *b)* si requerimos más de f, por ejemplo, que f sea holomorfa en algún conjunto abierto que contenga a la adherencia de Ω?

3. ¿Existe alguna sucesión de polinomios P_n tal que $P_n(0)=1$ para $n=1, 2, 3, \ldots$, pero $P_n(z) \to 0$ para toda $z \neq 0$, cuando $n \to \infty$?

4. ¿Existe alguna sucesión de polinomios P_n tal que

$$\lim P_n(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } \operatorname{Im} z > 0, \\ 0 & \text{si } z \text{ es real}, \\ -1 & \text{si } \operatorname{Im} z < 0? \end{cases}$$

5. Para $n=1, 2, 3, \ldots$, sea Δ_n un disco cerrado en U, y sea L_n un arco (una imagen homeomorfa de $[0, 1]$) en $U-\Delta_n$ que intersecte todo radio de U. Existen polinomios P_n que son muy pequeños en Δ_n y más o menos arbitrarios en L_n. Demuéstrese que $\{\Delta_n\}$, $\{L_n\}$ y $\{P_n\}$ pueden elegirse de tal manera que la serie $f=\Sigma P_n$ define una función $f \in H(U)$ que no tiene ningún límite radial en cualquier punto de T. En otras palabras, el $\lim_{r \to 1} f(re^{i\theta})$ no existe para ningún θ real.

6. He aquí otra construcción de una tal función. Sea $\{n_k\}$ una sucesión de enteros tales que $n_1 > 1$ y $n_{k+1} > 2kn_k$. Defínase

$$h(z) = \sum_{k=1}^{\infty} 5^k z^{n_k}.$$

Demuéstrese que esta serie converge si $|z| < 1$ y demuéstrese que existe una constante $c > 0$ tal que $|h(z)| > c \cdot 5^m$ para todo z con $|z| = 1-(1/n_m)$.

Sugerencia: Para un tal z el término m-ésimo de la serie que define $h(z)$ es mucho más grande que la suma de todos los demás.

En consecuencia h no tiene límites radiales finitos.

Demuéstrese también que h debe tener infinitos ceros en U. (Compárese con el ejercicio 15 del capítulo 12.) De hecho, demuéstrese que a todo número complejo α le corresponden infinitos $z \in U$ en los que $h(z)=\alpha$.

7. Demuéstrese que en el teorema 13.2.4 no necesitamos suponer que A intersecta a cada componente de $S^2-\Omega$. Basta suponer que la adherencia de A intersecta a cada componente de $S^2-\Omega$.

8. Demuéstrese el teorema de Mittag-Leffler para el caso en el que Ω es todo el plano, por un razonamiento directo que no recurra al teorema de Runge.

9. Supongamos que Ω es una región simplemente conexa, $f \in H(\Omega)$, que f no tenga cero en Ω, y que n es un entero positivo. Demuéstrese que existe una $g \in H(\Omega)$ tal que $g^n=f$.

10. Supongamos que Ω es una región, $f \in H(\Omega)$ y $f \not\equiv 0$. Demuéstrese que f tiene un logaritmo holomorfo en Ω si, y sólo si, f tiene raíces n-ésimas holomorfas para todo entero positivo n.

11. Supongamos que $f_n \in H(\Omega)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$, que f es una función compleja en Ω y $f(z)=\lim_{n \to \infty} f_n(z)$ para todo $z \in \Omega$. Demuéstrese que Ω tiene un subconjunto abierto denso V en el que f es holomorfa.

Sugerencia: Pongamos $\varphi = \sup |f_n|$. Utilícese el teorema de Baire para demostrar que todo disco en Ω contiene un disco en el que φ está acotada. Aplíquese el ejercicio 5 del capítulo 10. (En general, $V \neq \Omega$. Compárese con los ejercicios 3 y 4.)

TRANSFORMACION CONFORME

14.1. CONSERVACION DE ANGULOS

14.1.1. Definición. Cada número complejo $z \neq 0$ determina una dirección desde el origen, definida por el punto

$$A[z] = \frac{z}{|z|} \qquad [14.1]$$

en la circunferencia unidad.

Supongamos que f es una aplicación de una región Ω en el plano, que $z_0 \in \Omega$, y que z_0 tiene un entorno perforado $D'(z_0; r) \subset \Omega$ en el que $f(z) \neq f(z_0)$. Decimos que f *conserva los ángulos en* z_0 si existe el

$$\lim_{r \to 0} e^{-i\theta} A[f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)] \qquad (r > 0) \qquad [14.2]$$

y *es independiente de* θ.

En lenguaje menos preciso, el requisito es que para dos rayos cualesquiera L' y L'', que comiencen en z_0, el ángulo que forman sus imágenes $f(L')$ y $f(L'')$ en $f(z_0)$ sea el mismo que forman L' y L'', tanto en magnitud como en orientación.

La propiedad de conservar los ángulos en cada punto de una región es característica de las funciones holomorfas cuya derivada no tiene ceros en esa región. Esto es una consecuencia del teorema 14.1.2, y ésta es la razón para llamar *transformaciones conformes* a las funciones holomorfas cuya derivada no se anula.

14.1.2. Teorema. Sea f tal que aplica una región Ω en el plano. Si $f'(z_0)$ existe en algún $z_0 \in \Omega$ y $f'(z_0) \neq 0$, entonces f conserva los ángulos en z_0. Recíprocamente, si existe la diferencial de f y es diferente de 0 en z_0, y si f conserva los ángulos en z_0, entonces $f'(z_0)$ existe y es diferente de 0.

Aquí $f'(z_0) = \lim [f(z) - f(z_0)]/(z - z_0)$, como es habitual. La diferencial de f en z_0 es una transformación lineal L de R^2 en R^2 tal que, escribiendo $z_0 = (x_0, y_0)$,

$$f(x_0 + x, y_0 + y) = f(x_0, y_0) + L(x, y) + (x^2 + y^2)^{1/2}\eta(x, y), \qquad [14.3]$$

donde $\eta(x, y) \to 0$ cuando $x \to 0$ e $y \to 0$, como en la definición 8.4.1.

DEMOSTRACIÓN. Tomemos $z_0 = f(z_0) = 0$, por simplicidad. Si $f'(0) = a \neq 0$, entonces es inmediato que

$$e^{-i\theta} A[f(re^{i\theta})] = \frac{e^{-i\theta} f(re^{i\theta})}{|f(re^{i\theta})|} \to \frac{a}{|a|} \qquad (r \to 0), \qquad [14.4]$$

y, por tanto, f conserva los ángulos en 0. Recíprocamente, si existe en 0 la diferencial de f y es diferente de 0, entonces [14.3] puede escribirse de nuevo en la forma

$$f(z)=\alpha z+\beta\bar{z}+|z|\eta(z), \qquad [14.5]$$

donde $\eta(z)\to 0$ cuando $z\to 0$, y α y β son números complejos, no nulos ambos. Si f además conserva los ángulos en 0, entonces existe

$$\lim_{r\to 0} e^{-i\theta}A[f(re^{i\theta})]=\frac{\alpha+\beta e^{-2i\theta}}{|\alpha+\beta e^{-2i\theta}|} \qquad [14.6]$$

y es independiente de θ. Podemos excluir aquellos θ para los que el denominador en [14.6] es 0; existen a lo sumo dos de tales θ en $[0, 2\pi)$. Para todos los demás θ, concluimos que $\alpha+\beta e^{-2i\theta}$ está en un rayo fijo que pasa por 0, y esto es posible sólo si $\beta=0$. En consecuencia, $\alpha\neq 0$, y [14.5] implica que $f'(0)=\alpha$. ////

Nota: Ninguna función holomorfa conserva los ángulos en cualquier punto donde la derivada sea 0. Omitimos la fácil demostración de esto. Sin embargo, la diferencial de una función puede ser 0 en un punto donde se conserven los ángulos. Ejemplo: $f(z)=|z|z$, $z_0=0$.

14.2. TRANSFORMACIONES BILINEALES *

14.2.1. Ejemplo. Si a, b, c y d son números complejos tales que $ad-bc\neq 0$, la aplicación

$$z\to\frac{az+b}{cz+d} \qquad [14.7]$$

se llama una *transformación bilineal.* Es conveniente considerar [14.7] como una aplicación de la esfera S^2 en S^2, con los convenios obvios referentes al punto ∞. Por ejemplo, $-d/c$ se transforma en ∞ y ∞ se transforma en a/c, si $c\neq 0$. Es entonces fácil de ver que cada transformación bilineal es una aplicación uno a uno de S^2 sobre S^2. Además, cada una de ellas se obtiene como superposición de transformaciones de los tipos siguientes:

a) Traslaciones: $z\to z+b$.
b) Rotaciones: $z\to az$. $|a|=1$.
c) Homotecias: $z\to rz$, $r>0$.
d) Inversión: $z\to 1/z$.

Si $c=0$ en [14.7], esto es obvio. Si $c\neq 0$, se deduce de la identidad

$$\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a}{c}+\frac{\lambda}{cz+d}, \qquad \lambda=\frac{bc-ad}{c}. \qquad [14.8]$$

Los tres primeros tipos transforman evidentemente rectas en rectas y circunferencias en circunferencias. Esto no es cierto para *d).* Pero si $\mathcal{F}$ es la familia que consiste en todas las rectas y circunferencias, $\mathcal{F}$ se conserva me-

* Estas transformaciones se llaman también homográficas. *(N. del T.)*

diante *d)*, y obtenemos, pues, el importante resultado de que $\mathcal{F}$ *se conserva frente a toda transformación bilineal.* [Puede hacerse notar que cuando se considera $\mathcal{F}$ como una familia de subconjuntos de S, $\mathcal{F}$ consta de todas las circunferencias de S^2, vía la proyección estereográfica [13.1]; no utilizaremos esta propiedad de $\mathcal{F}$ y, por tanto, omitiremos su demostración.]

La demostración de que $\mathcal{F}$ se conserva frente a inversiones es muy sencilla. De geometría analítica elemental se tiene que todo elemento de $\mathcal{F}$ es el lugar geométrico de puntos cuyas coordenadas satisfacen una ecuación de la forma

$$\alpha z\bar{z}+\beta z+\bar{\beta}\bar{z}+\gamma=0, \qquad [14.9]$$

donde α y γ son constantes reales y β es una constante compleja, con tal que $\beta\bar{\beta}>\alpha\gamma$. Si $\alpha\neq 0$, [14.9] define una circunferencia; $\alpha=0$ proporciona líneas rectas. El cambio de z por $1/z$ transforma [14.9] en

$$\alpha+\beta\bar{z}+\bar{\beta}z+\gamma z\bar{z}=0, \qquad [14.10]$$

que es una ecuación del mismo tipo.

Supongamos que a, b y c son números complejos distintos. Podemos construir una transformación bilineal φ que transforma la terna ordenada $\{a, b, c\}$ en $\{0, 1, \infty\}$,

$$\varphi(z)=\frac{(b-c)(z-a)}{(b-a)(z-c)} \qquad [14.11]$$

Existe sólo una tal φ. Porque si $\varphi(a)=0$, debemos tener $z-a$ en el numerador; si $\varphi(c)=\infty$, hemos de tener $z-c$ en el denominador; y si $\varphi(b)=1$, los coeficientes han de ajustarse como en [14.11]. Si a o b o c es ∞, pueden escribirse fácilmente fórmulas análogas a [14.11]. Si se aplica a continuación de [14.11] la inversa de una transformación del mismo tipo, obtenemos el resultado siguiente:

Dadas dos ternas ordenadas cualesquiera $\{a, b, c\}$ *y* $\{a', b', c'\}$ *en* S^2, *existe una, y sólo una, transformación bilineal que transforma* a *en* a', b *en* b' *y* c *en* c'.

(Se supone, evidentemente, que $a\neq b$, $a\neq c$ y $b\neq c$, y lo mismo para a', b' y c'.)

Concluimos de esto que toda circunferencia puede transformarse en cualquier otra circunferencia mediante una transformación bilineal. De más interés es el hecho de que toda circunferencia puede transformarse en cualquier línea recta (si se considera ∞ como parte de la recta), y, por tanto, que *todo disco abierto puede transformarse conformemente en cualquier semiplano abierto.*

Discutamos más explícitamente una tal transformación, por ejemplo,

$$\varphi(z)=\frac{1+z}{1-z}, \qquad [14.12]$$

Esta φ transforma $\{-1, 0, 1\}$ en $\{0, 1, \infty\}$; el segmento $(-1, 1)$ se transforma en el eje real positivo. La circunferencia unidad T pasa por -1 y 1; por tanto, $\varphi(T)$ es una línea recta que pasa por $\varphi(-1)=0$. Como T forma un ángulo recto con el eje real en -1, $\varphi(T)$ forma un ángulo recto con el eje real en 0. Por tanto, $\varphi(T)$ es el eje imaginario. Como $\varphi(0)=1$, se deduce que φ *es una transformación conforme uno a uno del disco unidad abierto sobre el semiplano derecho abierto.*

El papel de las transformaciones bilineales en la teoría de la transformación conforme está también bien ilustrado por el teorema 12.8.5.

14.2.2. Observación. Las transformaciones bilineales hacen posible transferir los teoremas que se refieren al comportamiento de funciones holomorfas cerca de líneas rectas a situaciones en las que se presentan arcos circulares en lugar de ellas. Para ilustrar el método bastará con una discusión informal del principio de reflexión.

Supongamos que Ω es una región en U, acotada en parte por un arco L de la circunferencia unidad, y que f es continua en $\bar{\Omega}$, holomorfa en Ω, y real en L. La función

$$\psi(z)=\frac{z-i}{z+i} \qquad [14.13]$$

transforma el semiplano superior en U. Si $g=f\circ\psi$, el teorema 11.3.3 nos proporciona una extensión holomorfa G de g, y entonces $F=G\circ\psi^{-1}$ nos da una extensión holomorfa F de f que satisface la relación

$$f(z^*)=\overline{F(z)}, \qquad [14.14]$$

donde $z^*=1/\bar{z}$.

La última afirmación se deduce de una propiedad de ψ: Si $w=\psi(z)$ y y $w_1=\psi(\bar{z})$, entonces $w_1=w^*$, como se comprueba fácilmente calculando.

Los ejercicios 2 a 5 proporcionan otras aplicaciones de esta técnica.

14.3. FAMILIAS NORMALES

El teorema de la aplicación de Riemann se demostrará obteniendo la función aplicación como la solución de un cierto problema de extremo. La existencia de esta solución se basa en una propiedad de compacidad muy útil de ciertas familias de funciones holomorfas que formulamos a continuación.

14.3.1. Definición. Supongamos que $\mathcal{F}\subset H(\Omega)$, para alguna región Ω. Llamamos a $\mathcal{F}$ una *familia normal* si toda sucesión de elementos de $\mathcal{F}$ contiene una subsucesión que converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω. La función límite no es preciso que pertenezca a $\mathcal{F}$.

(A veces se adopta una definición más amplia, requiriendo meramente que toda sucesión en $\mathcal{F}$ o converja o tienda a ∞, uniformemente en subconjuntos compactos de Ω. Esta se adapta bien para tratar con funciones meromorfas.)

14.3.2. Teorema. *Supongamos que $\mathcal{F}\subset H(\Omega)$ y que $\mathcal{F}$ está uniformemente acotada en cada subconjunto compacto de la región Ω. Entonces $\mathcal{F}$ es una familia normal.*

DEMOSTRACIÓN. Las hipótesis significan que a cada compacto $K\subset\Omega$ *le* corresponde un número $M(K)<\infty$ tal que $|f(z)|\leqslant M(K)$ para toda $f\in\mathcal{F}$ y todo $z\in K$.

Sea $\{K_n\}$ una sucesión de conjuntos compactos cuya unión es Ω, tales que K_n está en el interior de K_{n+1}; una tal sucesión se construyó en el teorema 13.1.3. Entonces existen números positivos δ_n tales que

$$D(z;\,2\delta_n)\subset K_{n+1} \qquad (z\in K_n). \qquad [14.15]$$

Consideremos dos puntos z' y z^n en K_n, tales que $|z'-z''| < \delta_n$, sea γ la circunferencia orientada positivamente con centro en z' y radio $2\delta_n$, y acotemos $|f(z')-f(z'')|$ mediante la fórmula de Cauchy. Como

$$\frac{1}{\zeta-z'}-\frac{1}{\zeta-z''}=\frac{z'-z''}{(\zeta-z')(\zeta-z'')},$$

tenemos

$$f(z')-f(z'')=\frac{z'-z''}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z')(\zeta-z'')}\,d\zeta, \qquad [14.16]$$

y como $|\zeta-z'|=2\delta_n$ y $|\zeta-z''| > \delta_n$ para todo $\zeta \in \gamma^*$, [14.16] proporciona la desigualdad

$$|f(z')-f(z'')| < \frac{M(K_{n+1})}{\delta_n}\,|z'-z''|, \qquad [14.17]$$

válida para toda $f \in \mathcal{F}$ y todo z' y $z'' \in K_n$, con tal que $|z'-z''| < \delta_n$.

Este ha sido el paso crucial en la demostración: Hemos demostrado, para cada K_n, que las restricciones de los elementos de $\mathcal{F}$ a K_n forman una *familia equicontinua*. Esto significa, por definición, que a cada $\epsilon > 0$ le corresponde un $\delta > 0$ tal que $|f(z')-f(z'')| < \epsilon$ para toda $f \in \mathcal{F}$ y todo z' y $z'' \in K$ para los que $|z'-z''| < \delta$. Una ojeada a [14.17] muestra que este requisito se satisface con

$$\delta=\frac{\epsilon\delta_n}{\epsilon+M(K_{n+1})}. \qquad [14.18]$$

Sea ahora $\{f_m\}$ una sucesión en $\mathcal{F}$. Tomemos un conjunto numerable $E \subset \Omega$ tal que $E \cap K_n$ sea denso en K_n para $n=1, 2, 3, \ldots$ Dispongamos los puntos de E en una sucesión $\{w_i\}$. Como $\{f_m(z)\}$ está acotada en cada $z \in \Omega$, $\{f_m\}$ tiene una subsucesión, pongamos $\{f_{m,1}\}$, que converge a w_1. De $\{f_{m,1}\}$ podemos extraer una subsucesión, $\{f_{m,2}\}$, que también converja en w_2. Procediendo de esta forma, obtenemos sucesiones $\{f_{m,i}\}$ que convergen en w_i y tales que $\{f_{m,i}\}$ sea una subsucesión de $\{f_{m,i-1}\}$. La «sucesión diagonal» $\{f_{m,m}\}$ converge entonces en todo punto de E.

Pretendemos probar que $\{f_{m,m}\}$ en realidad converge uniformemente en cada K_n (y, por tanto, en cada subconjunto compacto K de Ω).

Fijemos K_n, $\epsilon > 0$, y tomemos δ como en [14.18]. Como K_n es compacto, K contiene puntos $z_1, \ldots, z_p$ de E tales que la unión de los discos $D(z_i; \delta)$ $(i=1, \ldots, p)$ recubre K_n, y existe un entero N tal que

$$|f_{r,r}(z_i)-f_{s,s}(z_i)| < \epsilon \qquad [14.19]$$

si $r > N$, $s > N$ y $1 \leqslant i \leqslant p$.

A todo $z \in K_n$ le corresponde un z_i de modo que $1 \leqslant i \leqslant p$ y $|z-z_i| < \delta$. Entonces $|f_{r,r}(z)-f_{s,s}(z)|$ no es mayor que

$$|f_{r,r}(z)-f_{r,r}(z_i)|+|f_{r,r}(z_i)-f_{s,s}(z_i)|+|f_{s,s}(z_i)-f_{s,s}(z)|. \qquad [14.20]$$

La primera y tercera diferencias en [14.20] son menores que ϵ, por nuestra elección de δ; el segundo término es menor que ϵ si $r > N$ y $s > N$. En con-

secuencia,

$$|f_{r,r}(z)-f_{s,s}(z)| < 3\epsilon \qquad [14.21]$$

para todo $z \in K_n$, si $r > N$ y $s > N$.

Esto completa la demostración. ////

14.4. EL TEOREMA DE LA APLICACION DE RIEMANN

14.4.1. Equivalencia conforme. Decimos que dos regiones Ω_1 y Ω_2 son *conformemente equivalentes* si existe una $\varphi \in H(\Omega_1)$ tal que φ es uno a uno en Ω_1 y tal que $\varphi(\Omega_1)=\Omega_2$, es decir, si existe una transformación conforme uno a uno de Ω_1 sobre Ω_2. En estas condiciones, la inversa de φ es holomorfa en Ω_2 (teorema 10.5.5) y, por tanto, es una transformación conforme de Ω_2 sobre Ω_1.

Se tiene, pues, que regiones conformemente equivalentes son homeomorfas. Pero existe una relación mucho más importante entre regiones conformemente equivalentes: Si φ es como antes, $f \to f \circ \varphi$ es una aplicación uno a uno de $H(\Omega_2)$ sobre $H(\Omega_1)$ que conserva sumas y productos, es decir, que es un isomorfismo de anillo de $H(\Omega_2)$ sobre $H(\Omega_1)$. Si Ω_1 tiene estructura simple, problemas sobre $H(\Omega_2)$ pueden transferirse a problemas en $H(\Omega_1)$, y las soluciones pueden llevarse otra vez a $H(\Omega_2)$ con la ayuda de la aplicación φ. El caso más importante de esto se basa en elteorema de la aplicación de Riemann (donde Ω_2 es el disco unidad U), que reduce el estudio de $H(\Omega)$ al de $H(U)$, para cualquier subregión propia simplemente conexa en el plano. Por supuesto, para soluciones explícitas de problemas, puede ser necesario disponer de información bastante precisa sobre la función aplicación.

14.4.2. Teorema. *Toda región simplemente conexa Ω en el plano (distinta del plano mismo) es conformemente equivalente al disco unidad abierto U.*

Nota: El caso del plano ha de ser excluido claramente, por el teorema de Liouville. Por tanto, el plano no es conformemente equivalente a U, si bien las dos regiones son homeomorfas.

La única propiedad de las regiones simplemente conexas que se utilizará en la demostración es que toda función holomorfa que no tenga ceros en una tal región tiene en ella una raíz cuadrada holomorfa. esto proporcionará la conclusión «*j)* implica *a)*» del teorema 13.4.1 y completará, pues, la demostración del teorema.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que Ω es una región simplemente conexa del plano y sea w_0 un número complejo, $w_0 \notin \Omega$. Sea Σ la clase de todas las $\psi \in H(\Omega)$ que son uno a uno en Ω y que aplican Ω en U. Tenemos que demostrar que alguna $\psi \in \Sigma$ aplica Ω *sobre* U.

Demostramos en primer lugar que Σ *es no vacía.* Como Ω es simplemente conexa, existe una $\varphi \in H(\Omega)$ de modo que $\varphi^2(z)=z-w_0$ en Ω. Si $\varphi(z_1)=\varphi(z_2)$, entonces también $\varphi^2(z_1)=\varphi^2(z_2)$, y, por tanto, $z_1=z_2$; entonces φ es uno a uno. El mismo razonamiento muestra que no existen puntos z_1 y z_2 en Ω tales que $\varphi(z_1)=-\varphi(z_2)$. Como φ es una aplicación abierta, $\varphi(\Omega)$ contiene un disco $D(a;r)$, con $0<r<|a|$. El disco $D(-a;r)$, por tanto, no corta a $\varphi(\Omega)$, y si definimos $\psi=r/(\varphi+a)$, vemos que $\psi \in \Sigma$.

El próximo paso consiste en demostrar que *si* $\psi \in \Sigma$, *si* $\psi(\Omega)$ *no recubre todo* U, *y si* $z_0 \in \Omega$, *entonces existe un* $\psi_1 \in \Sigma$ *con*

$$|\psi_1'(z_0)| > |\psi'(z_0)|.$$

Será conveniente utilizar las funciones φ_α definidas mediante

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}.$$

Para $\alpha \in U$, φ_α es una aplicación uno a uno de U sobre U; su inversa es $\varphi_{-\alpha}$ (teorema 12.2.3).

Supongamos que $\psi \in \Sigma$, $\alpha \in U$ y $\alpha \notin \psi(\Omega)$. Entonces $\varphi_\alpha \circ \psi \in \Sigma$ y $\varphi_\alpha \circ \psi$ no tiene ceros en Ω; por tanto, existe una $g \in H(\Omega)$ tal que $g^2 = \varphi_\alpha \circ \psi$. Vemos que g es uno a uno (como en la demostración de que $\Sigma \neq \emptyset$), por tanto, $g \in \Sigma$; y si $\psi_1 = \varphi_\beta \circ g$, donde $\beta = g(z_0)$, se deduce que $\psi_1 \in \Sigma$. Con la notación $w^2 = s(w)$, tenemos ahora

$$\psi = \varphi_{-\alpha} \circ s \circ g = \varphi_{-\alpha} \circ s \circ \psi_{-\beta} \circ \psi_1.$$

Como $\psi_1(z_0) = 0$, la regla de la cadena proporciona

$$\psi'(z_0) = F'(0)\psi_1'(z_0),$$

donde $F = \varphi_{-\alpha} \circ s \circ \varphi_{-\beta}$. Vemos que $F(U) \subset U$ y que F no es uno a uno en U. En consecuencia, $|F'(0)| < 1$, por el lema de Schwarz (véase el apartado 12.2.4), de modo que $|\psi'(z_0)| < |\psi_1'(z_0)|$. [Notemos que $\psi'(z_0) \neq 0$, puesto que ψ es uno a uno en Ω.]

Fijemos $z_0 \in \Omega$, y pongamos

$$\eta = \sup\{|\psi'(z_0) : \psi \in \Sigma\}.$$

Lo anterior aclara que *cualquier* $h \in \Sigma$ *para la que* $|h'(z_0)| = \eta$ *aplicará* Ω *sobre* U. Por tanto, la demostración estará completa tan pronto como probemos la existencia de una tal h.

Como $|\psi(z)| < 1$ para toda $\psi \in \Sigma$ y $z \in \Omega$, el teorema 14.3.2 muestra que Σ es una familia normal. La definición de η muestra que existe una sucesión $\{\psi_n\}$ en Σ tal que $|\psi_n'(z_0)| \to \eta$, y por la normalidad de Σ podemos extraer una subsucesión (denotada otra vez mediante $\{\psi_n\}$, por simplicidad) que converge, uniformemente en subconjuntos compactos de Ω, a un límite $h \in H(\Omega)$. Por el teorema 10.4.11, $|h'(z_0)| = \eta$. Como $\Sigma \neq \emptyset$, $\eta > 0$, h no es constante. Como $\psi_n(\Omega) \subset U$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$, tenemos $h(\Omega) \subset \bar{U}$, pero el teorema de la aplicación abierta muestra que en realidad $h(\Omega) \subset U$.

Por tanto, todo lo que queda por demostrar es que h es uno a uno. Fijemos puntos distintos z_1 y $z_2 \in \Omega$; pongamos $\alpha = h(z_1)$ y $\alpha_n = \psi_n(z_1)$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$; y sea $\bar{D}$ un disco circular cerrado en Ω con centro en z_2, tal que $z_1 \notin \bar{D}$ y tal que $h - \alpha$ no tiene ceros en la frontera de $\bar{D}$. Esto es posible, porque los ceros de $h - \alpha$ no poseen punto límite en Ω. Las funciones $\psi_n - \alpha_n$ convergen a $h - \alpha$, uniformemente en $\bar{D}$; no tienen ceros en D porque son uno a uno y tienen un cero en z_1; se deduce, pues, del teorema de Rouché que $h - \alpha$ no tiene ceros en D; en particular, $h(z_2) \neq h(z_1)$.

Por tanto, $h \in \Sigma$, y la demostración está completa. ////

Una demostración más constructiva se esboza en el ejercicio 26.

14.4.3. Observaciones. La demostración precedente también demuestra que $h(z_0)=0$. Porque si $h(z_0)=\beta$ y $\beta \neq 0$, entonces $\varphi_\beta \circ h \in \Sigma$, y

$$|(\varphi_\beta \circ h)'(z_0)| = |\varphi_\beta'(\beta)h'(z_0)| = \frac{|h'(z_0)|}{1-|\beta|^2} > |h'(z_0)|.$$

Es interesante observar que si bien h se obtuvo maximizando $|\psi'(z_0)|$ para $\psi \in \Sigma$, h también maximiza a $|f'(z_0)|$ si f recorre la clase que consiste en todas las aplicaciones holomorfas de Ω en U (no necesariamente uno a uno). Porque si f es una tal función, entonces $g=f \circ h^{-1}$ aplica U en U, por tanto, $|g'(0)| \leqslant 1$, verificándose la igualdad (por el lema de Schwarz) si, y sólo si, g es una rotación, y, por tanto, la regla de la cadena proporciona el resultado siguiente:

Si $f \in H(\Omega)$, $f(\Omega) \subset U$ y $z_0 \in \Omega$, entonces $|f'(z_0)| \leqslant |h'(z_0)|$. La igualdad se verifica si, y sólo si, $f(z)=\lambda h(z)$, para alguna constante λ tal que $|\lambda|=1$.

14.5. LA CLASE $\mathcal{S}$

14.5.1. Definición. $\mathcal{S}$ es la clase de todas las $f \in H(U)$ que son *uno a uno* en U y que satisfacen

$$f(0)=0, \qquad f'(0)=1 \tag{14.22}$$

Por tanto, toda $f \in \mathcal{S}$ tiene un desarrollo en serie de potencias

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \qquad (z \in U). \tag{14.23}$$

La clase $\mathcal{S}$ no es cerrada respecto de la adición o multiplicación, pero tiene muchas otras propiedades interesantes. Desarrollaremos sólo algunas de ellas en esta sección. Se utilizará el teorema 14.5.6 en la demostración del teorema de Mergelyan, en el capítulo 20.

14.5.2. Ejemplo. La función

$$f(z)=\frac{z}{(1-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$$

es un elemento de $\mathcal{S}$.

En efecto, si $f(z)=f(w)$, entonces $(z-w)(1+zw)=0$, y el segundo factor no es 0 si $|z|<1$ y $|w|<1$.

Dejamos al lector el obtener $f(U)$ para esta f.

14.5.3. Teorema. *a) Si $f \in \mathcal{S}$, $|\alpha|=1$ y $g(z)=\bar{\alpha}f(\alpha z)$, entonces $g \in \mathcal{S}$. b) Si $f \in \mathcal{S}$ existe una $g \in \mathcal{S}$ tal que*

$$g^2(z)=f(z^2) \qquad (z \in U). \tag{14.24}$$

DEMOSTRACIÓN. *a)* es claro. Para demostrar *b)*, escribamos $f(z)=z\varphi(z)$. Entonces $\varphi \in H(U)$, $\varphi(0)=1$ y φ no tiene ceros en $U-\{0\}$. Por tanto, existe

una $h \in H(U)$ con $h(0)=1$, $h^2(z)=\varphi(z)$. Pongamos

$$g(z)=zh(z^2) \qquad (z \in U). \tag{14.25}$$

Entonces $g^2(z)=z^2h^2(z^2)=z^2\varphi(z^2)=f(z^2)$, de modo que se verifica [14.24]. Es claro que $g(0)=0$ y $g'(0)=1$. Tenemos que demostrar que g es uno a uno.

Supongamos que z y $w \in U$ y $g(z)=g(w)$. Como f es uno a uno, [14.24] implica que $z^2=w^2$. Por tanto, o $z=w$ (que es lo que queremos demostrar) o $z=-w$. En el último caso, [14.25] muestra que $g(z)=-g(w)$; se deduce que $g(z)=g(w)=0$, y como g no tiene ceros en $U-\{0\}$, tenemos $z=w=0$. ////

14.5.4. Teorema. *Si $F \in H(U-\{0\})$, F es uno a uno en U, y*

$$F(z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad (z \in U), \tag{14.26}$$

entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|\alpha_n|^2 \leqslant 1. \tag{14.27}$$

Este se conoce habitualmente como el *teorema del área,* por razones que aparecerán más claras en la demostración.

DEMOSTRACIÓN. La elección de α_0 es claramente irrelevante. Por tanto, supondremos $\alpha_0=0$. Ni la hipótesis ni la conclusión son afectadas si cambiamos $F(z)$ por $\lambda F(\lambda z)$ ($|\lambda|=1$). Por tanto, podemos suponer que α_1 es real.

Pongamos $U_r=\{z:|z|<r\}$, $C_r=\{z:|z|=r\}$ y $V_r=\{z:r<|z|<1\}$, para $0<r<1$. Entonces $F(U_r)$ es un entorno de ∞ (por el teorema de la aplicación abierta, aplicado a $1/F$); los conjuntos $F(U_r)$, $F(C_r)$ y $F(V_r)$ son disjuntos, puesto que F es uno a uno. Escribamos

$$F(z)=\frac{1}{z}+\alpha_1 z+\varphi(z) \qquad (z \in U), \tag{14.28}$$

$F=u+iv$, y

$$A=\frac{1}{r}+\alpha_1 r, \qquad B=\frac{1}{r}-\alpha_1 r. \tag{14.29}$$

Para $z=re^{i\theta}$, obtenemos

$$u=A\cos\theta+\operatorname{Re}\varphi \quad \text{y} \quad v=-B\operatorname{sen}\theta+\operatorname{Im}\varphi. \tag{14.30}$$

Dividamos las ecuaciones [14.30] por A y B, respectivamente, elevemos al cuadrado y sumemos:

$$\frac{u^2}{A^2}+\frac{v^2}{B^2}=1+\frac{2\cos\theta}{A}\operatorname{Re}\varphi+\left(\frac{\operatorname{Re}\varphi}{A}\right)^2-\frac{2\operatorname{sen}\theta}{B}\operatorname{Im}\varphi+\left(\frac{\operatorname{Im}\varphi}{B}\right)^2.$$

Por [14.28], φ tiene un cero de orden al menos 2 en el origen. Si tenemos en cuenta [14.29], se deduce que existe un $\eta>0$ tal que, para todo r suficiente-

mente pequeña,

$$\frac{u^2}{A^2}+\frac{v^2}{B^2}<1+\eta r^3 \qquad (z=re^{i\theta}). \tag{14.31}$$

Esto dice que $F(C_r)$ está en el interior de la elipse E_r cuyos semiejes son $A\sqrt{1+\eta r^3}$ y $B\sqrt{1+\eta r^3}$, y que acota, por tanto, un área

$$\pi AB(1+\eta r^3)=\pi\left(\frac{1}{r}+\alpha_1 r\right)\left(\frac{1}{r}-\alpha_1 r\right)(1+\eta r^3)\leqslant\frac{\pi}{r^2}(1+\eta r^3). \tag{14.32}$$

Como $F(C_r)$ está en el interior de E_r, tenemos $E_r\subset F(U_r)$; por tanto, $F(V_r)$ está en el interior de E_r, por lo que el área de $F(V_r)$ no es mayor que [14.32]. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann muestran que el jacobiano de la aplicación $(x,y)\to(u,v)$ es $|F'|^2$. El teorema 8.4.3 proporciona, por tanto, el resultado siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{r^2}(1+\eta r^3)&\geqslant\iint_{V_r}|F'|^2\\&=\int_r^1 t\,dt\int_0^{2\pi}\Big|-t^{-2}e^{-2i\theta}+\sum_1^\infty n\alpha_n t^{n-1}e^{i(n-1)\theta}\Big|^2\,d\theta\\&=2\pi\int_r^1\left(t^{-3}+\sum_1^\infty n^2|\alpha_n|^2t^{2n-1}\right)dt\\&=\pi\left\{r^{-2}-1+\sum_1^\infty n|\alpha_n|^2(1-r^{2n})\right\}.\end{aligned} \tag{14.33}$$

Si dividimos [14.33] por π y restamos entonces r^{-2} de cada miembro, obtenemos

$$\sum_{n=1}^N n|\alpha_n|^2(1-r^{2n})\leqslant 1+\eta r \tag{14.34}$$

para toda r suficientemente pequeña y para todos los enteros positivos N. Hagamos $r\to 0$ en [14.34] y $N\to\infty$. Esto proporciona [14.27].

Corolario. *Bajo las mismas hipótesis,* $|\alpha_1|=1$.

Que ésta es de hecho la mejor acotación posible se obtiene con $F(z)=(1/z)+\alpha z$, $|\alpha|=1$, que es uno a uno en U. ////

14.5.5. Teorema. *Si* $f\in\mathcal{S}$, *y*

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^\infty a_n z^n,$$

entonces a) $|a_2|\leqslant 2$, *y b)* $f(U)\supset D(0;\,1/4)$.

La segunda afirmación es que $f(U)$ contiene a todos los w tales que $|w|<\frac{1}{4}$.

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema 14.5.3, existe una $g \in \mathcal{S}$ de modo que $g^2(z) = f(z^2)$. Si $G = 1/g$, entonces el teorema 14.5.4 puede aplicarse a G, y de aquí se obtiene *a)*. Como

$$f(z^2) = z^2(1 + a_2 z^2 + \ldots),$$

tenemos

$$g(z) = z(1 + \tfrac{1}{2} a_2 z^2 + \ldots),$$

y, por tanto,

$$G(z) = \frac{1}{z}(1 - \tfrac{1}{2} a_2 z^2 + \ldots) = \frac{1}{z} - \frac{a_2}{2} z + \ldots$$

El corolario del teorema 14.5.4 muestra que $|a_2| \leqslant 2$.

Para demostrar *b)*, supongamos $w \notin f(U)$. Definamos

$$h(z) = \frac{f(z)}{1 - f(z)/w}.$$

Entonces $h \in H(U)$, h es uno a uno en U, y

$$h(z) = (z + a_2 z^2 + \ldots)\left(1 + \frac{z}{w} + \ldots\right) = z + \left(a_2 + \frac{1}{w}\right) z^2 + \ldots,$$

de modo que $h \in \mathcal{S}$. Apliquemos *a)* a h: Tenemos $|a_2 + (1/w) \leqslant 2$, y como $|a_2| \leqslant 2$, obtenemos finalmente $|1/w| \leqslant 4$. Por tanto, $|w| \geqslant \frac{1}{4}$ para todo $w \notin f(U)$. Esto completa la demostración. ////

El ejemplo 14.5.2 muestra que tanto *a)* como *b)* son las mejores posibles; el punto $-\frac{1}{4}$ no está en $f(U)$ para esta particular $f \in \mathcal{S}$.

14.5.6. Teorema. *Supongamos $F \in H(U - \{0\})$, que F uno a uno en U, que F tiene un polo de orden 1 en $z = 0$, con residuo 1, y que ni w_1 ni w_2 están en $F(U)$.*

Entonces $|w_1 - w_2| \leqslant 4$.

DEMOSTRACIÓN. Si $f = 1/(F - w_1)$, entonces $f \in \mathcal{S}$, por tanto, $f(U) \supset D(0, \frac{1}{4})$, y, por tanto, la imagen de U por $F - w_1$ contiene a todos los w tales que $|w| > 4$. Como $w_2 - w_1$ no está en esta imagen, tenemos $|w_2 - w_1| \leqslant 4$. ////

Notemos que ésta también es la mejor posibilidad: Si $F(z) = z^{-1} + z$, entonces $F(U)$ no contiene los puntos 2, -2. De hecho, el complementario de $F(U)$ es precisamente el intervalo $[-2, 2]$ del eje real.

14.6. CONTINUIDAD EN LA FRONTERA

Bajo ciertas condiciones, toda transformación conforme de una región simplemente conexa Ω sobre U puede extenderse como un homeomorfismo de su adherencia $\bar{\Omega}$ sobre $\bar{U}$. La naturaleza de la frontera de Ω juega aquí un papel decisivo.

14.6.1. Definición. Un punto frontera β de una región plana simplemente conexa Ω se llamará un *punto frontera simple de* Ω si β tiene la propiedad siguiente: A toda sucesión $\{\alpha_n\}$ en Ω tal que $\alpha_n \to \beta$ cuando $n \to \infty$ le corresponde una curva γ, con $[0, 1]$ como intervalo del parámetro, y una sucesión $\{t_n\}$, $0 < t_1 < t_2 < \ldots$, $t_n \to 1$, tal que $\gamma(t_n) = \alpha_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ y $\gamma(t) \in \Omega$ para $0 \leqslant t < 1$.

En otras palabras, existe una curva en Ω que pasa por los puntos α_n y termina en β.

14.6.2. Ejemplos. Como los ejemplos de puntos frontera simples son obvios, consideremos algunos que no son simples.

Si Ω es $U - \{x : 0 \leqslant x < 1\}$, entonces Ω es simplemente conexa; y si $0 < \beta \leqslant 1$, β es un punto frontera de Ω que no es simple.

Para obtener un ejemplo más complicado, sea Ω_0 el interior del cuadrado cuyos vértices son los puntos 0, 1, $1+i$ e i. Quitemos los intervalos

$$\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n} + \frac{n-1}{n} i\right] \quad \text{y} \quad \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{i}{n}, \frac{1}{2n+1} + i\right]$$

de Ω_0. La región resultante Ω es simplemente conexa. Si $0 \leqslant y \leqslant 1$, entonces iy es un punto frontera que no es simple.

14.6.3. Teorema. *Sea Ω una región acotada simplemente conexa del plano, y sea f una transformación conforme de Ω sobre U.*

a) *Si β es un punto frontera simple de Ω, entonces f tiene una extensión continua a $\Omega \cup \{\beta\}$. Si f se extiende así, entonces $|f(\beta)| = 1$.*

b) *Si β_1 y β_2 son puntos frontera simples distintos de Ω y si f se extiende a $\Omega \cup \{\beta_1\} \cup \{\beta_2\}$ como en* a), *entonces $f(\beta_1) \neq f(\beta_2)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea g la inversa de f. Entonces $g \in H(U)$, por el teorema 10.5.6, $g(U) = \Omega$, g es uno a uno, y $g \in H^\infty$, porque Ω está acotada.

Supongamos que *a)* es falso. Entonces existe una sucesión $\{\alpha_n\}$ en Ω tal que $\alpha_n \to \beta$, $f(\alpha_{2n}) \to w_1$, $f(\alpha_{2n+1}) \to w_2$ y $w_1 \neq w_2$. Tomemos γ como en la definición 14.6.1, y pongamos $\Gamma(t) = f(\gamma(t))$, para $0 \leqslant t < 1$. Pongamos $K_r = g(\bar{D}(0; r))$, para $0 < r < 1$. Entonces K_r es un subconjunto compacto de Ω. Como $\gamma(t) \to \beta$ cuando $t \to 1$, existe un $t^* < 1$ (que depende de r) tal que $\gamma(t) \notin K_r$ si $t^* < t < 1$. Por tanto, $|\Gamma(t)| > r$ si $t^* < t < 1$. Esto dice que $|\Gamma(t)| \to 1$ cuando $t \to 1$ Como $\Gamma(t_{2n}) \to w_1$ y $\Gamma(t_{2n+1}) \to w_2$, tenemos también $|w_1| = |w_2| = 1$.

Se tiene ahora que uno de los dos arcos abiertos J cuya unión es $T - (\{w_1\} \cup \{w_2\})$ tiene la propiedad de que todo radio de U que termina en un punto de J corta al recorrido de Γ en un conjunto que tiene un punto límite en T. Notemos que $g(\Gamma(t)) = \gamma(t)$ para $0 \leqslant t < 1$ y que g tiene límites radiales en c.t.p. de T, puesto que $g \in H^\infty$. Por tanto:

$$\lim_{r \to 1} g(re^{it}) = \beta \quad \text{(en c.t.p. de } J\text{)}, \qquad [14.35]$$

porque $g(\Gamma(t)) \to \beta$ cuando $t \to 1$. Por el teorema 11.4.5, aplicado a $g - \beta$, [14.35] muestra que g es constante. Pero g es uno a uno en U, y tenemos una contradicción. Por tanto, $w_1 = w_2$, y *a)* está demostrado.

Supongamos que *b)* es falso. Si multiplicamos f por una constante conveniente de valor absoluto igual a 1, tenemos entonces que $\beta_1 \neq \beta_2$ pero $f(\beta_1) = f(\beta_2) - 1$.

Como β_1 y β_2 son puntos fronteras simples de Ω, existen curvas γ_i con $[0, 1]$ como intervalo del parámetro tales que $\gamma_i([0, 1)) \subset \Omega$ para $i = 1$ y 2 y $\gamma_i(1) = \beta_i$. Pongamos $\Gamma_i(t) = f(\gamma_i(t))$. Entonces $\Gamma_i([0, 1)) \subset U$ y $\Gamma_1(1) = \Gamma_2(1) = -1$. Como $g(\Gamma_i(t)) = \gamma_i(t)$ en $[0, 1)$, existe un $t^* < 1$ tal que

$$|g(\Gamma_1(t_1)) - g(\Gamma_2(t_2))| > \tfrac{1}{2}|\beta_1 - \beta_2| \qquad (t^* < t_i < 1,\ i = 1, 2) \qquad [14.36]$$

y existe un $\delta > 0$ tal que $D(-1; \delta)$ no corta ni a $\Gamma_1([0; t^*])$ ni a $\Gamma_2([0; t^*])$.

Pongamos $A(\delta) = U \cap D(-1; \delta)$. Supongamos que $0 < r < \delta$; por [14.36] y la elección de δ existen puntos w_i en el recorrido de Γ_i tales que $|1 + w_i| = r$ y

$$|g(w_1) - g(w_2)| > \tfrac{1}{2}|\beta_1 - \beta_2|. \qquad [14.37]$$

Pero $g(w_1) - g(w_2)$ es la integral de g' sobre el arco circular en U de w_2 a w_1, con centro en -1. En consecuencia

$$\tfrac{1}{2}|\beta_1 - \beta_2| < \int_{-\eta}^{\eta} |g'(-1 + re^{i\theta})| r\, d\theta \qquad (0 < r < \delta), \qquad [14.38]$$

donde $\eta = \eta(r)$ es el mayor número tal que $-1 + re^{i\theta} \in U$ si $|\theta| < \eta$. Entonces $\eta < \pi/2$, y si aplicamos la desigualdad de Schwarz a [14.38], obtenemos

$$\frac{|\beta_1 - \beta_2|^2}{4\pi r} \leqslant r \int_{-\eta}^{\eta} |g'(-1 + re^{i\theta})|^2\, d\theta \qquad (0 < r < \delta). \qquad [14.39]$$

Integremos el segundo miembro de [14.39] con respecto a r, sobre $(0, \delta)$. El resultado es el área de $g(A(\delta))$, que es finita, puesto que $g(A(\delta)) \subset \Omega$ y Ω es acotado. Pero la integral del primer miembro de [14.39] sobre $(0, \delta)$ es ∞, a menos que $\beta_1 = \beta_2$. ////

14.6.4. Teorema. *Si Ω es una región simplemente conexa acotada en el plano y si todo punto frontera de Ω es simple, entonces toda transformación conforme de Ω sobre U se extiende como homeomorfismo de $\bar{\Omega}$ sobre $\bar{U}$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $f \in H(\Omega)$, $f(\Omega) = U$ y que f es uno a uno. Por el teorema 14.6.3 podemos extender f como aplicación de $\bar{\Omega}$ en $\bar{U}$ tal que $f(\alpha_n) \to f(z)$ si $\{\alpha_n\}$ es una sucesión en Ω que converge a z. Si $\{z_n\}$ es una sucesión en $\bar{\Omega}$ que converge a z, existen puntos $\alpha_n \in \Omega$ tales que $|\alpha_n - z_n| < 1/n$ y $|f(\alpha_n) - f(z_n)| < 1/n$. Por tanto, $\alpha_n \to z$, con lo que $f(\alpha_n) \to f(z)$, y esto muestra que $f(z_n) \to f(z)$.

Hemos demostrado, pues, que nuestra extensión de f es continua en $\bar{\Omega}$. Además, $U \subset f(\bar{\Omega}) \subset \bar{U}$. La compacidad de $\bar{\Omega}$ implica que $f(\bar{\Omega})$ es compacto. Por tanto, $f(\bar{\Omega}) = \bar{U}$.

El teorema 14.6.3, *b)* muestra que f es uno a uno en $\bar{\Omega}$. Como toda aplicación uno a uno continua de un conjunto compacto tiene una inversa continua ([26], teorema 4.17), la demostración está completa. ////

14.6.5. Observaciones.

a) El teorema precedente tiene un corolario puramente topológico: Si todo punto frontera de una región plana simplemente conexa acotada Ω es simple, entonces la frontera de Ω es una curva de Jordan, y $\bar{\Omega}$ es homeomorfa a $\bar{U}$.

(Una curva de Jordan es, por definición, una imagen homeomorfa de la circunferencia unidad.)

El recíproco es cierto, pero no lo demostraremos: Si la frontera de Ω es una curva de Jordan, entonces todo punto frontera de Ω es simple.

b) Supongamos f como en el teorema 14.6.4, a, b y c puntos frontera de Ω distintos, y A, B y C puntos de T distintos. Existe una transformación bilineal φ que transforma la terna $\{f(a), f(b), f(c)\}$ en $\{A, B, C\}$; supongamos que la orientación de $\{A, B, C\}$ coincida con la de $\{f(a), f(b), f(c)\}$; entonces $\varphi(U)=U$, y la función $g=\varphi \circ f$ es un homeomorfismo de $\bar{\Omega}$ sobre $\bar{U}$ que es holomorfa en Ω y que transforma $\{a, b, c\}$ en valores prescritos $\{A, B, C\}$. Se deduce de la sección 14.3 que g está determinada de manera única por estos requisitos.

c) El teorema 14.6.4, así como la observación *b)* anterior, se extiende sin dificultad a regiones Ω simplemente conexas en la esfera de Riemann S^2, todos cuyos puntos frontera son simples, con tal que $S^2-\Omega$ tenga un interior no vacío, porque entonces una transformación bilineal nos vuelve al caso en el que Ω es una región acotada en el plano. De la misma manera U puede cambiarse, por ejemplo, por un semiplano.

d) Más generalmente, si f_1 y f_2 transforman Ω_1 y Ω_2 sobre U, como en el teorema 14.6.4, entonces $f=f_2^{-1} \circ f_1$ es un homeomorfismo de $\bar{\Omega}_1$ sobre $\bar{\Omega}_2$ que es holomorfa en Ω_1.

14.7. TRANSFORMACION CONFORME DE UN ANILLO

14.7.1. Una consecuencia del teorema de la aplicación de Riemann es que dos subregiones propias simplemente conexas cualesquiera del plano son conformemente equivalentes, puesto que cada una de ellas es conformemente equivalente al disco unidad. Esta es una propiedad muy especial de las regiones simplemente conexas. Se podría preguntar si puede extenderse a la situación siguiente en simplicidad, es decir, si dos anillos cualesquiera son conformemente equivalentes. La respuesta es negativa.

Para $0 < r < R$, sea

$$A(r, R)=\{z : r < |z| < R\} \qquad [14.40]$$

el anillo de radio interior r y radio exterior R. Si $\lambda > 0$, la aplicación $z \to \lambda z$ transforma $A(r, R)$ sobre $A(\lambda r, \lambda R)$. *Por tanto, $A(r, R)$ y $A(r_1, R_1)$ son conformemente equivalentes si $R/r=R_1/r_1$.* El hecho sorprendente es que esta condición suficiente es también necesaria; por tanto, entre todos los anillos existe un tipo conforme diferente asociado a cada número real mayor que 1.

14.7.2. Teorema. *$A(r_1, R_1)$ y $A(r_2, R_2)$ son conformemente equivalentes, si, y sólo si, $R_1/r_1=R_2/r_2$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $r_1=r_2=1$, sin pérdida de generalidad. Pongamos

$$A_1=A(1, R_1), \qquad A_2=A(1, R_2). \tag{14.41}$$

y supongamos que existe $f \in H(A_1)$ tal que f sea uno a uno y que $f(A_1)=A_2$. Sea K la circunferencia de centro 0 y radio $r=\sqrt{R_2}$. Como $f^{-1}: A_2 \to A_1$ es también holomorfa, $f^{-1}(K)$ es compacto. Por tanto:

$$A(1, 1+\epsilon) \cap f^{-1}(K)=\varnothing \tag{14.42}$$

para algún $\epsilon > 0$. Entonces $V=f(A(1, 1+\epsilon))$ es un subconjunto conexo de A_2 que no corta a K, de modo que $V \subset A(1, r)$ o $V \subset A(r, R_2)$. En el último caso, cambiemos r por R_2/r. Por tanto, podemos suponer que $V \subset A(1, r)$. Si $1 < |z_n| < 1+\epsilon$ y $|z_n| \to 1$, entonces $f(z_n) \in V$ y $\{f(z_n)\}$ no tiene puntos límite en A_2 puesto que f^{-1} es continua); por tanto, $\{f(z_n)\} \to 1$. De la misma manera, vemos que $|f(z_n)| \to R_2$ si $|z_n| \to R_1$.

Definamos ahora

$$\alpha=\frac{\log R_2}{\log R_1} \tag{14.43}$$

y

$$u(z)=2 \log |f(z)|-2\alpha \log |z| \qquad (z \in A_1). \tag{14.44}$$

Sea ∂ uno de los operadores de Cauchy-Riemann. Como $\partial \bar{f}=0$ y $\partial f=f'$, la regla de la cadena proporciona

$$\partial(2 \log |f|)=\partial (\log (\bar{f}f))=f'/f, \tag{14.45}$$

así que

$$(\partial u)(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}-\frac{\alpha}{z} \qquad (z \in A_1). \tag{14.46}$$

Por tanto, u es una función armónica en A_1 que, por el primer párrafo de esta demostración, se extiende como función continua en A_1, la cual es cero en la frontera de A_1. Como las funciones armónicas no constantes no tienen máximos o mínimos locales, concluimos que $u=0$. Por tanto:

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{\alpha}{z} \qquad (z \in A_1). \tag{14.47}$$

Pongamos $\gamma(t)=\sqrt{R_1}e^{it}$ $(-\pi \leqslant t \leqslant \pi)$; pongamos $\Gamma=f \circ \gamma$. Como en la demostración del teorema 10.7.3, [14.47] proporciona

$$\alpha=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=\mathrm{Ind}_\Gamma (0). \tag{14.48}$$

Por tanto, α es un entero. Por [14.43], $\alpha > 0$. Por [14.47], la derivada de $z^{-\alpha}f(z)$ es 0 en A_1. Por consiguiente, $f(z)=cz^\alpha$. Como f es uno a uno en A_1, $\alpha=1$. Por tanto, $R_2=R_1$. ////

EJERCICIOS

1. Obténganse condiciones necesarias y suficientes que tengan que satisfacer los números a, b, c y d de modo que la transformación bilineal $(az+b)/(cz+d)$ transforme el semiplano superior sobre sí mismo.

2. En el teorema 11.3.3 las hipótesis eran, en forma simplificada, que $\Omega \subset \Pi^+$, que L esté en el eje real y que $\operatorname{Im} f(z) \to 0$ cuando $z \to L$. Utilícese este teorema para establecer teoremas de reflxión análogos bajo las hipótesis siguientes:

   a) $\Omega \subset \Pi^+$, L está en el eje real, $|f(z)| \to 1$ cuando $z \to L$.
   b) $\Omega \subset U$, $L \subset T$, $|f(z)| \to 1$ cuando $z \to L$.
   c) $\Omega \subset U$, $L \subset T$, $\operatorname{Im} f(z) \to 0$ cuando $z \to L$.

   En el caso *b)*, si f tiene un cero en $\alpha \in \Omega$, muéstrese que su extensión tiene un polo en $1/\bar{\alpha}$. ¿Cuáles son los análogos de éste en los casos *a)* y *c)*?

3. Supongamos que R es una función racional tal que $|R(z)|=1$ si $|z|=1$. Demuéstrese que

$$R(z)=cz^m \prod_{n=1}^{k} \frac{z-\alpha_n}{1-\bar{\alpha}_n z}$$

   donde c es una constante, m es un entero y $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ son números complejos tales que $\alpha_n \neq 0$ y $|\alpha_n| \neq 1$. Nótese que cada uno de los factores anteriores tiene valor absoluto 1 si $|z|=1$.

4. Obténgase una descripción análoga de aquellas funciones racionales que son positivas en T.

   Sugerencia: Una tal función debe tener el mismo número de ceros que de polos en U. Considérense productos de factores de la forma

$$\frac{(z-\alpha)(1-\bar{\alpha}z)}{(z-\beta)(1-\beta z)}$$

   donde $|\alpha| < 1$ y $|\beta| < 1$.

5. Supongamos que f es un polinomio trigonométrico,

$$f(\theta)=\sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ik\theta},$$

   y $f(\theta) > 0$ para todo θ real. Demuéstrese que existe un polinomio $P(z)=c_0+c_1z+ +\ldots+c_nz^n$ tal que

$$f(\theta)=|P(e^{i\theta})|^2 \qquad (\theta \text{ real}).$$

   Sugerencia: Aplíquese el ejercicio 4 a la función racional $\Sigma a_k z^k$. ¿Es también válido el resultado si suponemos $f(\theta) \geqslant 0$ en lugar de $f(\theta) > 0$?

6. Obténganse los puntos fijos de las aplicaciones φ_α (definición 12.2.2). ¿Existe alguna línea recta que φ_α transforme en sí misma?

7. Obténganse todos los números complejos α para los que f_α sea uno a uno en U, donde

$$f_\alpha(z)=\frac{z}{1+\alpha z^2}.$$

   Descríbase $f_\alpha(U)$ para todos esos casos.

8. Supongamos $f(z)=z+(1/z)$. Descríbanse las familias de elipses e hipérbolas sobre las que f transforma las circunferencias de centro 0 y los rayos que pasan por el origen.

9. *a)* Supongamos $\Omega=\{z: -1 < \operatorname{Re} z < 1\}$. Obténgase una fórmula explícita para la transformación conforme uno a uno f de Ω sobre U para la que $f(0)=0$ y $f'(0) > 0$. Calcúlese $f'(0)$.

   b) Nótese que la inversa de la función construida en *a)* tiene su parte real acotada en U, mientras que su parte imaginaria es no acotada. Demuéstrese que esto implica la existencia de una función real continua u en $\bar{U}$ que es armónica en U y cuya armónica conjugada es no acotada en U. [v es la función que hace $u+iv$ holomorfa en U; podemos determinar v de manera única con el requisito de que $v(0)=0$.]

   c) Supongamos $g \in H(U)$, $|\operatorname{Re} g| < 1$ en U y $g(0)=0$. Demuéstrese que

$$|g(re^{i\theta})| \leqslant \frac{2}{\pi} \log \frac{1+r}{1-r}.$$

   Sugerencia: Véase el ejercicio 10.

   d) Sea Ω la banda que aparece en el teorema 12.3.3. Fíjese un punto $\alpha+i\beta$ en Ω. Sea h una transformación conforme uno a uno de Ω sobre Ω que transforma $\alpha+i\beta$ en 0. Demuéstrese que

$$|h'(\alpha+i\beta)| = 1/\cos\beta.$$

10. Supongamos que f y g son aplicaciones holomorfas de U en Ω, que f es uno a uno, $f(U)=\Omega$ y $f(0)=g(0)$. Demuéstrese que

$$g(D(0;r)) \subset f(D(0;r)) \qquad (0 < r < 1).$$

11. Sea Ω la mitad superior del disco unidad U. Obténgase la transformación conforme f de Ω sobre U que transforme $\{-1, 0, 1\}$ en $\{-1, -i, 1\}$. Obténgase $z \in \Omega$ tal que $f(z)=0$. Obténgase $f(i/2)$.

   Sugerencia: $f=\phi \circ s \circ \psi$, donde φ y ψ son transformaciones bilineales y $s(\lambda)=\lambda^2$.

12. Supongamos que Ω es una región convexa, $f \in H(\Omega)$ y $\operatorname{Re} f'(z) > 0$ para todo $z \in \Omega$. Demuéstrese que f es uno a uno en Ω. ¿Cambia el resultado si se debilita la hipótesis suponiendo que $\operatorname{Re} f'(z) \geqslant 0$? (Exclúyase el caso trivial $f=$constante.) Pruébese mediante un ejemplo que «convexa» no puede sustituirse por «simplemente conexa».

13. Supongamos que Ω es una región, $f_n \in H(\Omega)$ para $n=1, 2, 3, \ldots$, que cada f_n es uno a uno en Ω, y que $f_n \to f$ uniformemente en subconjuntos compactos de Ω. Demuéstrese que f o es constante o uno a uno en Ω. Pruébese que pueden presentarse ambos casos.

14. Supongamos que $\Omega=\{x+iy: -1 < y < 1\}$, $f \in H(\Omega)$, $|f| < 1$ y $f(x)$ cuando $x \to \infty$. Demuéstrese que

$$\lim_{x\to\infty} f(x+iy)=0 \qquad (-1 < y < 1)$$

y que el paso al límite es uniforme si y se limita a un intervalo $[-\alpha, \alpha]$, donde $\alpha < 1$.

   Sugerencia: Considérese la sucesión $\{f_n\}$, donde $f_n(z)=z+n$, en el cuadrado $|x| < 1$, $|y| < 1$.

   ¿Qué dice este teorema acerca del comportamiento de una función $g \in H^\infty$ cerca de un punto frontera de U en el que existe el límite radial de g?

15. Sea $\mathcal{F}$ la clase de todas las $f \in H(U)$ tales que $\operatorname{Re} f > 0$ y $f(0)=1$. Demuéstrese que $\mathcal{F}$ es una familia normal. ¿Puede omitirse la condición «$f(0)=1$»? ¿Puede cambiarse por «$|f(0)| \leqslant 1$»?

16. Sea $\mathcal{F}$ la clase de todas las $f \in H(U)$ para las que

$$\iint_U |f(z)|^2 \, dx \, dy \leqslant 1.$$

¿Es ésta una familia normal?

17. Supongamos que Ω es una región, $f_n \in H(\Omega)$, para $n=1, 2, 3, \ldots$, $f_n \to f$ uniformemente en subconjuntos compactos de Ω y que f es uno a uno en Ω. ¿Se puede deducir que a cada compacto $K \subset \Omega$ le corresponde un entero $N(K)$ tal que f_n sea uno a uno en K para todo $n > N(K)$? Dése una demostración o un contraejemplo.

18. Supongamos que Ω es una región simplemente conexa, $z_0 \in \Omega$, y que f y g son transformaciones conformes uno a uno de Ω sobre U que transforman z_0 en 0. ¿Qué relación existe entre f y g? Respóndase la misma pregunta si $f(z_0)=g(z_0)=a$, para algún $a \in U$.

19. Obténgase un homeomorfismo de U sobre U que no pueda ser extendido como función continua en $\bar{U}$.

20. Si $f \in \mathcal{S}$ (definición 14.5.1) y n es un entero positivo, demuéstrese que existe una $g \in \mathcal{S}$ tal que $g^n(z)=f(z^n)$ para toda $z \in U$.

21. Obténganse todas las $f \in \mathcal{S}$ tales que *a)* $f(U) \supset U$, *b)* $f(U) \supset \bar{U}$, *c)* $|a_2|=2$.

22. Supongamos que f es una transformación conforme uno a uno de U sobre un cuadrado de centro en 0 y $f(0)=0$. Demuéstrese que $f(iz)=if(z)$. Si $f(z)=\Sigma c_n z^n$, demuéstrese que $c_n=0$ a menos que $n-1$ sea múltiplo de 4. Generalícese esto: Cámbiese el cuadrado por otras regiones simplemente conexas con simetría de rotación.

23. Sea Ω una región acotada cuya frontera consiste en dos circunferencias que no se cortan. Demuéstrese que existe una transformación conforme uno a uno de Ω sobre un anillo. (Esto es cierto para toda región Ω tal que $S^2-\Omega$ tenga exactamente dos componentes, cada una de las cuales tenga más de un punto, pero esta situación general es más difícil de manejar.)

24. Complétense los detalles de la siguiente demostración del teorema 14.7.2. Supongamos $1 < R_2 < R_1$ y f tal que es una transformación conforme uno a uno de $A(1, R_1)$ sobre $A(1, R_2)$. Defínanse $f_1=f$ y $f_n=f \circ f_{n-1}$. Entonces una subsucesión de $\{f_n\}$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de $A(1, R_1)$ a una función g. Demuéstrese que el recorrido de g no puede contener ningún conjunto abierto no vacío (por el teorema de los tres círculos, por ejemplo). Por otra parte, demuéstrese que g no puede ser constante en la circunferencia $\{z : |z|^2=R_1\}$. Por tanto, f no puede existir.

25. He aquí otra demostración aún del teorema 14.7.2. Si f es como en 14.7.2, utilizando repetidamente el principio de reflexión se extiende f como función entera tal que $|f(z)|=1$ si $|z|=1$. Esto implica $f(z)=\alpha z^n$, donde $|\alpha|=1$ y n es un entero. Complétense los detalles.

26. Iterando el paso 2 en la demostración del teorema 14.4.2 se obtiene una demostración (debida a Koebe) del teorema de la aplicación de Riemann que es constructiva en el sentido de que no acude a la teoría de las familias normales y, por tanto, no se basa en la existencia de una subsucesión no especificada. Para el paso final de la demostración es conveniente suponer que Ω posee la pro-

piedad *h)* del teorema 13.4.1. Entonces cualquier región conformemente equivalente a Ω satisfará *h)*. Recuérdese también que *h)* implica *j)*, trivialmente.

Por el paso 1 en el teorema 14.4.2 podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $0 \in \Omega$, $\Omega \subset U$ y $\Omega \neq U$. Pongamos $\Omega = \Omega_0$. La demostración consiste en la construcción de regiones $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \ldots$ y de funciones $f_1, f_2, f_3, \ldots$, de modo que $f_n(\Omega_{n-1}) = \Omega_n$ y que las funciones $f_n \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_2 \circ f_1$ converjan a una transformación conforme de Ω sobre U.

Complétense los detalles del siguiente esbozo.

a) Supongamos construido Ω_{n-1}, sea r_n el mayor número tal que $D(0; r_n) \subset \Omega_{n-1}$, sea α_n un punto frontera de Ω_{n-1} con $|\alpha_n| = r_n$, tomemos β_n de modo que $\beta_n^2 = -\alpha_n$, y pongamos

$$F_n = \varphi_{-\alpha_n} \circ s \circ \varphi_{-\beta_n}.$$

(La notación es como en la demostración del teorema 14.4.2.) Demuéstrese que F_n tiene una inversa holomorfa G_n en Ω_{n-1}, y póngase $f_n = \lambda_n G_n$, donde $\lambda_n = |c|/c$ y $c = G_n'(0)$. (Esta f_n es la *aplicación de Koebe* asociada a Ω_{n-1}. Nótese que f_n es una función elemental. Incluye sólo dos transformaciones bilineales y una raíz cuadrada.)

b) Calcúlese que $f_n'(0) = (1+r_n)/2\sqrt{r_n} > 1$.

c) Pongamos $\psi_0(z) = z$ y $\psi_n(z) = f_n(\psi_{n-1}(z))$. Demuéstrese que ψ_n es una aplicación uno a uno de Ω sobre una región $\Omega_n \subset U$, que $\{\psi_n'(0)\}$ es acotada, que

$$\psi_n'(0) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1+r_k}{2\sqrt{r_k}},$$

y que, por tanto, $r_n \to 1$ cuando $n \to \infty$.

d) Escríbase $\psi_n(z) = zh_n(z)$, para $z \in \Omega$, pruébese que $|h_n| \leqslant |h_{n+1}|$, aplíquese el teorema de Harnack y el ejercicio 22 del capítulo 11 a $\{\log h_n\}$ para demostrar que $\{\psi_n\}$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω, y demuéstrese que el $\lim \psi_n$ es una aplicación uno a uno de Ω sobre U.

27. Demuéstrese que $\Sigma_{n=1}^{\infty}(1-r_n)^2 < \infty$, donde $\{r_n\}$ es la sucesión que aparece en el ejercicio 26. *Sugerencia:*

$$\frac{1+r}{2\sqrt{r}} = 1 + \frac{(1-\sqrt{r})^2}{2\sqrt{r}}.$$

28. Supongamos que en el ejercicio 26 tomamos $\alpha_n \in U - \Omega_{n-1}$ sin que sea $|\alpha_n| = r_n$. Por ejemplo, pidamos sólo que

$$|\alpha_n| \leqslant \frac{1+r_n}{2}.$$

¿Convergerá también la sucesión resultante $\{\psi_n\}$ a la buscada función aplicación?

29. Supóngase que Ω es una región acotada, $a \in \Omega$, $f \in H(\Omega)$, $f(\Omega) \subset \Omega$ y $f(a) = a$.

a) Póngase $f_1 = f$ y $f_n = f \circ f_{n-1}$, calcúlese $f_n'(a)$, y conclúyase que $|f'(a)| \leqslant 1$.

b) Si $f'(a) = 1$, demuéstrese que $f(z) = z$ para todo $z \in \Omega$. *Sugerencia:* Si

$$f(z) = z + c_m(z-a)^m + \ldots,$$

calcúlese el coeficiente de $(z-a)^m$ en el desarrollo de $f_n(z)$.

c) Si $|f'(a)| = 1$, demuéstrese que f es uno a uno y que $f(\Omega) = \Omega$.

Sugerencia: Si $\gamma=f'(a)$, existen enteros $n_k \to \infty$ tales que $\gamma^{n_k} \to 1$ y $f_{n_k} \to g$. Entonces $g'(a)=1$, $g(\Omega) \subset \Omega$ (por el ejercicio 20 del capítulo 10), y, por tanto, $g(z)=z$, por la parte *b)*. Utilícese g para obtener las conclusiones buscadas sobre f.

30. Sea Λ el conjunto de todas las transformaciones bilineales.

Si $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ es una cuaterna ordenada de números complejos distintos, su *razón doble* se define como

$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta]=\frac{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}{(\alpha-\delta)(\gamma-\beta)}$$

Si uno de estos números es ∞, la definición se modifica de manera obvia por continuidad. Se hace lo mismo si α coincide con β ó γ ó δ.

a) Si $\varphi(z)=[z, \alpha, \beta, \gamma]$, demuéstrese que $\varphi \in \Lambda$ y que φ transforma $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ en $\{0, 1, \infty\}$.

b) Demuéstrese que la ecuación $[w, a, b, c]=[z, \alpha, \beta, \gamma]$ puede resolverse en la forma $w=\varphi(z)$; entonces $\varphi \in \Lambda$ transforma $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ en $\{a, b, c\}$.

c) Si $\varphi \in \Lambda$, pruébese que

$$[\varphi(\alpha), \varphi(\beta), \varphi(\gamma), \varphi(\delta)]=[\alpha, \beta, \gamma, \delta].$$

d) Demuéstrese que $[\alpha, \beta, \gamma, \delta]$ es real si, y sólo si, los cuatro puntos están en la misma circunferencia o línea recta.

e) Dos puntos z y z^* se dicen *simétricos* respecto a la circunferencia (o línea recta) C que pasa por α, β y γ si $[z^*, \alpha, \beta, \gamma]$ es el complejo conjugado de $[z, \alpha, \beta, \gamma]$. Si C es la circunferencia unidad, obténgase una relación geométrica simple entre z y z^*. Hágase lo mismo si C es una línea recta.

f) Supóngase que z y z^* son simétricos respecto a C. Demuéstrese que $\varphi(z)$ y $\varphi(z^*)$ son simétricos con respecto a $\varphi(C)$, para toda $\varphi \in \Lambda$.

31. *a)* Demuéstrese que Λ (véase el ejercicio 30) es un grupo, con la composición como operación de grupo. Esto es, si $\varphi \in \Lambda$ y $\psi \in \Lambda$ demuéstrese que $\varphi \circ \psi \in \Lambda$ y que la inversa φ^{-1} de φ está en Λ. Demuéstrese que Λ es no conmutativo.

b) Demuéstrese que cada elemento de Λ (distinto de la aplicación identidad) posee uno o dos puntos fijos en S^2. [Un punto fijo de φ es un punto α tal que $\varphi(\alpha)=\alpha$.]

c) Llamaremos a dos transformaciones φ y $\varphi_1 \in \Lambda$ *conjugadas* si existe una $\psi \in \Lambda$ tal que $\varphi_1=\psi^{-1} \circ \varphi \circ \psi$. Demuéstrese que toda $\varphi \in \Lambda$ con un único punto fijo es conjugada de la transformación $z \to z+1$. Demuéstrese que toda $\varphi \in \Lambda$ con dos puntos fijos distintos es conjugada de la transformación $z \to \alpha z$, donde α es un número complejo; ¿hasta qué punto está α determinado por φ?

d) Sea α un número complejo. Pruébese que a toda $\psi \in \Lambda$ que tenga a α como su único punto fijo le corresponde un β tal que

$$\frac{1}{\varphi(z)-\alpha}=\frac{1}{z-a}+\beta.$$

Sea G_α el conjunto de todas estas transformaciones φ, más la transformación identidad. Demuéstrese que G_α es un subgrupo de Λ y que G_α es isomorfo al grupo aditivo de los números complejos.

e) Sean α y β números complejos distintos, y sea $G_{\alpha,\beta}$ el conjunto de todas las $\varphi \in \Lambda$ que tienen a α y a β como puntos fijos. Demuéstrese que toda $\varphi \in G_{\alpha,\beta}$ viene dada por

$$\frac{\varphi(z)-\alpha}{\varphi(z)-\beta}=\gamma \cdot \frac{z-\alpha}{z-\beta},$$

donde γ es un número complejo. Demuéstrese que $G_{\alpha,\beta}$ es un subgrupo de Λ que es isomorfo al grupo multiplicativo de todos los números complejos diferentes de cero.

f) Si φ es como en *d)* o en *e)*, ¿para qué circunferencias C es cierto que $\varphi(C)=C$? La respuesta debe darse en términos de los parámetros α, β y γ.

CEROS DE LAS FUNCIONES HOLOMORFAS

15.1. PRODUCTOS INFINITOS

15.1.1. Observación. Hasta ahora hemos encontrado sólo un resultado que se refiere al conjunto cero $Z(f)$ de una función holomorfa no constante f en una región Ω, el que $Z(f)$ no tiene puntos límite en Ω. Veremos ahora que esto es todo lo que se puede decir acerca de $Z(f)$, si no se imponen otras condiciones a f, por el teorema de Weierstrass (teorema 15.2.5) que afirma que todo $A \subset \Omega$ sin puntos límite en Ω es $Z(f)$ para alguna $f \in H(\Omega)$. Si $A = \{\alpha_n\}$, una forma natural de construir una tal f es tomar funciones $f_n \in H(\Omega)$ de modo que f_n tenga sólo un cero, en α_n, y considerar el límite de los productos

$$p_n = f_1 f_2 \dots f_n,$$

cuando $n \to \infty$. Ha de hacerse que la sucesión $\{p_n\}$ converja a alguna $f \in H(\Omega)$ y de modo que la función límite f no sea 0, excepto en los puntos prescritos α_n. Es aconsejable, en consecuencia, comenzar estudiando algunas propiedades generales de los productos infinitos.

15.1.2. Definición. Supongamos que $\{u_n\}$ es una sucesión de números complejos,

$$p_n = (1+u_1)(1+u_2)\dots(1+u_n), \qquad [15.1]$$

y que $u = \lim_{n\to\infty} p_n$ existe. Entonces escribimos

$$p = \prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n). \qquad [15.2]$$

Los p_n son los *productos parciales* del *producto infinito* [15.2]. Diremos que el producto infinito [15.2] converge si converge la sucesión $\{p_n\}$.

En el estudio de las series infinitas Σa_n es importante si los a_n se acercan a 0 rápidamente. Análogamente, en el estudio de los productos infinitos es interesante el que los factores sean o no próximos a 1. Este hceho se tiene en cuenta en la notación anterior: $1+u_n$ está próximo a 1 si u_n lo está a 0.

13.1.3. Lema. *Si $u_1, \dots, u_N$ son números complejos, y si*

$$p_N = \prod_{n=1}^{N} (1+u_n), \qquad p_N^* = \prod_{n=1}^{N} (1+|u_n|), \qquad [15.3]$$

entonces

$$p_N^* \leqslant \exp(|u_1| + \ldots + |u_N|) \qquad [15.4]$$

y

$$|p_N - 1| \leqslant p_N^* - 1. \qquad [15.5]$$

DEMOSTRACIÓN. Para $x \geqslant 0$, la desigualdad $1 + x \leqslant e^x$ es una consecuencia inmediata del desarrollo de e^x en potencias de x. Cambiemos x por $|u_1|, \ldots, |u_N|$ y multipliquemos las desigualdades resultantes. Esto proporciona [15.4]. Para $N = 1$, [15.5] es trivial. El caso general se obtiene por inducción: Para $k = 1, \ldots, N-1$,

$$p_{k+1} - 1 = p_k(1 + u_{k+1}) - 1 = (p_k - 1)(1 + u_{k+1}) + u_{k+1},$$

de modo que si se verifica [15.5] con k en lugar de N, entonces también

$$|p_{k+1} - 1| \leqslant (p_k^* - 1)(1 + |u_{k+1}|) + |u_{k+1}| = p_{k+1}^* - 1. \qquad ////$$

15.1.4. Teorema. *Supongamos que $\{u_n\}$ es una sucesión de funciones complejas acotadas en un conjunto S, tal que $\Sigma|u_n(s)|$ converge uniformemente en S. Entonces el producto*

$$f(s) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n(s)) \qquad [15.6]$$

converge uniformemente en S, y $f(s_0) = 0$ en algún $s_0 \in S$ si, y sólo si, $u_n(s_0) = -1$ para algún n.

Además, si $\{n_1, n_2, n_3, \ldots\}$ es una permutación cualquiera de $\{1, 2, 3, \ldots\}$ entonces tenemos también

$$f(s) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + u_{n_k}(s)) \qquad (s \in S). \qquad [15.7]$$

DEMOSTRACIÓN. La hipótesis implica que $\Sigma|u_n(s)|$ está acotada en S, y si p_N denota el producto parcial N-ésimo de [15.6], concluimos del lema 15.1.3 que existe una constante $C < \infty$ tal que $|p_N(s)| \leqslant C$ para todo N y todo s.

Tomemos ϵ, $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$. Existe un N_0 tal que

$$\sum_{n=N_0}^{\infty} |u_n(s)| < \epsilon \qquad (s \in S). \qquad [15.8]$$

Sea $\{n_1, n_2, n_3, \ldots\}$ una permutación de $\{1, 2, 3, \ldots\}$. Si $N \geqslant N_0$, si M es tan grande que

$$\{1, 2, \ldots, N\} \subset \{n_1, n_2, \ldots, n_M\}. \qquad [15.9]$$

y si $q_M(s)$ denota el producto parcial M-ésimo de [15.7], entonces

$$q_M - p_N = p_N\{\Pi(1 + u_{n_k}) - 1\}. \qquad [15.10]$$

Los n_k que aparecen en [15.10] son todos distintos y más grandes que N_0. En

consecuencia, [15.8] y el lema 15.1.3 muestran que

$$|q_M - p_N| \leqslant |p_N|(e^{\epsilon} - 1) \leqslant 2|p_N|\epsilon \leqslant 2C\epsilon. \qquad [15.11]$$

Si $n_k = k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, entonces $q_M = p_M$, y [15.11] muestra que $\{p_N\}$ converge uniformemente a una función límite f. Además, [15.11] muestra que

$$|p_M - p_{N_0}| \leqslant 2|p_{N_0}|\epsilon \quad (M > N_0), \qquad [15.12]$$

de modo que $|p_M| \geqslant (1 - 2\epsilon)|p_{N_0}|$. En consecuencia,

$$|f(s)| \geqslant (1 - 2\epsilon)|p_{N_0}(s)| \quad (s \in S), \qquad [15.13]$$

que muestra que $f(s) = 0$ si, y sólo si, $p_{N_0}(s) = 0$.

Finalmente, [15.11] muestra también que $\{q_M\}$ converge al mismo límite que $\{p_N\}$. ////

15.1.5. Teorema. *Supongamos que* $0 \leqslant u_n < 1$. *Entonces*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - u_n) > 0 \quad \textit{si, y sólo si,} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty.$$

DEMOSTRACIÓN. Si $p_N = (1 - u_1) \ldots (1 - u_N)$, entonces $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots$, $p_N > 0$, y, por tanto, existe $p = \lim p_N$. Si $\Sigma u_n < \infty$, el teorema 15.1.4 implica que $p > 0$. Por otra parte,

$$p \leqslant p_N = \prod_{1}^{N}(1 - u_n) \leqslant \exp\{-u_1 - u_2 - \ldots - u_N\},$$

y la última expresión tiende a 0 cuando $N \to \infty$, si $\Sigma u_n = \infty$. ////

Utilizaremos frecuentemente la siguiente consecuencia del teorema 15.1.4:

15.1.6. Teorema. *Supongamos que* $f_n \in H(\Omega)$ *para* $n = 1, 2, 3, \ldots$, *que ninguna* f_n *es idénticamente* 0 *en ninguna componente de* Ω, *y que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n(z)| \qquad [15.14]$$

converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω. *Entonces el producto*

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z) \qquad [15.15]$$

converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω. *Por tanto,* $f \in H(\Omega)$.

Además, tenemos

$$m(f;\, z) = \sum_{n=1}^{\infty} m(f_n;\, z) \quad (z \in \Omega). \qquad [15.16]$$

donde $m(f; z)$ se define como la multiplicidad del cero de f en z. [Si $f(z) \neq 0$, entonces $m(f; z) = 0$.]

DEMOSTRACIÓN. La primera parte se deduce inmediatamente del teorema 15.1.4. Para la segunda parte, observemos que cada $z \in \Omega$ tiene un entorno V en el cual un número finito a lo sumo de las f_n tienen un cero, por [15.14]. Tomemos primero estos factores. El producto de los restantes no tiene ceros en V, por el teorema 15.1.4, y esto proporciona [15.16]. De paso, vemos también que un número finito a lo sumo de la serie [15.16] puede ser positivo para cualquier $z \in \Omega$ dado. ////

15.2. EL TEOREMA DE FACTORIZACION DE WEIERSTRASS

15.2.1. Definición. Pongamos $E_0(z) = 1 - z$, y para $p = 1, 2, 3, \ldots$,

$$E_p(z) = (1 - z) \exp\left\{z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^p}{p}\right\}.$$

Estas funciones, introducidas por Weierstrass, se llaman a veces *factores elementales*. Su único cero está en $z = 1$. Su utilidad se basa en el hecho de que están próximos a 1 si $|z| < 1$ y p es grande, si bien $E_p(1) = 0$.

15.2.2. Lema. *Para $|z| \leqslant 1$ y $p = 0, 1, 2, \ldots$,*

$$|1 - E_p(z)| \leqslant |z|^{p+1}.$$

DEMOSTRACIÓN. Para $p = 0$, esto es obvio. Para $p \geqslant 1$, un cálculo directo muestra que

$$-E_p'(z) = z^p \exp\left\{z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^p}{p}\right\}.$$

Por tanto, $-E_p'$ tiene un cero de orden p en $z = 0$, y el desarrollo de $-E_p'$ en potencias de z tiene coeficientes reales no negativos. Como

$$1 - E_p(z) = -\int_{[0,z]} E_p'(w)\, dw,$$

$1 - E_p$ tiene un cero de orden $p + 1$ en $z = 0$, y si

$$\varphi(z) = \frac{1 - E_p(z)}{z^{p+1}},$$

entonces $\varphi(z) = \Sigma a_n z^n$, con todos los $a_n \geqslant 0$. Por tanto, $|\varphi(z)| \leqslant \varphi(1) = 1$ si $|z| \leqslant 1$, y esto proporciona la afirmación del lema. ////

15.2.3. Teorema. *Sea $\{z_n\}$ una sucesión de números complejos tales que $z_n \neq 0$ y $|z_n| \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Si $\{p_n\}$ es una sucesión de enteros no negativos tales que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+p_n} < \infty \qquad [15.17]$$

para todo r positivo (donde $r_n = |z_n|$), entonces el producto infinito

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right) \qquad [15.18]$$

define una función entera P que tiene un cero en cada punto z_n y que no tiene otros ceros en el plano.

Más precisamente, si α aparece m veces en la sucesión $\{z_n\}$, entonces P tiene un cero de orden m en α.

La condición [15.17] *se satisface siempre si $p_n = n-1$, por ejemplo.*

DEMOSTRACIÓN. Para todo r, $r_n > 2r$ para todos menos un número finito de n, por tanto, $r/r_n < \frac{1}{2}$ para estos n, por lo que se verifica [15.17] con $1 + p_n = n$.

Fijemos ahora r. Si $|z| \leqslant r$, el lema 15.2.2 muestra que

$$\left|1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right| \leqslant \left|\frac{z}{z_n}\right|^{1+p_n} \leqslant \left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+p_n}$$

si $r_n \geqslant r$, lo que se verifica para todos salvo un número finito de n. Se tiene ahora de [15.17] que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right|$$

converge uniformemente en conjuntos compactos del plano, y el teorema 15.1.6 proporciona la conclusión buscada. ////

Nota: Para algunas sucesiones $\{r_n\}$, [15.17] se verifica para una sucesión constante $\{p_n\}$. Es de interés tomar esta constante tan pequeña como sea posible; la función resultante [15.18] se llama entonces el *producto canónico* correspondiente a $\{z_n\}$. Por ejemplo, si $\Sigma 1/r_n < \infty$, podemos tomar $p_n = 0$, y el producto canónico es simplemente

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right).$$

Si $\Sigma 1/r_n = \infty$ pero $\Sigma 1/r_n^2 < \infty$, el producto canónico es

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{z/z_n}.$$

Los productos canónicos son de gran interés en el estudio de las funciones enteras de orden finito. (Véase el ejercicio 2 para las definiciones.)

Enunciamos ahora el teorema de factorización de Weierstrass.

15.2.4. Teorema. *Sea f una función entera, supongamos que $f(0) \neq 0$, y sean $z_1, z_2, z_3, \ldots$ los ceros de f, enumerados de acuerdo con su multiplicidad. Entonces existe una función entera g y una sucesión $\{p_n\}$ de enteros no nega-*

tivos, tales que

$$f(z)=e^{g(z)}\prod_{n=1}^{\infty}E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right). \qquad [15.19]$$

Nota: a) Si f tiene un cero de orden k en $z=0$, lo anterior se puede aplicar a $f(z)/z^k$. *b)* La factorización [15.19] no es única; una factorización única puede asociarse a las f cuyos ceros satisfacen la condición requerida para la convergencia de un producto canónico.

DEMOSTRACIÓN. Sea P el producto del teorema 15.2.3, formado con los ceros de f. Entonces f/P tiene sólo singularidades evitables en el plano, y, por tanto, es (o puede extenderse como) una función entera. Además, f/P no tiene ceros, y como el plano es simplemente conexo, $f/P=e^g$ para alguna función entera g. ////

La demostración del teorema 15.2.3 se adapta fácilmente a un conjunto abierto:

15.2.5. Teorema. *Sea Ω un conjunto abierto en S^2, $\Omega\neq S^2$. Supongamos que $A\subset\Omega$ y que A no tiene puntos límite en Ω. A cada $\alpha\in A$ le asociamos un entero positivo $m(\alpha)$. Entonces existe una $f\in H(\Omega)$ todos cuyos ceros están en A, y tal que f tiene un cero de orden $m(\alpha)$ en cada $\alpha\in A$.*

DEMOSTRACIÓN. Simplifica el razonamiento, y no provoca una pérdida de generalidad, suponer que $\infty\in\Omega$ pero $\infty\notin A$. (Si no fuera así, puede aplicarse una transformación bilineal conveniente.) Entonces $S^2-\Omega$ es un subconjunto compacto no vacío del plano, e ∞ no es un punto límite de A.

Si A es finito, podemos tomar como f una función racional.

Si A es infinito, entonces A es numerable (porque de otra forma habría un punto límite en Ω). Sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión cuyos términos están en A y en la cual cada $\alpha\in A$ se enumera precisamente $m(\alpha)$ veces. Asociemos a cada α_n un punto $\beta_n\in S^2-\Omega$ tal que $|\beta_n-\alpha_n|\leqslant|\beta-\alpha_n|$ para todo $\beta\in S^2-\Omega$; esto es posible porque $S^2-\Omega$ es compacto. Entonces

$$|\beta_n-\alpha_n|\to 0$$

cuando $n\to\infty$; de otro modo A tendría un punto límite en Ω. Pretendemos probar que

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}E_n\left(\frac{\alpha_n-\beta_n}{z-\beta_n}\right)$$

posee las propiedades deseadas.

Pongamos $r_n=2|\alpha_n-\beta_n|$. Sea K un subconjunto compacto de Ω. Como $r_n\to 0$, existe un N tal que $|z-\beta_n|>r_n$ para todo $z\in K$ y todo $n\geqslant N$. Por tanto,

$$\left|\frac{\alpha_n-\beta_n}{z-\beta_n}\right|\leqslant\frac{1}{2},$$

lo que implica, por el lema 15.2.2, que

$$\left|1-E_n\left(\frac{\alpha_n-\beta_n}{z-\beta_n}\right)\right|\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\qquad(z\in K,\ n\geqslant N),$$

y esto completa la demostración, por el teorema 15.1.6. ////

Como una consecuencia, podemos obtener ahora una caracterización de las funciones meromorfas (véase la definición 10.7.1):

15.2.6. Teorema. *Toda función meromorfa en un conjunto abierto Ω es un cociente de dos funciones que son holomorfas en Ω.*

El recíproco es obvio: Si $g \in H(\Omega)$, $h \in H(\Omega)$, y h no es idénticamente 0 en ninguna componente de $\bar{U}$, entonces g/h es meromorfa en Ω.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que f es meromorfa en Ω; sea A el conjunto de todos los polos de f en Ω; y para cada $\alpha \in A$, sea $m(\alpha)$ el orden del polo de f en α. Por el teorema 15.2.5 existe una $h \in H(\Omega)$ tal que h tiene un cero de multiplicidad $m(\alpha)$ en cada $\alpha \in A$, y no tiene otros ceros. Pongamos $g=fh$. Las singularidades de g en los puntos de A son evitables, y, por tanto, podemos extender g de modo que $g \in H(\Omega)$. Claramente $f=g/h$ en $\Omega - A$.

15.3. UN PROBLEMA DE INTERPOLACION

El teorema de Mittag-Leffler puede combinarse con el teorema de Weierstrass 15.2.5 para dar una solución del problema siguiente: ¿Podemos tomar un conjunto arbitrario $A \subset \Omega$, sin puntos límite en Ω, y obtener una función $f \in H(\Omega)$ que tome valores previamente asignados en todo punto de A? La respuesta es afirmativa. De hecho, podemos obtener algo mejor, y prescribir un número finito de derivadas en cada punto de A:

15.3.1. Teorema. *Supongamos que Ω es un conjunto abierto en el plano, $A \subset \Omega$, A no tiene puntos límite en Ω, y a cada $\alpha \in A$ le está asociado un entero no negativo $m(\alpha)$ y números complejos $w_{n,\alpha}$, $0 \leqslant n \leqslant m(\alpha)$. Entonces existe una $f \in H(\Omega)$ tal que*

$$f^{(n)}(\alpha) = n!\, w_{n,\alpha} \qquad (\alpha \in A,\ 0 \leqslant n \leqslant m(\alpha)). \tag{15.20}$$

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema 15.2.5, existe una $g \in H(\Omega)$ cuyos únicos ceros están en A y tal que g tiene un cero de orden $m(\alpha)+1$ en cada $\alpha \in A$. Pretendemos probar que podemos asociar a cada $\alpha \in A$ una función P_α de la forma

$$P_\alpha(z) = \sum_{j=1}^{1+m(\alpha)} c_{j,\alpha}(z-\alpha)^{-j} \tag{15.21}$$

tal que gP_α posea el desarrollo en serie de potencias

$$g(z)P_\alpha(z) = w_{0,\alpha} + w_{1,\alpha}(z-\alpha) + \ldots + w_{m(\alpha),\alpha}(z-\alpha)^{m(\alpha)} + \ldots \tag{15.22}$$

en algún disco de centro α.

Para simplificar la escritura, tomemos $\alpha=0$ y $m(\alpha)=m$, y omitamos los subíndices α. Para z cerca de 0, tenemos

$$g(z) = b_1 z^{m+1} + b_2 z^{m+2} + \ldots, \tag{15.23}$$

donde $b_1 \neq 0$. Si

$$P(z) = c_1 z^{-1} + \ldots + c_{m+1} z^{-m-1}, \tag{15.24}$$

entonces

$$g(z)P(z)=(c_{m+1}+c_m z+\ldots+c_1 z^m)\,(b_1+b_2 z+b_3 z^2+\ldots). \qquad [15.25]$$

Las b son dadas, y queremos elegir las c de modo que

$$g(z)P(z)=w_0+w_1 z+\ldots+w_m z^m+\ldots \qquad [15.26]$$

Si comparamos los coeficientes de $1, z, \ldots, z^m$ en [15.25] y [15.26], podemos resolver las ecuaciones resultantes sucesivamente para $c_{m+1}, c_m, \ldots, c_1$, puesto que $b_1 \neq 0$.

De esta forma obtenemos las P_α buscadas. El teorema de Mittag-Leffler proporciona una función meromorfa h en Ω cuyas partes principales son estas P_α, y si hacemos $f=gh$ obtenemos una función con las propiedades deseadas. ////

La solución de este problema de interpolación puede utilizarse para determinar la estructura de todos los ideales generados de forma finita en los anillos $H(\Omega)$.

15.3.2. Definición. *El ideal* $[g_1, \ldots, g_n]$ *generado por las funciones* $g_1, \ldots, g_n \in H(\Omega)$ es el conjunto de todas las funciones de la forma $\Sigma f_i g_i$, donde $f_i \in H(\Omega)$ para $i=1, \ldots, n$. Un *ideal principal* es aquél generado por una sola función. Nótese que $[1]=H(\Omega)$.

Si $f \in H(\Omega)$, y f no es idénticamente 0 en un entorno de α, se denotará mediante $m(f;\alpha)$ la multiplicidad del cero de f en α. Si $f(\alpha)\neq 0$, entonces $m(f;\alpha)=0$ como en el teorema 15.1.6.

15.3.3. Teorema. *Todo ideal generado de forma finita en* $H(\Omega)$ *es principal.*

Más explícitamente: Si $g_1, \ldots, g_n \in H(\Omega)$, entonces existen funciones $g, f_i, h_i \in H(\Omega)$ tales que

$$g=\sum_{i=1}^{n} f_i g_i \quad \text{y} \quad g_i=h_i g \quad (1\leqslant i\leqslant n).$$

DEMOSTRACIÓN. Supondremos que Ω es una región. Esto se hace para evitar los problemas que plantean funciones que son idénticamente 0 en algunas componentes de Ω, pero no en todas. Una vez que el teorema haya sido demostrado para regiones, puede aplicarse este caso a cada componente de un conjunto abierto arbitrario Ω, y puede obtenerse el teorema en su forma general. Dejaremos los detalles como ejercicio.

Sea $P(n)$ la siguiente proposición:

Si $g_1, \ldots, g_n \in H(\Omega)$, *si ninguna* g *es idénticamente* 0, *y si ningún punto de* Ω *es un cero de toda* g_i, *entonces* $[g_1, \ldots, g_n]=[1]$.

$P(1)$ es trivial. Supongamos que $n>1$ y que $P(n-1)$ es cierta. Tomemos $g_1, \ldots, g_n \in H(\Omega)$, sin cero común. Por el teorema de Weierstrass 15.2.5 existe una $\varphi \in H(\Omega)$ tal que

$$m(\varphi;\alpha)=\text{mín}\,\{m(g_i;\alpha):\ 1\leqslant i\leqslant n-1\} \quad (\alpha\in\Omega). \qquad [15.27]$$

Las funciones $f_i=g_i/\varphi$ $(1\leqslant i\leqslant n-1)$ están en $H(\Omega)$ y no tienen ningún cero

común en Ω. Como se verifica $P(n-1)$, $[f_1, \ldots, f_{n-1}]=[1]$. Por tanto:

$$[g_1, \ldots, g_{n-1}, g_n]=[\varphi, g_n]. \qquad [15.28]$$

Más todavía, nuestra elección de φ muestra que $g_n(\alpha)\neq 0$ en todo punto del conjunto $A=\{\alpha \in \Omega : \varphi(\alpha)=0\}$. Por tanto, se deduce del teorema 15.3.1 que existe una $h \in H(\Omega)$ tal que

$$m(1-hg_n;\ \alpha)\geqslant m(\varphi;\ \alpha) \qquad (\alpha \in \Omega). \qquad [15.29]$$

Una tal h se obtiene mediante una elección conveniente de los valores prescritos de $h^{(k)}(\alpha)$ para $\alpha \in A$ y para $0\leqslant k\leqslant m(\varphi;\ \alpha)$.

Por [15.29], $(1-hg_n)/\varphi$ tiene singularidades evitables. Por tanto,

$$1=hg_n+f\varphi \qquad [15.30]$$

para alguna $f \in H(\Omega)$. De [15.28] y [15.30], $1 \in [g_1, \ldots, g_n]$.

Hemos demostrado que $P(n-1)$ implica $P(n)$. Por tanto, $P(n)$ es cierta para todo n.

Finalmente, supongamos que $G_1, \ldots, G_n \in H(\Omega)$, y que ninguna G_i es idénticamente 0. (Esto no representa pérdida de generalidad.) Otra aplicación del teorema 15.2.3 proporciona $\varphi \in H(\Omega)$ con $m(\varphi;\ \alpha)=\min m(G_i;\ \alpha)$ para todo $\alpha \in \Omega$. Pongamos $g_i=G_i/\varphi$. Entonces $g_i \in H(\Omega)$, y las funciones $g_1, \ldots, g_n$ no tienen ceros comunes en Ω. Por $P(n)$, $[g_1, \ldots, g_n]=[1]$. Por tanto, $[G_1, \ldots, G_n]=[\varphi]$. Esto completa la demostración. ////

15.4. FORMULA DE JENSEN

15.4.1. Observación. Como vimos en el teorema 15.2.5, la situación de los ceros de una función holomorfa en una región Ω no tiene ninguna restricción salvo la obvia que se refiere a la ausencia de puntos límite en Ω. La situación es bastante diferente si cambiamos $H(\Omega)$ por ciertas subclases definidas mediante ciertas condiciones de crecimiento. En esas situaciones la distribución de los ceros ha de satisfacer ciertas condiciones cuantitativas. La base de muchos de estos teoremas es la fórmula de Jensen (teorema 15.4.3). La aplicaremos a ciertas clases de funciones enteras y a ciertas subclases de $H(U)$.

El lema siguiente presenta una oportunidad para aplicar el teorema de Cauchy en el cálculo de una integral definida.

15.4.2. Lema. $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|1-e^{i\theta}|\,d\theta=0.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\Omega=\{z : \operatorname{Re} z<1\}$. Como $1-z\neq 0$ en Ω y Ω es simplemente conexo, existe una $h \in H(\Omega)$ tal que

$$\exp\{h(z)\}=1-z$$

en Ω, y esta h está determinada de manera única si requerimos que $h(0)=0$. Como $\operatorname{Re}(1-z)>0$ en Ω, tenemos entonces

$$\operatorname{Re} h(z)=\log|1-z|, \qquad |\operatorname{Im} h(z)|<\frac{\pi}{2} \qquad (z \in \Omega). \qquad [15.31]$$

Para $\delta>0$ pequeño, sea Γ el camino

$$\Gamma(t)=e^{it} \qquad (\delta\leqslant t\leqslant 2\pi-\delta), \qquad [15.30]$$

y sea γ el arco circular cuyo centro está en 1 y que va de $e^{i\delta}$ a $e^{-i\delta}$ dentro de U. Entonces

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta}\log|1-e^{i\theta}|\,d\theta=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}h(z)\frac{dz}{z}\right]=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}h(z)\frac{dz}{z}\right]. \qquad [15.33]$$

La última igualdad se basa en el teorema de Cauchy; notemos que $h(0)=0$.

La longitud de γ es menor que $\pi\delta$, por lo que [15.31] muestra que el valor absoluto de la última integral de [15.33] es menor que $C\delta\log(1/\delta)$, donde C es una constante. Ello proporciona el resultado si $\delta\to 0$ en [15.33]. ////

15.4.3. Teorema. *Supongamos que* $\Omega=D(0;R)$, $f\in H(\Omega)$, $f(0)\neq 0$, $0<r<R$, *y que* $\alpha_1,\ldots,\alpha_N$ *son los ceros de* f *en* $\bar{D}(0;R)$, *enumerados de acuerdo con sus muliplicidades. Entonces*

$$|f(0)|\prod_{n=1}^{N}\frac{r}{|\alpha_n|}=\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(re^{i\theta})|\,d\theta\right\}. \qquad [15.34]$$

Esta expresión se conoce como *fórmula de Jensen.* La hipótesis $f(0)\neq 0$ no es un problema en las aplicaciones, pues si f tiene un cero de orden k en 0, la fórmula puede aplicarse a $f(z)/z^k$.

DEMOSTRACIÓN. Ordenemos los puntos α_j de modo que $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ estén en $D(0;r)$ y $|\alpha_{m+1}|=\ldots=|\alpha_N|=r$. (Por supuesto, podemos tener $m=N$ o $m=0$.) Pongamos

$$g(z)=f(z)\prod_{n=1}^{m}\frac{r^2-\bar{\alpha}_n z}{r(\alpha_n-z)}\prod_{n=m+1}^{N}\frac{\alpha_n}{\alpha_n-z}. \qquad [15.35]$$

Entonces $g\in H(D)$, donde $D=D(0;r+\epsilon)$ para algún $\epsilon>0$, g no tiene ceros en D, por lo que $\log|g|$ es armónica en D (teorema 13.4.2), y, por tanto,

$$\log|g(0)|=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|g(re^{i\theta})|\,d\theta. \qquad [15.36]$$

Por [15.35],

$$|g(0)|=|f(0)|\prod_{n=1}^{m}\frac{r}{|\alpha_n|}. \qquad [15.37]$$

Para $1\leqslant n\leqslant m$, los factores en [15.35] tienen valor absoluto 1 si $|z|=r$. Si $\alpha_n=re^{i\theta_n}$ para $m<n\leqslant N$, se deduce que

$$\log|g(re^{i\theta})|=\log|f(re^{i\theta})|-\sum_{n=m+1}^{N}\log|1-e^{i(\theta-\theta_n)}|. \qquad [15.38]$$

El lema 15.4.2 muestra, en consecuencia, que la integral en [15.36] no cambia si g se reemplaza por f. La comparación con [15.37] proporciona [15.34]. ////

La fórmula de Jensen da lugar a una desigualdad que relaciona los valores en la frontera de las funciones holomorfas acotadas en U (recordamos que la clase de estas funciones fue denotada mediante H^∞):

15.4.4. Teorema. *Si $f \in H^\infty$, f no idénticamente 0, definamos*

$$\mu_r(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(re^{i\theta})| \, d\theta \qquad (0 < r < 1) \qquad [15.39]$$

y

$$\mu^*(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f^*(re^{i\theta})| \, d\theta \qquad [15.40]$$

donde f^* es la función límite radial de f, como en el teorema 11.4.4. *Entonces*

$$\mu_r(f) \leqslant \mu_s(f) \quad \text{si} \quad 0 < r < s < 1, \qquad [15.41]$$

$$\mu_r(f) \to \log |f(0)| \quad \text{cuando} \quad r \to 0, \qquad [15.42]$$

y

$$\mu_r(f) \leqslant \mu^*(f) \quad \text{si} \quad 0 < r < 1. \qquad [15.43]$$

Notemos la siguiente consecuencia: Podemos tomar r de modo que $f(z) \neq 0$ si $|z| = r$; entonces $\mu_r(f)$ es finita, y también lo es $\mu^*(f)$, por [15.43]. *Por tanto,* $\log |f^*| \in L^1(T)$, *y* $f^*(e^{i\theta}) \neq 0$ *en casi todo punto de* T.

DEMOSTRACIÓN. Existe un entero $m \geqslant 0$ tal que $f(z) = z^m g(z)$, $g \in H^\infty$ y $g(0) \neq 0$. Apliquemos la fórmula de Jensen [15.34] a g en lugar de f. Obviamente, su primer miembro no puede decrecer si r aumenta. Por tanto, $\mu_r(g) \leqslant \mu_s(g)$ si $r < s$. Como

$$\mu_r(f) = \mu_r(g) + m \log r$$

hemos demostrado [15.41].

Supongamos ahora, sin pérdida de generalidad, que $|f| \leqslant 1$. Escribamos $f_r(e^{i\theta})$ en lugar de $f(re^{i\theta})$. Entonces $f_r \to f(0)$ cuando $r \to 0$, y $f_r \to f^*$ en c.t.p. cuando $r \to 1$. Como $\log(1/|f_r|) \geqslant 0$, dos aplicaciones del lema de Fatou, combinadas con [15.41], proporciona [15.42] y [15.43]. ////

15.4.5. Ceros de las funciones enteras. Supongamos que f es una función entera, que

$$M(r) = \sup_\theta |f(re^{i\theta})| \qquad (0 < r < \infty), \qquad [15.44]$$

y que $n(r)$ es el número de ceros de f en $\bar{D}(0; r)$. Supongamos $f(0) = 1$, por simplicidad. La fórmula de Jensen proporciona

$$M(2r) \geqslant \exp\left\{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(2re^{i\theta})| \, d\theta\right\} = \prod_{n=1}^{n(2r)} \frac{2r}{|\alpha_n|} \geqslant \prod_{n=1}^{n(r)} \frac{2r}{|\alpha_n|} \geqslant 2^{n(r)},$$

si $\{\alpha_n\}$ es la sucesión de ceros de f, dispuestos de modo que $|\alpha_1| \leqslant |\alpha_2| \leqslant \ldots$ Por tanto:

$$n(r) \log 2 \leqslant \log M(2r). \qquad [15.45]$$

Entonces la rapidez con la que $n(r)$ puede crecer (es decir, la densidad de los ceros de f) está controlada por la velocidad de crecimiento de $M(r)$.

Supongamos, para considerar una situación más específica, que para r grande

$$M(r) < \exp\{Ar^k\} \qquad [15.46]$$

donde A y k son números positivos dados. Entonces [15.45] lleva a que

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log n(r)}{\log r} \leqslant k. \qquad [15.47]$$

Por ejemplo, si k es un entero positivo y

$$f(z) = 1 - e^{z^k}, \qquad [15.48]$$

entonces $n(r)$ es aproximadamente $\pi^{-1}kr^k$, de modo que

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log n(r)}{\log r} = k. \qquad [15.49]$$

Esto muestra que no se puede mejorar la acotación [15.47].

15.5. PRODUCTOS DE BLASCHKE

La fórmula de Jensen hace posible determinar las condiciones precisas que deben satisfacer los ceros de una $f \in H^\infty$ no constante.

15.5.2. Teorema. *Si $\{\alpha_n\}$ es una sucesión en U tal que $\alpha_n \neq 0$ y*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\alpha_n|) < \infty, \qquad [15.50]$$

si k es un entero no negativo, y si

$$B(z) = z^k \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n - z}{1 - \bar{\alpha}_n z} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \qquad (z \in U), \qquad [15.51]$$

entonces $B \in H^\infty$, y B no tiene ceros excepto en los puntos α_n (y en el origen, si $k > 0$).

Llamamos a esta función B un *producto de Blaschke.* Notemos que pueden repetirse algunos de los α_n, en cuyo caso B tiene ceros múltiples en esos puntos. Notemos además que cada factor de [15.51] tiene valor absoluto 1 en T.

El término «producto de Blaschke» se utilizará también si hay sólo un número finito de factores, y aún si no hay ninguno, en cuyo caso $B(z) = 1$.

DEMOSTRACIÓN. El término n-ésimo de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{\alpha_n - z}{1 - \bar{\alpha}_n z} \cdot \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \right|$$

es

$$\left|\frac{\alpha_n+|\alpha_n|z}{(1-\bar{\alpha}_n z)\alpha_n}\right|(1-|\alpha_n|)\leqslant\frac{1+r}{1-r}(1-|\alpha_n|)$$

si $|z|\leqslant r$. Por tanto, el teorema 15.1.6 muestra que $B\in H(U)$ y que B tiene sólo los ceros prescritos. Como cada factor en [15.51] tiene valor absoluto menor que 1 en U, se deduce que $|B(z)|<1$, y la demostración está completa. ////

15.5.2. Observación. El teorema precedente muestra que

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|\alpha_n|)<\infty \qquad [15.52]$$

es una condición *suficiente* para la existencia de una $f\in H^\infty$ que tiene sólo los ceros prescritos $\{\alpha_n\}$. Esta condición también resulta ser necesaria: *Si $f\in H^\infty$ y f no es idénticamente cero, los ceros de f deben satisfacer* [15.52]. Este es un caso especial del teorema 15.53. Es interesante notar que [15.52] es una condición necesaria en una clase mucho más amplia de funciones, que describimos a continuación.

Para cualquier número real t, definamos $\log^+ t=\log t$ si $t\geqslant 1$ y $\log^+ t=0$ si $t<1$. Sea N (de Nevanlinna) la clase de todas las $f\in H(U)$ para las que

$$\sup_{0<r<1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta<\infty. \qquad [15.53]$$

Es claro que $H^\infty\subset N$. Notemos que [15.53] impone una restricción a la velocidad de crecimiento de $|f(z)|$ cuando $|z|\to 1$, mientras que la acotación de las integrales

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(re^{i\theta})|\,d\theta \qquad [15.54]$$

no impone una tal restricción. Por ejemplo, [15.54] es independiente de r si $f=e^g$ para cualquier $g\in H(U)$. El punto importante a tener en cuenta es que [15.54] puede permanecer pequeño porque $\log|f|$ toma valores grandes, tanto positivos como negativos, mientras que $\log^+|f|\geqslant 0$. La clase N se discutirá con más extensión en el capítulo 17.

15.5.3. Teorema. *Supongamos que $f\in N$, que f no es idénticamente* 0 *en U y que $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots$ son los ceros de f, enumerados de acuerdo con sus multiplicidades. Entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|\alpha_n|)<\infty. \qquad [15.55]$$

(Suponemos tácitamente que f tiene infinitos ceros en U. Si sólo tuviera un número finito, la suma anterior tendría sólo un número finito de términos, y no habría nada que demostrar. Además $|\alpha_n|\leqslant|\alpha_{n+1}|$.)

DEMOSTRACIÓN. Si f tiene un cero de orden m en el origen, y $g(z)=z^{-m}f(z)$, entonces $g \in N$, y g tiene los mismos ceros que f, salvo en el origen. Por tanto, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $f(0) \neq 0$. Sea $n(r)$ el número de ceros de f en $\bar{D}(0; r)$, fijemos k, y tomemos $r < 1$ de modo que $n(r) > k$. Entonces la fórmula de Jensen

$$|f(0)| \prod_{n=1}^{n(r)} \frac{r}{|\alpha_n|} = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log |f(re^{i\theta})|\, d\theta\right\} \qquad [15.56]$$

implica que

$$|f(0)| \prod_{n=1}^{k} \frac{r}{|\alpha_n|} \leqslant \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta\right\}. \qquad [15.57]$$

Nuestra hipótesis de que $f \in N$ es equivalente a la existencia de una constante $C < \infty$ que supera al segundo miembro de [15.57] para todo r, $0 < r < 1$. Se tiene que

$$\prod_{n=1}^{k} |\alpha_n| \geqslant C^{-1}|f(0)|r^k. \qquad [15.58]$$

La desigualdad persiste, para todo k, cuando $r \to 1$. Por tanto,

$$\prod_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \geqslant C^{-1}|f(0)| > 0. \qquad [15.59]$$

Por el teorema 15.1.5, [15.59] implica [15.55]. ////

Corolario. *Si $f \in H^\infty$ (o aún si $f \in N$), si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ son los ceros de f en U, y si $\Sigma(1-|\alpha_n|)=\infty$, entonces $f(z)=0$ para todo $z \in U$.*

Por ejemplo, ninguna función holomorfa acotada no constante en U puede tener un cero en cada uno de los puntos $(n-1)/n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$.

Concluimos esta sección con un teorema que describe el comportamiento de un producto de Blaschke cerca de la frontera de U. Recordemos que como miembro de H^∞, B posee límites radiales $B^*(e^{i\theta})$ en casi todos los puntos de T.

15.5.4. Teorema. *Si B es un producto de Blaschke, entonces $|B^*(e^{i\theta})|=1$ en c.t.p., y*

$$\lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log |B(re^{i\theta})|\, d\theta = 0. \qquad [15.60]$$

DEMOSTRACIÓN. La existencia del límite es una consecuencia del hecho de que la integral es una función monótona de r. Supongamos que $B(z)$ es como en el teorema 15.5.1, y pongamos

$$B_N(z) = \prod_{n=N}^{\infty} \frac{\alpha_n - z}{1-\bar{\alpha}_n z} \cdot \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \qquad [15.61]$$

Como $\log(|B/B_N|)$ es continua en un conjunto abierto que contiene T, el límite [15.60] no cambia si B se reemplaza por B_N. Si aplicamos el teorema 15.4.4 a B_N obtenemos, en consecuencia:

$$\log|B_N(0)| \leqslant \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|B(re^{i\theta})|\, d\theta \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|B^*(e^{i\theta})|\, d\theta \leqslant 0. \quad [15.62]$$

Cuando $N \to \infty$, el primer término de [15.62] tiende a 0. Esto proporciona [15.60], y muestra que $\int \log|B^*| = 0$. Como $\log|B^*| \leqslant 0$ en c.t.p., el teorema 1.10.5, *a)* implica que $\log|B^*| = 0$ en c.t.p. ////

15.6. EL TEOREMA DE MÜNTZ-SZASZ

15.6.1. Observación. Un teorema clásico de Weierstrass ([26], teorema 7.24) establece que los polinomios son densos en $C(I)$, el espacio de todas las funciones complejas continuas definidas en el intervalo cerrado $I = [0, 1]$, con la norma del supremo. En otras palabras, el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de las funciones

$$1,\ t,\ t^2,\ t^3,\ \ldots \qquad [15.63]$$

es denso en $C(I)$. Esto se expresa a veces diciendo que las funciones [15.63] *engendran* $C(I)$.

Esto sugiere una cuestión: Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$, ¿bajo qué condiciones es cierto que las funciones

$$1,\ t^{\lambda_1},\ t^{\lambda_2},\ t^{\lambda_3},\ \ldots \qquad [15.64]$$

engendran $C(I)$?

Puede verse que este problema tiene una conexión muy natural con el problema de la distribución de los ceros de una función holomorfa acotada en un semiplano (o en un disco; los dos son conformemente equivalentes). La sorprendentemente precisa respuesta es que las *funciones* [15.64] *engendran* $C(I)$ *si, y sólo si,* $\sum 1/\lambda_n = \infty$.

En realidad, la demostración proporciona una conclusión aún más precisa:

15.6.2. Teorema. *Supongamos* $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$ *y sea* X *la adherencia en* $C(I)$ *del conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de las funciones*

$$1,\ t^{\lambda_1},\ t^{\lambda_2},\ t^{\lambda_3},\ \ldots$$

a) *Si* $\sum 1/\lambda_n = \infty$, *entonces* $X = C(I)$.

b) *Si* $\sum 1/\lambda_n < \infty$, *y si* $\lambda \notin \{\lambda_n\}$, $\lambda \neq 0$, *entonces* X *no contiene la función* t^{λ}.

DEMOSTRACIÓN. Una consecuencia del teorema de Hahn-Banach (teorema 5.5.4) es que $\varphi \in C(I)$ pero $\varphi \notin X$ si, y sólo si, existe un funcional lineal acotado sobre $C(I)$ que no se anule en φ, pero que se anule en todo X. Como todo funcional lineal acotado sobre $C(I)$ viene dado por integración con respecto a una medida de Borel compleja sobre I, *a)* será una consecuencia de la proposición siguiente:

Si $\Sigma 1/\lambda_n = \infty$ *y si* μ *es una medida de Borel compleja sobre* I *tal que*

$$\int_I t^{\lambda_n}\, d\mu(t) = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{15.65}$$

entonces también

$$\int_I t^k\, d\mu(t) = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{15.66}$$

En efecto, si se demuestra esto, la observación precedente muestra que X contiene todas las funciones t^k; como $1 \in X$, todos los polinomios están, pues, en X, y el teorema de Weierstrass implica en consecuencia que $X = C(I)$.

Por tanto, supongamos que se verifica [15.65]. Como los integrandos en [15.65] y [15.66] se anulan en 0, podemos suponer también que μ está concentrada en $(0, 1]$. Asociamos a μ la función

$$f(z) = \int_I t^z\, d\mu(t). \tag{15.67}$$

Para $t > 0$, $t^z = \exp(z \log t)$, por definición. Pretendemos probar que f es holomorfa en el semiplano derecho. La continuidad de f se comprueba fácilmente, y podemos aplicar entonces el teorema de Morera. Más aún, si $z = x + iy$, si $x > 0$, y si $0 < t \leqslant 1$, entonces $|t^z| = t^x \leqslant 1$. Por tanto, f está acotada en el semiplano derecho, y [15.65] dice que $f(\lambda_n) = 0$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$ Definamos

$$g(z) = f\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \qquad (z \in U). \tag{15.68}$$

Entonces $g \in H^\infty$ y $g(\alpha_n) = (\lambda_n - 1)/(\lambda_n + 1)$. Un cálculo simple muestra que $\Sigma(1 - |\alpha_n|) = \infty$ si $\Sigma 1/\lambda_n = \infty$. El corolario del teorema 15.5.3 nos dice, en consecuencia, que $g(z) = 0$ para todo $z \in U$. Por tanto, $f = 0$. En particular, $f(k) = 0$ para $k = 1, 2, 3, \ldots$, y esto es [15.66]. Hemos probado, pues, la parte *a)* del teorema.

Para demostrar *b)* bastará construir una medida μ sobre I tal que [15.67] defina una función f que sea holomorfa en el semiplano $\operatorname{Re} z > -1$ (o cualquier número negativo), que sea 0 en 0, λ_1, λ_2, λ_3, ... y que no tenga otros ceros en este semiplano. En efecto, el funcional inducido por esta medida μ se anulará en X, pero no se anulará en ninguna función t^λ si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \notin \{\lambda_n\}$.

Comenzamos construyendo una función f que tenga precisamente esos ceros, y probaremos que esa f puede representarse en la forma [15.67]. Definamos

$$f(z) = \frac{z}{(2+z)^3} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n - z}{2 + \lambda_n + z}. \tag{15.69}$$

Como

$$1 - \frac{\lambda_n - z}{2 + \lambda_n + z} = \frac{2z + 2}{2 + \lambda_n + z},$$

el producto infinito de [15.69] converge uniformemente en todo conjunto compacto que no contenga a ninguno de los puntos $-\lambda_n - 2$. Se tiene que f es meromorfa en todo el plano, con polos en -2 y en $-\lambda_n - 2$, y con ceros

en $0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ Además, cada factor del producto infinito [15.69] es menor que 1 en valor absoluto si $\operatorname{Re} z > -1$. Por tanto, $|f(z)| \leqslant 1$ si $\operatorname{Re} z \geqslant -1$. El factor $(2+z)^3$ asegura que la restricción de f a la recta $\operatorname{Re} z = -1$ está en L^1.

Fijemos z de modo que $\operatorname{Re} z > -1$, y consideremos la fórmula de Cauchy para $f(z)$, donde el camino de integración consta de la semicircunferencia con centro en -1, radio $R > 1+|z|$, desde $-1-iR$ a $-1+R$ y a $-1+iR$, seguida del intervalo que va desde $-1+iR$ a $-1-iR$. La integral sobre la semicircunferencia tiende a 0 cuando $R \to \infty$; por tanto, queda

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(-1+is)}{-1+is-z}\, ds \qquad (\operatorname{Re} z > -1). \qquad [15.70]$$

Pero

$$\frac{1}{1+z-is} = \int_0^1 t^{z-is}\, dt \qquad (\operatorname{Re} z > -1). \qquad [15.71]$$

Por lo que [15.70] puede escribirse de nuevo en la forma

$$f(z) = \int_0^1 t^z \left\{ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(-1+is) e^{-is\log t}\, ds \right\} dt. \qquad [15.72]$$

El intercambio en el orden de integración es legítimo: Si se cambia el integrando de [15.72] por su valor absoluto, resulta una integral finita.

Pongamos $g(s) = f(-1+is)$. Entonces la integral interior en [15.72] es $\hat{g}(\log t)$, donde $\hat{g}$ es la transformada de Fourier de g. Esta es una función continua acotada en $(0, 1]$, y si hacemos $d\mu(t) = \hat{g}(\log t)\, dt$ obtenemos una medida que representa a f en la forma deseada [15.67].

Esto completa la demostración. ////

15.6.3. Observación. El teorema implica que si $\{1, t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, \ldots\}$ engendra $C(\mathrm{I})$, entonces puede eliminarse alguna subcolección infinita de las t^{λ_i} sin alterar el proceso. En particular, $C(I)$ no contiene ningún conjunto mínimo de este tipo que lo engendre. Esto está en marcado contraste con el comportamiento de los conjuntos ortonormales en un espacio de Hilbert: si cualquier elemento de un conjunto ortonormal se elimina, el espacio engendrado disminuye. De la misma manera, si $\{1, t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, \ldots\}$ no engendra $C(I)$, la eliminación de cualquiera de sus elementos disminuirá el espacio engendrado; esto se deduce del teorema 15.6.2, *b)*.

EJERCICIOS

1. Supongamos que $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones de números complejos tales que $\Sigma|a_n - b_n| < \infty$. ¿En qué conjuntos converge uniformemente el producto

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{z-a_n}{z-b_n}\,?$$

¿Dónde define una función holomorfa?

2. Supongamos que f es entera, que λ es un número positivo, y que se verifica la desigualdad

$$|f(z)| < \exp(|z|^{\lambda})$$

para $|z|$ suficientemente grande. (Tales funciones f se dicen de *orden finito*. El ínfimo de todos los λ para los que se verifica la condición anterior es el *orden* de f.) Si $f(z)=\Sigma a_n z^n$, demuéstrese que se verifica la desigualdad

$$|a_n| \leqslant \left(\frac{e\lambda}{n}\right)^{n/\lambda}$$

para todo n suficientemente grande. Considérense las funciones $\exp(z^k)$, $k=1, 2, 3, \ldots$, para determinar si la acotación anterior de $|a_n|$ está próxima a la mejor posible.

3. Obténganse todos los complejos z para los que $\exp(\exp(z))=1$. Dibújense como puntos de plano. Demuéstrese que no existe ninguna función entera de orden finito que tenga un cero en cada uno de esos puntos (excepto, por supuesto, $f=0$).

4. Demuéstrese que la función

$$\pi \cot \pi z = \pi i \frac{e^{\pi i z}+e^{-\pi i z}}{e^{\pi i z}-e^{-\pi i z}}$$

tiene polos simples con residuo 1 en los enteros. Lo mismo ocurre para la función

$$f(z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{z-n}.$$

Demuéstrese que ambas funciones son periódicas $[f(z+1)=f(z)]$, que su diferencia es una función entera acotada, por tanto constante, y que esta constante es en realidad 0, puesto que

$$\lim_{y\to\infty} f(iy) = -2i\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2} = -\pi i.$$

Esto proporciona la descomposición en fracciones simples

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z}+\sum_{1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}.$$

(Compárese con el ejercicio 12 del capítulo 9.) Nótese que $\pi \cot \pi z$ es $(g'/g)(z)$ si $g(z)=\operatorname{sen} \pi z$. Dedúzcase la representación en forma de producto

$$\frac{\operatorname{sen} \pi z}{\pi z}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right).$$

5. Supóngase que k es un entero positivo, que $\{z_n\}$ es una sucesión de números complejos tales que $\Sigma|z_n|^{-k-1} < \infty$, y que

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{z_n}\right).$$

(Véase la definición 15.2.1.) ¿Qué se puede decir sobre la velocidad de crecimiento de

$$M(r)=\max_{\theta} |f(re^{i\theta})|\,?$$

6. Supóngase que f es entera, $f(0)\neq 0$, $|f(z)|<\exp(|z|^p)$ para $|z|$ grande, y que $\{z_n\}$ es la sucesión de ceros de f, enumerados de acuerdo con sus multiplicidades. Demuéstrese que $\Sigma|z_n|^{-p-\epsilon}<\infty$ para todo $\epsilon>0$. (Compárese con el apartado 15.4.5.)

7. Supongamos que f es una función entera, $f(\sqrt{n})=0$ para $n=1, 2, 3, \ldots$, y que existe una constante positiva α tal que $|f(z)|<\exp(|z|^\alpha)$ para todo $|z|$ suficientemente grande. ¿Para qué α se tiene que $f(z)=0$ para todo z? [Considérese $\operatorname{sen}(\pi z^2)$.]

8. Sea $\{z_n\}$ una sucesión de números complejos distintos, $z_n\neq 0$, tal que $z_n\to\infty$ cuando $n\to\infty$, y sea $\{m_n\}$ una sucesión de enteros positivos. Sea g una función meromorfa en el plano, que tiene polos simplse con residuo m_n en z_n y que no tiene otros polos. Si $z\notin\{z_n\}$, sea $\gamma(z)$ un camino cualquiera de 0 a z que no pasa por ninguno de los puntos z_n, y definamos

$$f(z)=\exp\left\{\int_{\gamma(z)} g(\zeta)\,d\zeta\right\}.$$

Demuéstrese que $f(z)$ es independiente de la elección de $\gamma(z)$ (si bien la integral no lo es), que f es holomorfa en el complementario de $\{z_n\}$, que f tiene una singularidad evitable en cada uno de los puntos $\{z_n\}$, y que la extensión de f tiene un cero de orden m_n en z_n.

El teorema de existencia contenido en el teorema 15.2.3 puede, pues, deducirse del teorema de Mittag-Leffler.

9. Supongamos $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$, $f\in H(U)$, $f(U)\subset U$ y $f(0)=\alpha$. ¿Cuántos ceros puede tener f en el disco $\bar{D}(0;\beta)$? ¿Cuál es la respuesta si *a)* $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$; *b)* $\alpha=\frac{1}{4}$, $\beta=\frac{1}{2}$; *c)* $\alpha=\frac{2}{3}$, $\beta=\frac{1}{3}$; *d)* $\alpha=1/1000$, $\beta=1/10$?

10. Para $N=1, 2, 3, \ldots$, definamos

$$g_N(z)=\prod_{n=N}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right).$$

Demuéstrese que el ideal generado por $\{g_N\}$ en el anillo de las funciones enteras no es un ideal principal.

11. ¿Bajo qué condiciones para una sucesión de números reales y_n existe una función holomorfa acotada en el semiplano abierto derecho que no sea idénticamente cero, pero que posea un cero en cada punto $1+iy_n$? En particular, ¿puede ocurrir esto si *a)* $y_n=\log n$, *b)* $y_n=\sqrt{n}$, *c)* $y_n=n$, *d)* $y_n=n^2$?

12. Supongamos que $0<|\alpha_n|<1$, $\Sigma(1-|\alpha_n|)<\infty$, y que B es el producto de Blaschke con ceros en los puntos α_n. Sea E el conjunto de todos los puntos $1/\bar{\alpha}_n$ y sea Ω el complementario de la adherencia de E. Demuéstrese que el producto converge en realidad uniformemente en todo subconjunto compacto de Ω, de modo que $B\in H(\Omega)$, y que B tiene un polo en cada punto de E. (Esto es de particular interés en los casos en que Ω es conexo.)

13. Pongamos $\alpha_n=1-n^{-2}$, para $n=1, 2, 3, \ldots$, y sea B el producto de Blaschke con ceros en estos puntos α. Demuéstrese que el $\lim_{r\to 1} B(r)=0$. (Se entiende que $0<r<1$.)

Más precisamente, demuéstrese que es válida la acotación

$$|B(r)| < \prod_{1}^{N-1} \frac{r-\alpha_n}{1-\alpha_n r} < \prod_{1}^{N-1} \frac{\alpha_N-\alpha_n}{1-\alpha_n} < 2e^{-N/3}$$

si $\alpha_{N-1} < r < \alpha_N$.

14. Demuéstrese que existe una sucesión $\{\alpha_n\}$ con $0 < \alpha_n < 1$, que tiende a 1 tan rápidamente que el producto de Blaschke con ceros en los puntos α_n satisface la condición

$$\lim_{r\to 1} \sup |B(r)| = 1.$$

Por tanto, este B no tiene límite radial en $z=1$.

15. Sea φ la transformación bilineal que transforma U sobre U. Para cualquier $z \in U$ definamos la φ-órbita de z como el conjunto $\{\varphi_n(z)\}$, donde $\varphi_0(z)=z$, $\varphi_n(z)=\varphi(\varphi_{n-1}(z))$, $n=1, 2, 3, \ldots$ Ignórese el caso $\varphi(z)=z$.

a) ¿Para qué φ es cierto que las φ-órbitas satisfacen la condición de Blaschke $\Sigma(1-|\varphi_n(z)|) < \infty$? [La respuesta depende en parte de la situación de los puntos fijos de φ. Puede haber un punto fijo en U, o un punto fijo en T, o dos puntos fijos en T. En los dos últimos casos es ventajoso transferir el problema al (por ejemplo) semiplano superior, y considerar transformaciones en él que o bien dejen fijo sólo ∞ o bien dejen fijos 0 e ∞.]

b) ¿Para qué φ existen funciones no constantes $f \in H^\infty$ que sean invariantes con respecto a φ, es decir, que satisfagan la relación $f(\varphi(z))=f(z)$ para todo $z \in U$?

16. Supongamos $|\alpha_1| \leqslant |\alpha_2| \leqslant |\alpha_3| \leqslant \ldots < 1$, y sea $m(r)$ el número de términos en la sucesión $\{\alpha_j\}$ tales que $|\alpha_j| \leqslant r$. Demuéstrese que

$$\int_0^1 n(r)\, dr = \sum_{j=1}^{\infty} (1-|\alpha_j|).$$

17. Si $B(z)=\Sigma c_k z^k$ es un producto de Blaschke con al menos un cero fuera del origen, ¿es posible tener $c_k \geqslant 0$ para $k=0, 1, 2, \ldots$?

18. Supongamos que B es un producto de Blaschke todos cuyos ceros están en el segmento $(0, 1)$ y

$$f(z)=(z-1)^2 B(z).$$

Demuéstrese que la derivada de f está acotada en U.

19. Pongamos $f(z)=\exp[(1+z)/(1-z)]$. Utilizando la notación del teorema 15.4.4, demuéstrese que

$$\lim_{r\to 1} \mu_r(f) < \mu^*(f),$$

si bien $f \in H^\infty$. Nótese el contraste con el teorema 15.5.4.

20. Supongamos que $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots$, y $\lambda_n \to 0$ en el teorema de Müntz-Szasz. ¿Cuál es la conclusión del teorema, en esas condiciones?

21. Demuéstrese un análogo del teorema de Müntz-Szasz, con $L^2(I)$ en lugar de $C(I)$.

22. Pongamos $f_n(t)=t^n e^{-t}$ $(0 \leqslant t < \infty,\ n=0, 1, 2, \ldots)$. Demuéstrese que el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de las funciones f_n es denso en $L^2(0, \infty)$.

Sugerencia: Si $g \in L^2(0, \infty)$ es ortogonal a cada una de las f_n y si

$$F(z)=\int_0^\infty e^{-tz}\overline{g(t)}\,dt \qquad (\mathrm{Re}\ z > 0),$$

entonces todas las derivadas de F son 0 en $z=1$. Considérese $F(1+iy)$.

16

PROLONGACION ANALITICA

En este capítulo nos ocuparemos de cuestiones que surgen porque funciones definidas y holomorfas en alguna región pueden frecuentemente extenderse como funciones holomorfas en alguna región más amplia. El teorema 10.4.1 muestra que estas extensiones están determinadas de manera única por las funciones dadas. El proceso de extensión se llama *prolongación analítica.* Conduce de manera muy natural a la consideración de funciones definidas en superficies de Riemann más que en regiones planas. Este proceso hace posible cambiar «funciones multivaluadas» (tales como la función raíz cuadrada o el logaritmo) por funciones. Un tratamiento sistemático de las superficies de Riemann nos llevaría demasiado lejos, sin embargo, y restringiremos, por tanto, la discusión a regiones planas.

16.1. PUNTOS REGULARES Y PUNTOS SINGULARES

16.1.1. Definición. Sea D un disco circular abierto, supongamos que $f \in H(D)$, y sea β un punto frontera de D. Llamamos a β *punto regular* de f si existe un disco D_1 con centro en β y una función $g \in H(D_1)$ tal que $g(z)=f(z)$ para todo $z \in D \cap D_1$. Un punto frontera cualquiera de D que no sea un punto regular de f se llama un *punto singular* de f.

Es claro de la definición que el conjunto de todos los puntos regulares de f es un subconjunto abierto (posiblemente vacío) de la frontera de D.

En los teoremas siguientes tomaremos como D el disco unidad U, sin ninguna pérdida de generalidad.

16.1.2. Teorema. *Supongamos que $f \in H(U)$, y que la serie de potencias*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad (z \in U) \qquad [16.1]$$

tiene radio de convergencia 1. *Entonces f tiene al menos un punto singular sobre la circunferencia unidad T.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos, por el contrario, que todo punto de T es un punto regular de f. La compacidad de T implica entonces que existen discos abiertos $D_1, \ldots, D_n$ y funciones $g_j \in H(D_j)$ tales que el centro de cada D_j está en T, tales que $T \subset D_1 \cup \ldots \cup D_n$, y tales que $g_j(z)=f(z)$ en $D_j \cap U$, para $j=1, \ldots, n$.

Si $D_i \cap D_j \neq \emptyset$ y $V_{ij} = D_i \cap D_j \cap U$, entonces $V_{ij} \neq \emptyset$ (puesto que los centros de D_j están en T), y $g_i = f = g_j$ en V_{ij}. Como $D_i \cap D_j$ es conexo, se deduce del teorema 10.4.1 que $g_i = g_j$ en $D_i \cap D_j$. Por tanto, podemos definir una función h en $\Omega = U \cup D_1 \cup \ldots \cup D_n$ mediante

$$h(z) = \begin{cases} f(z) & (z \in U), \\ g_i(z) & (z \in D_i). \end{cases} \qquad [16.2]$$

Como $\Omega \supset \bar{U}$ y Ω es abierto, existe un $\epsilon > 0$ tal que el disco $D(0; 1+\epsilon) \subset \Omega$. Pero $h \in H(\Omega)$, $h(z)$ viene dado por [16.1] en U, y el teorema 10.3.5 implica ahora que el radio de convergencia de [16.1] es al menos $1+\epsilon$, contrario a nuestra hipótesis. ////

16.1.3. Definición. Si $f \in H(U)$ y si todo punto de T es un punto singular de f, entonces T se dice que es la *frontera natural* de f. En este caso, que el radio de convergencia de [16.1] es al menos $1+\epsilon$, contrario a nuestra hipótesis. ////

16.1.4. Observación. Es muy fácil ver que existe una $f \in H(U)$ para la que T es una frontera natural. De hecho, si Ω es una región *cualquiera,* es fácil obtener una $f \in H(\Omega)$ que no posea ninguna extensión holomorfa en una región más amplia. Para verlo, sea A un conjunto cualquiera numerable en Ω que no tenga puntos límite en Ω, pero tal que todo punto frontera de Ω es un punto límite de A. Apliquemos el teorema 15.2.5 para obtener una función $f \in H(\Omega)$ que sea 0 en todo punto de A, pero que no sea idénticamente 0. Si $g \in H(\Omega_1)$, donde Ω_1 es una región que contiene propiamente a Ω, y si $g = f$ en Ω, los ceros de g tendrían un punto límite en Ω_1, y tenemos una contradicción.

Un ejemplo explícito simple lo proporciona

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} = z + z^2 + z^4 + z^8 + \ldots \qquad (z \in U). \qquad [16.3]$$

Esta f satisface la ecuación funcional

$$f(z^2) = f(z) - z, \qquad [16.4]$$

de la que se deduce (dejamos los detalles al lector) que f es no acotada en todo radio de U que termine en $\exp\{2\pi ik/2^n\}$, donde k y n son enteros positivos. Estos puntos forman un subconjunto denso de T; y como el conjunto de todos los puntos singulares de f es cerrado, f tiene a T como su frontera natural.

Que este ejemplo es una serie de potencias con grandes vacíos (es decir, con muchos coeficientes nulos) no es accidental. El ejemplo es meramente un caso especial del teorema 16.1.6, debido a HADAMARD, que obtendremos del siguiente teorema de OSTROWSKI:

16.1.5. Teorema. *Supongamos que* λ, p_k *y* q_k *son enteros positivos,*

$$p_1 < p_2 < p_3 < \ldots$$

y

$$\lambda q_k > (\lambda + 1) p_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots). \qquad [16.5]$$

Supongamos que

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad [16.6]$$

tiene radio de convergencia 1, *y* $a_n=0$ *si* $p_k<n<q_k$ *para algún* k. *Si* $s_p(z)$ *es la suma parcial* p*-ésima de* [16.6], *y si* β *es un punto regular de* f *en* T, *entonces la sucesión* $\{s_{p_k}(z)\}$ *converge en algún entorno de* β.

Nótese que la sucesión completa $\{s_p(z)\}$ no puede converger en ningún punto fuera de $\bar{U}$. La condición de espaciado [16.5] asegura la existencia de una subsucesión que converge en un entorno de β, y, por tanto, en algunos puntos fuera de $\bar{U}$. Este fenómeno se llama *sobreconvergencia.*

DEMOSTRACIÓN. Si $g(z)=f(\beta z)$, entonces g también satisface la condición de espaciado. Por tanto, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\beta=1$. Entonces f tiene una extensión holomorfa en una región Ω que contiene a $U\cup\{1\}$. Pongamos

$$\varphi(w)=\tfrac{1}{2}(w^{\lambda}+w^{\lambda+1}) \qquad [16.7]$$

y definamos $F(w)=f(\varphi(w))$ para todo w tal que $\varphi(w)\in\Omega$. Si $|w|\leqslant 1$, pero $w\neq 1$, entonces $|\varphi(w)|<1$, puesto que $|1+w|<2$. Además, $\varphi(1)=1$. Se deduce que existe un $\epsilon>$ tal que $\varphi(D(0;\,1+\epsilon))\subset\Omega$. Notemos que la región $\varphi(D(0;\,1+\epsilon))$ contiene el punto 1. La serie

$$F(w)=\sum_{m=0}^{\infty} b_m w^m \qquad [16.8]$$

converge si $|w|<1+\epsilon$.

Las potencias mayor y menor de w en $[\varphi(w)]^n$ tienen exponentes $(\lambda+1)n$ y λn. Por tanto, el mayor exponente de $[\varphi(w)]^{p_k}$ es más pequeño que el menor exponente de $[\varphi(w)]^{q_k}$, por [16.5]. Como

$$F(w)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n[\varphi(w)]^n \qquad (|w|<1), \qquad [16.9]$$

la condición de espaciado satisfecha por $\{a_n\}$ implica que

$$\sum_{n=0}^{p_k} a_n[\varphi(w)]^n=\sum_{m=0}^{(\lambda+1)p_k} b_m w^m \qquad (k=1,2,3,\ldots). \qquad [16.10]$$

El segundo miembro de [16.10] converge, cuando $k\to\infty$, si $|w|<1+\epsilon$. Por tanto, $\{s_{p_k}(z)\}$ converge para todo $z\in\varphi(D(0;\,1+\epsilon))$. Esta es la conclusión deseada. ////

Nota: En realidad, $\{s_{p_k}(z)\}$ converge uniformemente en algún entorno de β. Dejamos al lector el verificarlo mediante un examen más cuidadoso de la demostración precedente.

16.1.6. Teorema. *Supongamos que λ es un entero positivo, $\{p_k\}$ es una sucesión de enteros positivos tales que*

$$p_{k+1} > \left(1+\frac{1}{\lambda}\right) p_k \qquad (k=1, 2, 3, \ldots), \tag{16.11}$$

y que la serie de potencias

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{p_k} \tag{16.12}$$

tiene radio de convergencia 1. *Entonces f tiene a T como su frontera natural.*

DEMOSTRACIÓN. La subsucesión $\{s_{p_k}\}$ del teorema 16.1.5 es ahora la misma (salvo repeticiones) que la sucesión completa de sumas parciales de [16.12]. Esta última no puede converger en ningún punto fuera de $\bar{U}$; por tanto, el teorema 16.1.5 implica que ningún punto de T puede ser un punto regular de f. ////

16.1.7. Ejemplo. Pongamos $a_n = 1$ si n es una potencia de 2, y $a_n = 0$ en caso contrario, pongamos $\eta_n = \exp(-\sqrt{n})$, y definamos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta_n z^n. \tag{16.13}$$

Como

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n \eta_n|^{1/n} = 1. \tag{16.14}$$

el radio de convergencia de [16.13] es 1. Por el teorema de Hadamard, f tiene a T como su frontera natural. Sin embargo, la serie de potencias de cada derivada de f,

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)\, a_n \eta_n z^{n-k}, \tag{16.15}$$

converge uniformemente en el disco unidad cerrado. Cada $f^{(k)}$ es en consecuencia uniformemente continua en $\bar{U}$, y la restricción de f a T es infinitamente diferenciable, como función de θ, a pesar del hecho de que T es la frontera natural de f.

El ejemplo demuestra, muy llamativamente, que la presencia de singularidades, en el sentido de la definición 16.1.1, no implica la presencia de discontinuidades o (enunciado con menos precisión) de ninguna falta de regularidad.

Este parece ser el lugar natural para incluir un teorema en el que la continuidad excluye la existencia de singularidades:

16.1.8. Teorema. *Supongamos que Ω es una región, que L es una línea recta o un arco circular, que $\Omega - L$ es la unión de dos regiones Ω_1 y Ω_2, que f es continua en Ω, y que f es holomorfa en Ω_1 y en Ω_2. Entonces f es holomorfa en Ω.*

DEMOSTRACIÓN. El uso de transformaciones bilineales muestra que el caso general se obtiene si demostramos el teorema para líneas rectas L. Por el teorema de Morera, basta demostrar que la integral de f sobre la frontera $\partial\Delta$ es cero para todo triángulo Δ en Ω. El teorema de Cauchy implica que la integral de f sobre todo camino cerrado γ en $\Delta \cap \Omega_1$ o en $\Delta \cap \Omega_2$. La continuidad de f muestra que esto es aún cierto si parte de γ está en L, y la integral sobre $\partial\Delta$ es la suma de dos términos de este tipo, como mucho. ////

16.2. PROLONGACION A LO LARGO DE CURVAS

16.2.1. Definiciones. Un *elemento de función* es un par ordenado (f, D), donde D es un disco circular abierto y $f \in H(D)$. Dos elementos de función (f_0, D_0) y (f_1, D_1) son *prolongaciones directas* uno del otro si se verifican dos condiciones: $D_0 \cap D_1 \neq \emptyset$, y $f_0(z) = f_1(z)$ para todo $z \in D_0 \cap D_1$. En este caso escribimos

$$(f_0, D_0) \sim (f_1, D_1). \qquad [16.16]$$

Una *cadena* es una sucesión finita de discos $\mathcal{C}$, por ejemplo $\mathcal{C} = \{D_0, D_1, \ldots, D_n\}$, tal que $D_{i-1} \cap D_i \neq \emptyset$ para $i = 1, \ldots, n$. Si se da (f_0, D_0) y si existen elementos (f_i, D_i) tales que $(f_{i-1}, D_{i-1}) \sim (f_i, D_i)$ para $i = 1, \ldots, n$, entonces (f_n, D_n) se llama la *prolongación analítica de* (f_0, D_0) *a lo largo de* $\mathcal{C}$. Notemos que f_n está determinada de manera única por f_0 y por $\mathcal{C}$ (si existe). Para verlo, supongamos que se verifica [16.16], y supongamos que se verifica [16.16] también con g_1 en lugar de f_1. Entonces $g_1 = f_0 = f_1$ en $D_0 \cap D_1$; y como D_1 es conexo, tenemos $g_1 = f_1$ en D_1. La unicidad de f_n se deduce ahora por inducción sobre el número de términos de $\mathcal{C}$.

Si (f_n, D_n) es la prolongación de (f_0, D_0) a lo largo de $\mathcal{C}$, y si $D_n \cap D_0 \neq \emptyset$, no es necesariamente cierto que $(f_0, D_0) \sim (f_n, D_n)$; en otras palabras, la relación $\sim$ no es transitiva. El ejemplo más simple de esto lo proporciona la función raíz cuadrada: Sean D_0, D_1 y D_2 discos de radio 1, con centros en 1, ω y ω, donde $\omega^3 = 1$, tomemos $f_j \in H(D_j)$ de modo que $f_j^2(z) = z$ y de modo que $(f_0, D_0) \sim (f_1, D_1)$, $(f_1, D_1) \sim (f_2, D_2)$. En $D_0 \cap D_2$ tenemos $f_2 = -f_0 \neq f_0$.

Una cadena $\mathcal{C} = \{D_0, \ldots, D_n\}$ se dice que *recubre* una curva γ con $[0, 1]$ como intervalo del parámetro si existen números $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = 1$, tales que $\gamma(0)$ es el centro de D_0, $\gamma(1)$ es el centro de D_n, y

$$\gamma([s_i, s_{i+1}]) \subset D_i \qquad (i = 0, \ldots, n-1). \qquad [16.17]$$

Si (f_0, D_0) puede prolongarse a lo largo de esta $\mathcal{C}$ hasta (f_n, D_n), llamamos a (f_n, D_n) una *prolongación analítica de* (f_0, D_0) *a lo largo de* γ (la unicidad se demostrará en el teorema 16.2.1); se dice que (f_0, D_0) *admite* una prolongación analítica a lo largo de γ.

Aunque la relación [16.16] no es transitiva, se verifica una forma restringida de transiitvidad. Proporciona la clave de la demostración del teorema 16.2.3.

16.2.2. Proposición. *Supongamos que* $D_0 \cap D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, $(f_0, D_0) \sim (f_1, D_1)$ *y* $(f_1, D_1) \sim (f_2, D_2)$. *Entonces* $(f_0, D_0) \sim (f_2, D_2)$.

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis, $f_0=f_1$ en $D_0 \cap D_1$ y $f_1=f_2$ *en* $D_1 \cap D_2$. Por tanto, $f_0=f_2$ en el conjunto abierto no vacío $D_0 \cap D_1 \cap D_2$. Como f_0 y f_2 son holomorfas en $D_0 \cap D_2$ y $D_0 \cap D_2$ es conexo, se deduce que $f_0=f_2$ en $D_0 \cap D_2$. ////

16.2.3. Teorema. *Si (f, D) es un elemento de función y si γ es una curva que comienza en el centro de D, entonces (f, D) admite a lo sumo una prolongación analítica a lo largo de γ.*

He aquí un enunciado más explícito de lo que afirma el teorema: Si γ se recubre por cadenas $\mathcal{C}_1=\{A_0, A_1, \ldots, A_m\}$ y $\mathcal{C}_2=\{B_0, B_1, \ldots, B_n\}$, donde $A_0=B_0=D$, si (f, D) puede prolongarse analíticamente a lo largo de $\mathcal{C}_1$ hasta un elemento de función (g_m, A_m), y si (f, D) puede prolongarse analíticamente a lo largo de $\mathcal{C}_2$ hasta (h_n, B_n), entonces $g_m=h_n$ en $A_m \cap B_n$.

Como A_m y B_n son, por hipótesis, discos con el mismo centro $\gamma(1)$, se deduce que g_m y h_n poseen el mismo desarrollo en potencias de $z-\gamma(1)$, y podemos reemplazar A_m y B_n por el que sea más grande de los dos. Con este convenio, la conclusión es que $g_m=h_n$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ como antes. Existen números

$$0=s_0<s_1<\ldots<s_m=1=s_{m+1}$$

y $0=\sigma_0<\sigma_1<\ldots<\sigma_n=1=\sigma_{n+1}$ tales que

$$\gamma([s_i, s_{i+1}]) \subset A_i, \qquad \gamma([\sigma_j, \sigma_{j+1}]) \subset B_j \qquad (0 \leqslant i \leqslant m,\ 0 \leqslant j \leqslant n). \qquad [16.18]$$

Existen elementos de función $(g_i, A_i) \sim (g_{i+1}, A_{i+1})$ y $(h_j, B_j) \sim (h_{j+1}, B_{j+1})$, para $0 \leqslant i \leqslant m-1$ y $0 \leqslant j \leqslant n-1$. Aquí $g_0=h_0=f$.

Pretendemos probar que si $0 \leqslant i \leqslant m$ y $0 \leqslant j \leqslant n$, y si $[s_i, s_{i+1}]$ intersecta $[\sigma_j, \sigma_{j+1}]$, entonces $(g_i, A_i) \sim (h_j, B_j)$.

Supongamos que existen pares (i, j) para los que esto es falso. Entre ellos existe uno para el que $i+j$ es mínimo. Es claro que entonces $i+j>0$. Supongamos $s_j \geqslant \sigma_j$. Entonces $i \geqslant 1$, y como $[s_i, s_{i+1}]$ intersecta $[\sigma_j, \sigma_{j+1}]$, vemos que

$$\gamma(s_i) \in A_{i-1} \cap A_i \cap B_j\,. \qquad [16.19]$$

La minimalidad de $i+j$ muestra que $(g_{i-1}, A_{i-1}) \sim (h_j, B_j)$; y como $(g_{i-1}, A_{i-1}) \sim (g_i, A_i)$, la proposición 16.2.2 implica que $(g_i, A_i) \sim (h_j, B_j)$. Esto contradice nuestra hipótesis. La posibilidad $s_i \leqslant \sigma_j$ se excluye de la misma manera.

Por tanto, llegamos al resultado pretendido. En particular, se verifica para el par (m, n), que era lo que había que demostrar. ////

16.2.4. Definición. Supongamos que α y β son puntos en un espacio topológico X y que φ es una aplicación continua del cuadrado unidad $I^2=I \times I$ (donde $I=[0, 1]$) en X tal que $\varphi(0, t)=\alpha$ y $\varphi(1, t)=\beta$ para todo $t \in I$. Las curvas γ_t definidas mediante

$$\gamma_t(s)=\varphi(s, t) \qquad (s \in I,\ t \in I) \qquad [16.20]$$

se dice entonces que forman una *familia uniparamétrica* $\{\gamma_t\}$ *de curvas de* α *a* β *en* X.

Llegamos ahora a una propiedad muy importante de la prolongación analítica:

16.2.5. Teorema. *Supongamos que* $\{\gamma_t\}$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ *es una familia uniparamétrica de* α *a* β *en el plano, que* D *es un disco con centro en* α, *y que el elemento de función* (f, D) *admite una prolongación analítica a lo largo de cada* γ_t, *hasta un elemento* (g_t, D_t). *Entonces* $g_1 = g_0$.

La última igualdad hay que interpretarla como en el teorema 16.2.3:

$$(g_1, D_1) \sim (g_0, D_0),$$

y D_0 y D_1 son discos con el mismo centro, β.

DEMOSTRACIÓN. Fijemos $t \in I$. Existe una cadena $\mathcal{C} = \{A_0, \ldots, A_n\}$ que recubre γ_t, con $A_0 = D$, tal que (g_t, D_t) se obtiene por prolongación de (f, D) a lo largo de $\mathcal{C}$. Existen números $0 = s_0 < \ldots < s_n = 1$ tales que

$$E_i = \gamma_i([s_i, s_{i+1}]) \subset A_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1). \qquad [16.20]$$

Existe un $\epsilon > 0$ menor que la distancia de cualquiera de los conjuntos compactos E_i al complementario del correspondiente disco abierto A_i. La continuidad uniforme de φ en I^2 (véase definición 16.2.4) muestra que existe un $\delta > 0$ tal que

$$|\gamma_t(s) - \gamma_u(s)| < \epsilon \quad \text{si} \quad s \in I,\ u \in I,\ |u - t| < \delta. \qquad [16.21]$$

Supongamos que u satisface estas condiciones. Entonces [16.21] muestra que $\mathcal{C}$ recubre γ_u, y en consecuencia el teorema 16.2.3 muestra que tanto g_t como g_u se obtienen por prolongación de (f, D) a lo largo de la misma cadena. Por tanto, $g_t = g_u$.

Por tanto, cada $t \in I$ está recubierto por un segmento J_t tal que $g_u = g_t$ para todo $u \in I \cap J_t$. Como I es compacto, I puede recubrirse por un número finito de J_t; y como I es conexo, vemos que en un número finito de pasos $g_1 = g_0$. ////

Presentamos a continuación un hecho topológico intuitivamente obvio.

16.2.6. Teorema. *Supongamos que* Γ_0 *y* Γ_1 *son curvas en un espacio topológico* X, *con un punto inicial común* α *y un punto final común* β. *Si* X *es simplemente conexo, entonces existe una familia uniparamétrica* $\{\gamma_t\}$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ *de curvas de* α *a* β *en* X, *tal que* $\gamma_0 = \Gamma_0$ *y* $\gamma_1 = \Gamma_1$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $[0, \pi]$ el intervalo del parámetro de Γ_0 y Γ_1. Entonces

$$\Gamma(s) = \begin{cases} \Gamma_0(s) & (0 \leqslant s \leqslant \pi) \\ \Gamma_1(2\pi - s) & (\pi \leqslant s \leqslant 2\pi) \end{cases} \qquad [16.22]$$

define una curva *cerrada* en X. Como X es simplemente conexo, Γ es homotópica a un punto. En consecuencia existe una función continua $H: [0, 2\pi] \times [0, 1] \to X$ tal que

$$H(s, 0) = \Gamma(s), \qquad H(s, 1) = c \in X, \qquad H(0, t) = H(2\pi, t). \qquad [16.23]$$

Si $\Phi: \bar{U} \to X$ se define mediante

$$\Phi(re^{i\theta}) = H(\theta, 1 - r) \qquad (0 \leqslant r \leqslant 1,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi),$$

[16.23] implica que Φ es continua. Pongamos

$$\gamma_t(\theta) = \Phi[(1 - t)e^{i\theta} + te^{-i\theta}] \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Como $\Phi(e^{i\theta}) = H(\theta, 0) = \Gamma(\theta)$, se deduce que

$$\begin{aligned} \gamma_t(0) &= \Phi(1) = \Gamma(0) = \alpha && (0 \leqslant t \leqslant 1), \\ \gamma_t(\pi) &= \Phi(-1) = \Gamma(\pi) = \beta && (0 \leqslant t \leqslant 1), \\ \gamma_0(\theta) &= \Phi(e^{i\theta}) = \Gamma(\theta) = \Gamma_0(\theta) && (0 \leqslant \theta \leqslant \pi), \end{aligned}$$

y

$$\gamma_1(\theta) = \Phi(e^{-i\theta}) = \Phi(e^{i(2\pi-\theta)}) = \Gamma(2\pi - \theta) = \Gamma_1(\theta) \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi).$$

Esto completa la demostración. ////

16.3. EL TEOREMA DE MONODROMIA

Las consideraciones precedentes han demostrado esencialmente el importante teorema siguiente.

16.3.1. Teorema. *Supongamos que Ω es una región simplemente conexa, que (f, D) es un elemento de función, $D \subset \Omega$, y que (f, D) puede prolongarse analíticamente a lo largo de toda curva de Ω que comience en el centro de D. Entonces existe una $g \in H(\Omega)$ tal que $g(z) = f(z)$ para todo $z \in D$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean Γ_0 y Γ_1 dos curvas en Ω desde el centro α de D hasta algún punto $\beta \in \Omega$. Se deduce de los teoremas 16.2.5 y 16.2.6 que las prolongaciones analíticas de (f, D) a lo largo de Γ_0 y Γ_1 conducen al mismo elemento (g_β, D_β), donde D_β es un disco con centro en β. Si D_{β_1} corta a D_β, entonces $(g_{\beta_1}, D_{\beta_1})$ puede obtenerse prolongando en primer lugar (f, D) hasta β, y luego a lo largo de la línea recta que une β y β_1. Esto muestra que $g_{\beta_1} = g_\beta$ en $D_{\beta_1} \cap D_\beta$.

La definición

$$g(z) = g_\beta(z) \qquad (z \in D_\beta)$$

es en consecuencia consistente y proporciona la extensión holomorfa de f deseada. ////

16.3.2. Observación. Sea Ω una región plana, fijemos $w \notin \Omega$, y sea D un disco en Ω. Como D es simplemente conexo, existe una $f \in H(D)$ tal que $\exp[f(z)] = z - w$. Notemos que $f'(z) = (z-w)^{-1}$ en D, y que esta función es holomorfa en todo Ω. Esto implica que (f, D) puede prolongarse analíticamente a lo largo de todo camino γ en Ω que comience en el centro α de D: Si γ va de α a β, si $D_\beta = D(\beta; r) \subset \Omega$, si

$$\Gamma_z = \gamma \dot{+} [\beta, z] \qquad (z \in D_\beta) \qquad [16.24]$$

y si

$$g_\beta(z) = \int_{\Gamma_z} (\zeta - w)^{-1}\, d\zeta + f(\alpha) \qquad (z \in D_\beta). \qquad [16.25]$$

entonces (g_β, D_β) es la prolongación de (f, D) a lo largo de γ.

Notemos que $g'_\beta(z) = (z-w)^{-1}$ en D_β.

Supongamos ahora que existe una $g \in H(\Omega)$ tal que $g(z)=f(z)$ en D. Entonces $g'(z)=(z-w)^{-1}$ para todo $z \in \Omega$. Si Γ es un camino *cerrado* en Ω, se deduce que

$$\operatorname{Ind}_\Gamma(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g'(z)\,dz=0. \qquad [16.26]$$

Concluimos (con la ayuda del teorema 13.4.1) *que el teorema de monodromía no se verifica en ninguna región plana que no sea simplemente conexa.*

16.4. CONSTRUCCION DE UNA FUNCION MODULAR

16.4.1. El grupo modular. Es el conjunto G de todas las transformaciones bilineales de la forma

$$\varphi(z)=\frac{az+b}{cz+d} \qquad [16.27]$$

donde a, b, c y d son enteros y $ad-bc=1$.

Como a, b, c y d son reales, cada $\varphi \in G$ transforma el eje real sobre sí mismo (salvo ∞). La parte imaginaria de $\varphi(i)$ es $(c^2+d^2)^{-1}>0$. Por tanto,

$$\varphi(\Pi^+)=\Pi^+ \qquad (\varphi \in G), \qquad [16.28]$$

donde Π^+ es el semiplano superior abierto. Si φ viene dada por [16.27], entonces

$$\varphi^{-1}(w)=\frac{dw-b}{-cw+a} \qquad [16.29]$$

de modo que $\varphi^{-1} \in G$. Además $\varphi \circ \psi \in G$ si $\varphi \in G$ y $\psi \in G$.

Por tanto, G es un grupo, con la composición como operación de grupo. En vista de [16.28], es habitual considerar G como grupo de transformaciones sobre Π^+.

Las transformaciones $z \to z+1$ $(a=b=d=1, c=0)$ y $z \to -1/z$ $(a=d=0, b=-1, c=1)$ pertenecen a G. De hecho, generan G (es decir, no existe ningún subgrupo propio de G que contenga a estas dos transformaciones). Esto puede demostrarse con el mismo método que se utilizará en el teorema 16.4.3, *c*).

Una *función modular* es una función holomorfa (o meromorfa) f sobre Π^+ que es invariante con respecto a G o al menos con respecto a algún subgrupo no trivial Γ de G. Esto significa que $f \circ \varphi = f$ para toda $\varphi \in \Gamma$.

16.4.2. Un subgrupo. Tomaremos como Γ el grupo generado por σ y τ, donde

$$\sigma(z)=\frac{z}{2z+1}, \qquad \tau(z)=z+2. \qquad [16.30]$$

Uno de nuestros objetivos es la construcción de cierta función λ que sea invariante con respecto a Γ y que permita una demostración rápida del teorema de Picard. En realidad, las propiedades de λ que son importantes en esta demostración son las que posee como aplicación, no su invariancia, y puede darse

una construcción más rápida (utilizando sólo el teorema de la aplicación de Riemann y el principio de reflexión). Pero es instructivo estudiar la acción de Γ sobre Π^+, en términos geométricos, y por ello procederemos de esta manera.

Sea Q el conjunto de todos los z que satisfacen las siguientes cuatro condiciones, y donde $z=x+iy$:

$$y>0, \quad -1\leqslant x<1, \quad |2z+1|\geqslant 1, \quad |2z-1|>1. \qquad [16.31]$$

Q está acotado por las rectas verticales $x=-1$ y $x=1$ y está acotado por debajo por dos semicircunferencias de radio $\frac{1}{2}$, y con centros en $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$. Q contiene a aquellos de sus puntos frontera que están en la mitad izquierda de Π^+. Q no contiene ningún punto del eje real.

Pretendemos probar que Q es un *dominio fundamental de* Γ. Esto significa que son ciertos los enunciados *a)* y *b)* del teorema siguiente.

16.4.3. Teorema. *Sean Γ y Q como antes.*

a) *Si φ_1 y $\varphi_2 \in \Gamma$ y $\varphi_1 \neq \varphi_2$, entonces $\varphi_1(Q) \cap \varphi_2(Q)=\varnothing$.*

b) $\bigcup_{\varphi\in\Gamma} \varphi(Q)=\Pi^+$.

c) *Γ contiene a todas las transformaciones $\varphi \in G$ de la forma*

$$\varphi(z)=\frac{az+b}{cz+d} \qquad [16.32]$$

para las que a y d son enteros impares, y b y c son pares.

Demostración. Sea Γ_1 el conjunto de todas las $\varphi \in G$ descritas en *c)*. Se comprueba fácilmente que Γ_1 es un subgrupo de G. Como $\sigma \in \Gamma_1$ y $\tau \in \Gamma_1$, se deduce que $\Gamma \subset \Gamma_1$. Para demostrar que $\Gamma=\Gamma_1$, es decir, para demostrar *c)*, basta demostrar que se verifican *a')* y *b)*, donde *a')* es el enunciado obtenido a partir de *a)* cambiando Γ por Γ_1. En efecto, si se verifican *a')* y *b)*, es claro que Γ no puede ser un subconjunto propio de Γ_1.

Necesitaremos la relación

$$\operatorname{Im} \varphi(z)=\frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2} \qquad [16.33]$$

que es válida para toda $\varphi \in G$ dada por [16.32]. La demostración de [16.33] es una cuestión de cálculo directo, y se basa en la relación $ad-bc=1$.

Demostramos ahora *a')*. Supongamos que φ_1 y $\varphi_2 \in \Gamma$, $\varphi_1 \neq \varphi_2$, y definamos $\varphi=\varphi_1^{-1} \circ \varphi$. Si $z \in \varphi_1(Q) \cap \varphi_2(Q)$, entonces $\varphi_1^{-1}(z) \in Q \cap \varphi(Q)$. En consecuencia, basta demostrar que

$$Q \cap \varphi(Q)=\varnothing \qquad [16.34]$$

si $\varphi \in \Gamma_1$ y φ no es la transformación identidad.

La demostración de [16.34] se desdobla en tres casos.

Si $c=0$ en [16.32], entonces $ad=1$, y como a y d son enteros, tenemos $a=d=\pm 1$. Por tanto, $\varphi(z)=z+2n$ para algún entero $n \neq 0$, y la descripción de Q hace evidente que se verifica [16.34].

Si $c=2d$, entonces $c=\pm 2$ y $d=\pm 1$ (porque $ad-bc=1$). Por tanto, $\varphi(z)=\sigma(z)+2m$, donde m es un entero. Como $\sigma(Q) \subset \bar{D}(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, se verifica [16.34].

Si $c \neq 0$ y $c \neq 2d$, afirmamos que $|cz+d| > 1$ para todo $z \in Q$. De otro modo, el disco $\bar{D}(-d/c, 1/|c|)$ cortaría a Q. La descripción de Q muestra que si $\alpha \neq -\frac{1}{2}$ es un número real y si $\bar{D}(\alpha; r)$ corta a Q, entonces al menos uno de los puntos -1, 0, 1 está en $D(\alpha; r)$. Por tanto, $|cw+d| < 1$, para $w = -1$ ó 0 ó 1. Pero para estos w, $cw+d$ es un entero impar cuyo valor absoluto no puede ser menor que 1. Por tanto, $|cz+d| > 1$, y se deduce de [16.33] que $\operatorname{Im} \varphi(z) < \operatorname{Im} z$ para todo $z \in Q$. Si fuera cierto para algún $z \in Q$ que $\varphi(z) \in Q$, el mismo razonamiento podría aplicarse a φ^{-1} y mostraría que

$$\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} \varphi^{-1}(\varphi(z)) \leqslant \operatorname{Im} \varphi(z). \qquad [16.35]$$

Esta contradicción dice que se verifica [16.34].

Por tanto, *a')* está demostrado.

Para demostrar *b)*, sea Σ la unión de los conjuntos $\varphi(Q)$, para $\varphi \in \Gamma$. Es claro que $\Sigma \subset \Pi^+$. Además, Σ contiene a los conjuntos $\tau^n(Q)$, para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, donde $\tau^n(z) = z + 2n$. Como σ transforma el círculo $|2z+1| = 1$ sobre el círculo $|2z-1| = 1$, vemos que Σ contiene a todo $z \in \Pi^+$ que satisface las desigualdades

$$|2z-(2m+1)| \geqslant 1 \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \qquad [16.36]$$

Fijemos $w \in \Pi^+$. Como $\operatorname{Im} w > 0$, existe sólo un número finito de pares de enteros c y d tales que $|cw+d|$ sea inferior a cualquier cota dada, y podemos tomar $\varphi_0 \in \Gamma$ de modo que se minimice $|cw+d|$. Por [16.33], esto significa que

$$\operatorname{Im} \varphi(w) \leqslant \operatorname{Im} \varphi_0(w) \qquad (\varphi \in \Gamma). \qquad [16.37]$$

Pongamos $z = \varphi_0(w)$. Entonces [16.37] resulta ser

$$\operatorname{Im} \varphi(z) \leqslant \operatorname{Im} z \qquad (\varphi \in \Gamma). \qquad [16.38]$$

Apliquemos [16.38] a $\varphi = \sigma\tau^{-n}$ y a $\varphi = \sigma^{-1}\tau^{-n}$. Puesto que

$$(\sigma\tau^{-n})(z) = \frac{z-2n}{2z-4n+1}, \qquad (\sigma^{-1}\tau^{-n})(z) = \frac{z-2n}{-2z+4n+1}, \qquad [16.39]$$

se deduce de [16.33] y [16.38] que

$$|2z-4n+1| \geqslant 1, \qquad |2z-4n-1| \geqslant 1 \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \qquad [16.40]$$

Por tanto, z satisface [16.36], y por ello $z \in \Sigma$; y como $w = \varphi_0^{-1}(z)$ y $\varphi_0^{-1} \in \Gamma$, tenemos $w \in \Sigma$.

Esto completa la demostración. ////

El teorema siguiente resume algunas de las propiedades de la función modular λ que fue mencionada en el apartado 16.4.2 y que se utilizará en el teorema 16.5.2.

16.4.4. Teorema. *Si Γ y Q son como los descritos en el apartado* 16.4.2, *existe una función $\lambda \in H(\Pi^+)$ tal que*

a) $\lambda \circ \varphi = \lambda$ *para toda* $\varphi \in \Gamma$.

b) λ *es uno a uno en* Q.

c) *El recorrido* Ω *de* λ [*que es el mismo que* $\lambda(Q)$, *por* a)], *es la región que consiste en todos los números complejos diferentes de* 0 *y* 1.

d) λ *tiene el eje real como su frontera natural.*

DEMOSTRACIÓN. Sea Q_0 la mitad derecha de Q. Más precisamente, Q_0 consiste en todos los $z \in \Pi^+$ tales que

$$0 < \operatorname{Re} z < 1, \qquad |2z-1| > 1. \tag{16.41}$$

Por el teorema 14.6.4 (y las observaciones 14.6.5) existe una función continua h en $\bar{Q}_0$ que es uno a uno en $\bar{Q}_0$ y holomorfa en Q_0, tal que $h(Q_0)=\Pi^+$, $h(0)=0$, $h(1)=1$ y $h(\infty)=\infty$. El principio de reflexión (teorema 11.3.3) muestra que la fórmula

$$h(-x+iy)=\overline{h(x+iy)} \tag{16.42}$$

extiende h como función continua sobre la adherencia $\bar{Q}$ de Q, la cual es una transformación conforme del interior de Q sobre el plano complejo menos el eje real no negativo. Vemos además que h es uno a uno en Q, que $h(Q)$ es la región Ω descrita en *c)*, que

$$h(-1+iy)=h(1+iy)=h(\tau(-1+iy)) \qquad (0<y<\infty), \tag{16.43}$$

y que

$$h(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}e^{i\theta})=h(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}e^{i(\pi-\theta)})=h(\sigma(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}e^{i\theta})) \qquad (0<\theta<\pi). \tag{16.44}$$

Como h es real en la frontera de Q, [16.43] y [16.44] se deducen de [16.42] y de las definiciones de σ y τ.

Definimos ahora la función λ:

$$\lambda(z)=h(\varphi^{-1}(z)) \qquad (z \in \varphi(Q), \varphi \in \Gamma). \tag{16.45}$$

Por el teorema 16.4.3, cada $z \in \Pi^+$ está en $\varphi(Q)$ para una, y sólo una, $\varphi \in \Gamma$. Por tanto, [16.45] define $\lambda(z)$ para $z \in \Pi^+$, y vemos inmediatamente que λ posee las propiedades *a)* a *c)*, y que λ es holomorfa en el interior de cada uno de los conjuntos $\varphi(Q)$.

Se deduce de [16.43] y [16.44] que λ es continua en

$$Q \cup \tau^{-1}(Q) \cup \sigma^{-1}(Q),$$

y, por tanto, en un conjunto abierto V que contiene a Q. El teorema 16.1.8 muestra ahora que λ es holomorfa en V. Como Π^+ está recubierto por la unión de los conjuntos $\varphi(V)$, $\varphi \in \Gamma$, y como $\lambda \circ \varphi = \lambda$, concluimos que $\lambda \in H(\Pi^+)$.

Finalmente, el conjunto de todos los números $\varphi(0)=b/d$ es denso en el eje real. Si λ pudiera ser prolongada analíticamente hasta una región que contuviera propiamente a Π^+, los ceros de λ tendrían un punto límite en esta región, lo cual es imposible porque λ no es constante. ////

16.5. EL TEOREMA DE PICARD

16.5.1. Observación. El llamado «pequeño teorema de Picard» afirma que toda función entera no constante alcanza todo valor, con una excepción posible. Este es el teorema que se demuestra a continuación. Existe una versión más fuerte: *Toda función entera que no sea un polinomio toma todo valor infinitas veces, de nuevo con una posible excepción.* Que puede presentarse una excepción se ve en $f(z)=e^z$, que no alcanza el valor 0. El último teorema es en realidad cierto en una situación local: *Si f tiene una singularidad aislada en un punto z_0 y si f no toma dos valores en algún entorno de z_0, entonces z_0 es una singularidad eviatble o un polo de f.* Este teorema, llamado «gran teorema de Picard» es un notable refuerzo del teorema de Weierstrass (teorema 10.4.4) que afirma meramente que la imagen de todo entorno de z_0 es densa en el plano si f posee una singularidad esencial en z_0. No lo demostraremos aquí.

16.6.2. Teorema. *Si f es una función entera y si existen dos números complejos distintos α y β que no están en el recorrido de f, f es constante.*

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad suponemos que $\alpha=0$ y $\beta=1$; si no, cambiamos f por $(f-\alpha)/(\beta-\alpha)$. Entonces f transforma el plano en la región Ω descrita en el teorema 16.4.4.

A cada disco $D_1 \subset \Omega$ le corresponde una región $V_1 \subset \Pi^+$ (de hecho, hay infinitas tales V_1, una para cada $\varphi \in \Gamma$) tal que λ es uno a uno en V_1 y $\lambda(V_1)=D_1$; cada una de estas V_1 corta como mucho a dos de los dominios $\varphi(Q)$. Para cada elección de V_1 existe una función $\psi_1 \in H(D_1)$ tal que $\psi_1(\lambda(z))=z$ para todo $z \in V_1$.

Si D es otro disco en Ω y si $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, podemos tomar un V_2 correspondiente de modo que $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. Los elementos de función (ψ_1, D_1) y (ψ_2, D_2) serán entonces prolongaciones analíticas directas uno del otro. Notemos que $\psi_i(D_i) \subset \Pi^+$.

Como el recorrido de f está en Ω, existe un disco A_0 con centro en 0 tal que $f(A_0)$ está en un disco D_0 de Ω. Tomemos $\psi_0 \in H(D_0)$, como antes, pongamos $g(z)=\psi_0(f(z))$ para $z \in A_0$, y sea γ una curva cualquiera del plano que comienza en 0. El recorrido de $f \circ \gamma$ es un subconjunto compacto de Ω. Por tanto, γ puede ser recubierta por una cadena de discos, $A_0, \ldots, A_n$, de modo que cada $f(A_i)$ esté en un disco D_i de Ω, y podemos tomar $\psi_i \in H(D_i)$ de modo que (ψ_i, D_i) sea una prolongación analítica directa de (ψ_{i-1}, D_{i-1}), para $i=1, \ldots, n$. Esto proporciona una prolongación analítica del elemento de función (g, A_0) a lo largo de la cadena $\{A_0, \ldots, A_n\}$; notemos que $\psi_n \circ f$ tiene parte imaginaria positiva.

Como (g, A_0) puede prolongarse analíticamente a lo largo de toda curva del plano y como el plano es simplemente conexo, el teorema de monodromía implica que g puede extenderse como función entera. Además, el recorrido de g está en Π^+, por lo que $(g-i)/(g+i)$ está acotada, y, por tanto, es constante, por el teorema de Liouville. Esto muestra que g es constante, y como ψ_0 es uno a uno en $f(A_0)$ y A_0 es un conjunto abierto no vacío, concluimos que f es constante. ////

EJERCICIOS

1. Supongamos que $f(z)=\Sigma a_n z^n$, $a_n \geqslant 0$, y que el radio de convergencia de la serie es 1. Demuéstrese que f tiene una singularidad en $z=1$.

   Sugerencia: Desarróllese f en potencias de $z-\frac{1}{2}$. Si 1 fuera un punto regular de f, la nueva serie convergería en algún $x>1$. ¿Qué implicaría esto acerca de la serie original?

2. Supongamos que (f, D) y (g, D) son elementos de función, que P es un polinomio en dos variables y que $P(f, g)=0$ en D. Supongamos que f y g pueden prolongarse analíticamente a lo largo de una curva γ hasta f_1 y g_1. Demuéstrese que $P(f_1, g_1)=0$. Extiéndase esto a más de dos funciones. ¿Existe un tal teorema para alguna clase de funciones P más amplia que los polinomios?

3. Supongamos que Ω es una región simplemente conexa, y que u es una función armónica real en Ω. Demuéstrese que existe una $f \in H(\Omega)$ tal que $u=\operatorname{Re} f$. Demuéstrese que esto no se verifica en ninguna región que no sea simplemente conexa.

4. Supongamos que X es el cuadrado unidad cerrado del plano, que f es una función compleja continua en X, y que f no tiene ningún cero en X. Demuéstrese que existe una función continua g en X tal que $f=e^g$. ¿Para qué clase de espacios X (distintos del cuadrado anterior) se verifica también esto?

5. Demuéstrese que las transformaciones $z \to z+1$ y $z \to -1/z$ generan el grupo modular G completo. Sea R el conjunto que consiste en todos los $z=x+iy$ tales que $|x|<\frac{1}{2}$, $y>0$ y $|z|>1$, más aquellos puntos límite que tengan $x \leqslant 0$. Demuéstrese que R es un dominio fundamental de G.

6. Demuéstrese que G está generado también por las transformaciones φ y ψ, donde

$$\varphi(z)=-\frac{1}{z}, \qquad \psi(z)=\frac{z-1}{z}.$$

   Demuéstrese que φ tiene periodo 2 y ψ tiene periodo 3.

7. Obténgase la relación entre la composición de transformaciones bilineales y la multiplicación de matrices. Trátese de utilizar esto para construir una demostración algebraica del teorema 16.4.3, *c)* o de la primera parte del ejercicio 5.

8. Sea E un conjunto compacto del eje real, de medida de Lebesgue positiva, sea Ω el complementario de E, relativo al plano, y definamos

$$f(z)=\int_E \frac{dt}{t-z} \qquad (z \in \Omega).$$

   Respóndanse las siguientes preguntas:

   a) ¿Es f constante?

   b) ¿Puede extenderse f como función entera?

   c) ¿Existe el $\lim zf(z)$ cuando $z \to \infty$? Si existe, ¿cuál es?

   d) ¿Tiene f una raíz cuadrada holomorfa en Ω?

   e) ¿Es acotada la parte real de f en Ω?

   f) ¿Es acotada la parte imaginaria de f en Ω?
   [Si «sí» en *e)* o *f)*, dar una cota.]

   g) ¿Qué es $\int_\gamma f(z)\,dz$ si γ es una circunferencia orientada positivamente que tiene a E en su interior?

   h) ¿Existe alguna función holomorfa acotada φ en Ω que no sea constante?

9. Compruébense las respuestas al ejercicio 8 en el caso especial

$$E=[-1, 1].$$

10. Llamamos a un conjunto compacto E del plano *evitable* si no existen funciones holomorfas acotadas no constantes en el complementario de E.

a) Demuéstrese que todo conjunto compacto numerable es evitable.

b) Si E es un subconjunto compacto del eje real y $m(E)=0$, demuéstrese que E es evitable. *Sugerencia:* E puede rodearse por curvas de longitud total arbitrariamente pequeña. Aplíquese la fórmula de Cauchy, como en el ejercicio 25 del capítulo 10.

c) Supongamos que E es evitable, que Ω es una región, $E \subset \Omega$, $f \in H(\Omega - E)$ y que f es acotada. Demuéstrese que f se puede extender como función holomorfa en Ω.

d) Formúlese y demuéstrese un análogo de la parte *b)* para conjuntos E que no estén necesariamente en el eje real.

e) Demuéstrese que ningún subconjunto compacto conexo del plano (con más de un punto) es evitable.

11. Para cada número positivo α, sea Γ_α el camino con intervalo del parámetro $(-\infty, \infty)$ definido mediante

$$\Gamma_\alpha(t)=\begin{cases} -t-\pi i & (-\infty < t \leqslant -\alpha), \\ \alpha+\dfrac{\pi i t}{\alpha} & (-\alpha \leqslant t \leqslant \alpha), \\ t+\pi i & (\alpha \leqslant t < \infty). \end{cases}$$

Sea Ω_α la componente del complementario de Γ_α^* que contiene al origen, y definamos

$$f_\alpha(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\alpha} \frac{\exp(e^w)}{w-z}\,dw \qquad (z \in \Omega_\alpha).$$

Demuéstrese que f_β es una prolongación analítica de f_α si $\alpha < \beta$. Demuéstrese que, en consecuencia, existe una función entera f cuya restricción a Ω_α sea f_α. Demuéstrese que

$$\lim_{r\to\infty} f(re^{i\theta})=0$$

para toda $e^{i\theta} \neq 1$. (Aquí r es positivo, y θ real, como siempre.) Demuéstrese que f no es constante.

Sugerencia: Considérese $f(r)$.

Si

$$g=f\exp(-f).$$

demuéstrese que

$$\lim_{r\to\infty} g(re^{i\theta})=0$$

para toda $e^{i\theta}$.

Demuéstrese que existe una función entera h tal que

$$\lim_{n\to\infty} h(nz)=\begin{cases} 1 & \text{si } z=0, \\ 0 & \text{si } z\neq 0. \end{cases}$$

12. Supongamos

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z-z^2}{2}\right)^{3^x}=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n.$$

Obténganse las regiones en las que las dos series convergen. Muéstrese que esto ilustra el teorema 16.1.5. Obténgase el punto singular de f más próximo al origen.

13. Sea $\Omega=\{z:\frac{1}{2}<|z|<2\}$. Para $n=1,2,3,\ldots$ sea X_n el conjunto de todas las $f\in H(\Omega)$ que son derivadas n-ésimas de alguna $g\in H(\Omega)$. [En otras palabras, X_n es el recorrido del operador diferencial D^n con dominio $H(\Omega)$.]

a) Demuéstrese que $f\in X_1$ si, y sólo si, $\int_\gamma f(z)\,dz=0$, donde γ es la circunferencia unidad orientada positivamente.

b) Demuéstrese que $f\in X_n$ para todo n si, y sólo si, f se extiende como función holomorfa en $D(0;2)$.

ESPACIOS H^p

Este capítulo se dedica al estudio de ciertos subespacios de $H(U)$ definidos mediante ciertas condiciones de crecimiento; de hecho, están todos ellos contenidos en la clase N definida en el capítulo 15. Estos espacios, llamados espacios H^p (denominados con la inicial de G. H. HARDY), tienen un gran número de propiedades interesantes que se refieren a factorizaciones, valores en la frontera y representaciones del tipo de Cauchy en términos de medidas sobre la frontera de U. Presentaremos meramente los aspctos más importantes, tales como el teorema de F. y M. Riesz sobre medidas μ cuyos coeficientes de Fourier $\hat{\mu}(n)$ son 0 para todo $n < 0$, la clasificación de Beurling de los subespacios invariantes de H^2, y el teorema de M. Riesz sobre funciones conjugadas.

Un enfoque conveniente del tema son las funciones subarmónicas, y comenzamos, por tanto, con un breve esbozo de sus propiedades.

17.1. FUNCIONES SUBARMONICAS

17.1.1. Definición. Una función u definida en un conjunto abierto Ω del plano se dice *subarmónica* si posee las siguientes cuatro propiedades.

a) $-\infty \leqslant u(z) < \infty$ para todo $z \in \Omega$.

b) u es semicontinua superiormente en Ω.

c) Si $\bar{D}(a; r) \subset \Omega$, entonces

$$u(a) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + re^{i\theta})\, d\theta.$$

d) Ninguna de las integrales de *c)* es $-\infty$.

Adviértase que las integrales de *c)* existen siempre y no son $+\infty$, porque *a)* y *b)* implican que u está acotada superiormente en todo compacto $K \subset \Omega$. *(Demostración:* Si K_n es el conjunto de todos los $z \in K$ en los que $u(z) \geqslant n$, entonces $K \supset K_1 \supset K_2, \ldots$, por lo que o $K_n = \varnothing$ para algún n, o $\bigcap K_n \neq \varnothing$, en cuyo caso $u(z) = \infty$ para algún $z \in K$.) En consecuencia, *d)* dice que los integrandos en *c)* pertenecen a $L^1(T)$.

Toda función armónica real es obviamente subarmónica.

17.1.1. Teorema. *Si u es subarmónica en Ω, y si φ es una función convexa monótona creciente en R^1, entonces $\varphi \circ u$ es subarmónica.*

[Para tener $\varphi \circ u$ definida en todos los puntos de Ω, hacemos $\varphi(-\infty) = \lim \varphi(x)$ cuando $x \to -\infty$.]

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, $\varphi \circ u$ es semicontinua superiormente, porque φ es creciente y continua. Por otra parte, si $\bar{D}(a; r) \subset \Omega$, tenemos

$$\varphi(u(a)) \leqslant \varphi\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a+re^{i\theta})\,d\theta\right) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(u(a+re^{i\theta}))\,d\theta.$$

La primera de estas desigualdades se verifica porque φ es creciente y u es subarmónica; la segunda se deduce de la convexidad de φ, por el teorema 3.1.3. ////

17.1.3. Teorema. *Si Ω es una región, $f \in H(\Omega)$, y f no es idénticamente 0, entonces* $\log|f|$ *es subarmónica en Ω, y también lo son* $\log^+|f|$ *y* $|f|^p$ $(0 < p < \infty)$.

DEMOSTRACIÓN. Se entiende que $\log|f(z)| = -\infty$ si $f(z) = 0$. Entonces $\log|f|$ es semicontinua superiormente en Ω, y el teorema 15.4.4 implica que $\log|f|$ es subarmónica.

Las demás afirmaciones se obtienen si aplicamos el teorema 17.1.2 a $\log|f|$ en lugar de u, con

$$\varphi(t) = \text{máx}\,(0, t) \quad \text{y} \quad \varphi(t) = e^{pt}. \qquad ////$$

17.1.4. Teorema. *Supongamos que u es una función continua subarmónica en Ω, que K es un subconjunto compacto de Ω, que h es una función real continua en K que es armónica en el interior V de K y que $u(z) \leqslant h(z)$ en todos los puntos frontera de K. Entonces $u(z) \leqslant h(z)$ para todo $z \in K$.*

Este teorema explica el término «subarmónica». La continuidad de u no es necesaria, pero no necesitamos el caso general y lo dejamos como ejercicio.

DEMOSTRACIÓN. Pongamos $u_1 = u - h$, y supongamos, para llegar a una contradicción, que $u_1(z) > 0$ para algún $z \in V$. Como u es continua en K, u_1 alcanza su máximo m en K; y como $u_1 \leqslant 0$ en la frontera de K, el conjunto $E = \{z \in K: u_1(z) = m\}$ es un subconjunto compacto no vacío de V. Sea z_0 un punto frontera de E. Entonces para algún $r > 0$ tenemos $\bar{D}(z_0; r) \subset V$, pero algún subarco de la frontera de $\bar{D}(z_0; r)$ está en el complementario de E. Por tanto,

$$u_1(z_0) = m > \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_1(z_0 + re^{i\theta})\,d\theta,$$

y esto significa que u_1 no es subarmónica en V. Pero si u es subarmónica, también lo es $u - h$, por la propiedad del valor medio de las funciones armónicas, y llegamos a una contradicción. ////

17.1.5. Teorema. *Supongamos que u es una función subarmónica continua en U, y que*

$$m(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(re^{i\theta})\,d\theta \qquad (0 \leqslant r < 1).$$

Si $r_1 < r_2$, entonces $m(r_1) \leqslant m(r_2)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea h la función continua en $\bar{D}(0;\, r_2)$ que coincide con u en la frontera de $\bar{D}(0;\, r_2)$ y que es armónica en $D(0;\, r_2)$. Por el teorema 17.1.4, $u \leqslant h$ en $D(0;\, r_2)$. En consecuencia,

$$m(r_1) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(r_1 e^{i\theta})\, d\theta = h(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(r_2 e^{i\theta})\, d\theta = m(r_2). \qquad ////$$

17.2. LOS ESPACIOS H^p Y N

17.2.1. Teorema. *Si $f \in H(U)$, y si*

$$M_0(f;\, r) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta\right\},$$

$$M_p(f;\, r) = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p\, d\theta\right\}^{1/p} \qquad (0 < p < \infty),$$

$$M_\infty(f;\, r) = \sup_\theta |f(re^{i\theta})|,$$

entonces M_0, M_p y M_∞ son funciones monótonas crecientes de r en $[0, 1)$.

DEMOSTRACIÓN. Para M_0 y M_p ésta es una consecuencia inmediata de los teoremas 17.1.3 y 17.1.5. Para M_∞ se deduce del teorema del módulo máximo. ////

Esto sugiere la definición siguiente:

17.2.2. Definición. Para cualquier $f \in H(U)$ y para $0 \leqslant p \leqslant \infty$, hacemos

$$\|f\|_p = \lim_{r \to 1} M_p(f;\, r),$$

donde $M_p(f;\, r)$ es como en el teorema 17.2.1.

Para $0 < p \leqslant \infty$, la clase H^p se define como la que consiste en todas las $f \in H(U)$ para las que $\|f_p\| < \infty$. Nótese que esto coincide con la terminología introducida previamente en el caso $p = \infty$.

La clase N consiste en todas las $f \in H(U)$ para las que $\|f\|_0 < \infty$.

Es claro que $H^\infty \subset H^p \subset H^s \subset N$ si $0 < s < p < \infty$.

17.2.3. Observaciones. Para $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\|f\|_p$ satisface la desigualdad triangular, de modo que H^p es un espacio vectorial normado. Para verlo, apliquemos la desigualdad de Minkowski a $M_p(f;\, r)$:

$$M_p(f+g;\, r) \leqslant M_p(f;\, r) + M_p(g;\, r) \qquad (0 \leqslant r < 1). \qquad [17.1]$$

Cuando $r \to 1$, obtenemos

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p. \qquad [17.2]$$

En realidad, *H^p es un espacio de Banach,* si $1 \leqslant p \leqslant \infty$: Para demostrar que es completo, supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en H^p,

$|z| \leqslant r < R < 1$, y apliquemos la fórmula de Cauchy a $f_n - f_m$, integrando a lo largo de la circunferencia de radio R. Esto conduce a las desigualdades

$$(R-r)|f_n(z)-f_m(z)| \leqslant M_1(f_n-f_m;\ R) \leqslant M_p(f_n-f_m;\ R) \leqslant \|f_n-f_m\|_p,$$

y concluimos que $\{f_n\}$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de U a una función $f \in H(U)$. Dado $\epsilon > 0$, existe un m tal que $\|f_n - f_m\| < \epsilon$ para todo $n > m$, y entonces, para todo $r < 1$,

$$M_p(f-f_m;\ r) = \lim_{n\to\infty} M_p(f_n-f_m;\ r) \leqslant \epsilon.$$

Esto proporciona $\|f-f_m\|_p \to 0$ cuando $m \to \infty$.

Para $p < 1$, H^p es también un espacio vectorial, pero $\|f\|_p$ ya no satisface la desigualdad triangular.

Vimos en el teorema 15.5.3 que los ceros de cualquier $f \in N$ satisfacen la condición de Blaschke $\Sigma(1-|\alpha_n|) < \infty$. Por tanto, lo mismo se verifica en todo H^p. Es interesante notar que cualquier $f \in H^p$ puede «dividirse» por sus ceros sin aumentar la norma:

17.2.4. Teorema. *Supongamos que $f \in N$, $f \not\equiv 0$, y que B es el producto de Blaschke formado con los ceros de f. Pongamos $g = f/B$. Entonces $g \in N$ y $\|g\|_0 = \|f\|_0$.*

Más aún, si $f \in H^p$, entonces $g \in H^p$ y $\|g\|_p = \|f\|_p$ $(0 < p \leqslant \infty)$.

DEMOSTRACIÓN. Notemos en primer lugar que

$$|g(z)| \geqslant |f(z)| \qquad (z \in U). \tag{17.3}$$

De hecho, se verifica la desigualdad estricta para todo $z \in U$, a menos que f no tenga ceros en U, en cuyo caso $B = 1$ y $g = f$.

Si s y t son números reales no negativos, se verifica la desigualdad

$$\log^+(st) \leqslant \log^+ s + \log^+ t \tag{17.4}$$

puesto que el primer miembro es 0 si $st < 1$ y es $\log s + \log t$ si $st \geqslant 1$. Como $|g| = |f|/|B|$, [17.4] proporciona

$$\log^+|g| \leqslant \log^+|f| + \log\frac{1}{|B|}. \tag{17.5}$$

Por el teorema 15.5.4, [17.5] implica que $\|g\|_0 \leqslant \|f\|_0$, y como se verifica [17.3], tenemos en realidad $\|g\|_0 = \|f\|_0$.

Supongamos ahora $f \in H^p$ para algún $p > 0$. Sea B_n el producto de Blaschke finito formado con los primeros n ceros de f (disponemos estos ceros en sucesión, teniendo en cuenta sus multiplicidades). Pongamos $g_n = f/B_n$. Para cada n, $|B_n(re^{i\theta})| \to 1$ uniformemente, cuando $r \to 1$. Por tanto, $\|g_n\|_p = \|f\|_p$. Cuando $n \to \infty$, $|g_n|$ aumenta hacia $|g|$, de modo que

$$M_p(g;\ r) = \lim_{n\to\infty} M_p(g_n;\ r) \qquad (0 < r < 1), \tag{17.6}$$

por el teorema de la convergencia monótona. El segundo miembro de [17.6] es a lo sumo $\|f\|_p$, para todo $r < 1$; y si hacemos $r \to 1$, obtenemos $\|g\|_p \leqslant \|f\|_p$. La igualdad se deduce, como antes, de [17.3]. ////

17.3. EL ESPACIO H^2

La particular importancia de H^2 se debe al hecho de que es un espacio de Hilbert y que puede identificarse muy fácilmente con cierto subespacio de $L^2(T)$, donde T es la circunferencia unidad. Recordamos que la norma de cualquier $g \in L^2(T)$ es

$$\|g\|_2 = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(e^{i\theta})|^2 \, d\theta \right\}^{1/2}$$

y que cada $g \in L^2(T)$ tiene coeficientes de Fourier

$$\hat{g}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{i\theta}) e^{-in\theta} \, d\theta \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Las propiedades básicas de H^2 se resumen en el siguiente teorema.

17.3.1. Teorema.

a) *Una función $f \in H(U)$, de la forma*

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n \qquad (z \in U), \tag{17.7}$$

está en H^2 si, y sólo si, $\Sigma |a_n|^2 < \infty$; en este caso,

$$\|f\|_2 = \left\{ \sum_0^\infty |a_n|^2 \right\}^{1/2}. \tag{17.8}$$

b) *Si $f \in H^2$, entonces f tiene límites radiales $f^*(e^{i\theta})$ en casi todo punto de T; $f^* \in L^2(T)$; el coeficiente n-ésimo de Fourier de f^* es a_n si $n \geqslant 0$ y 0 si $n < 0$; se verifica la aproximación en L^2*

$$\lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f^*(e^{i\theta})| - f(re^{i\theta})|^2 \, d\theta = 0; \tag{17.9}$$

y f es la integral de Poisson así como la integral de Cauchy de f^*: Si $z = re^{i\theta}$, entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f^*(e^{it}) \, dt \tag{17.10}$$

y

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f^*(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta, \tag{17.11}$$

donde Γ es la circunferencia unidad orientada positivamente.

c) *La aplicación $f \to f^*$ es una isometría de H^2 sobre el subespacio de $L^2(T)$ que consiste en aquellas funciones $g \in L^2(T)$ que tienen $\hat{g}(n) = 0$ para todo $n < 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Un cálculo directo (teorema de Parseval) muestra que

$$M_2(f;\, r)=\left\{\sum_0^\infty |a_n|^2 r^{2n}\right\}^{1/2} \qquad (0\leqslant r<1). \qquad [17.12]$$

Esto demuestra *a)*.

Supongamos ahora $f\in H^2$. Para $0<s<1$, definamos funciones f_s en T mediante

$$f_s(e^{i\theta})=f(se^{i\theta})=\sum_0^\infty a_n s^n e^{in\theta}. \qquad [17.13]$$

Como $\Sigma|a_n|^2<\infty$, el teorema de Riesz-Fischer asegura la existencia de una función $g\in L^2(T)$ tal que $\hat{g}(n)=a_n$ para $n\geqslant 0$ y $\hat{g}(n)=0$ para $n<0$. Los coeficientes de Fourier de $g-f_s$ son $(1-s^n)a_n$ si $n\geqslant 0$. Otra aplicación del teorema de Parseval muestra en consecuencia que

$$\|g-f_s\|_2^2=\sum_1^\infty (1-s_n)^2|a_n|^2. \qquad [17.14]$$

Cuando $s\to 1$, el segundo miembro de [17.14] tiende a 0, y concluimos que

$$\lim_{s\to 1}\|g-f_s\|_2=0. \qquad [17.15]$$

Para cualquier $s\in(0,1)$ fijo, $f(sz)$ es holomorfa en $D(0;\,1/s)$. En consecuencia, si $z\in U$ y $z=re^{i\theta}$, tenemos

$$f(sz)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)f_s(e^{it})\,dt \qquad [17.16]$$

y

$$f(sz)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f_s(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta. \qquad [17.17]$$

Consideremos las diferencias entre estas integrales y las correspondientes a g en lugar de f_s. La desigualdad de Schwarz, combinada con [17.15], proporciona entonces [17.10] y [17.11], con g en lugar de f^*. Por tanto, f es la integral de Poisson de g; y como $g\in L^1(T)$, el corolario del teorema 11.2.8 muestra que existen los límites radiales de f y son iguales a g en c.t.p. de T. Esto demuestra *b)*.

Que $\|f^*\|_2=\|f\|_2$ se deduce de [17.9]. La demostración de *b)* muestra que todos los coeficientes de Fourier de f^* son 0 para $n<0$. Para completar la demostración de *c)*, supongamos $g\in L^2(T)$ y $\hat{g}(n)=0$ para todo $n<0$, y pongamos

$$f(z)=\sum_0^\infty \hat{g}(n)z^n. \qquad [17.18]$$

Entonces $f\in H^2$ por *a)*, y la demostración de *b)* muestra que $f^*=g$. ////

17.3.2. Observación. Supongamos que $f \in H^p$ para algún $p > 0$, que B es el producto de Blaschke formado con los ceros de f, y $g = f/B$. El teorema 17.2.4 muestra que $g \in H^p$, y que además $\|g\|_p = \|f\|_p$. Como g no tiene ceros en U y U es simplemente conexo, existe una $\varphi \in H(U)$ tal que $\exp(\varphi) = g$ (teorema 13.4.1). Pongamos $h = \exp(p\varphi/2)$. Entonces $h \in H(U)$, y $|h|^2 = |g|^p$, por lo que $h \in H^2$. De hecho, $\|h\|_2^2 = \|g\|_p^p$.

Por tanto, f tiene una factorización de la forma

$$f = B \cdot h^{2/p}, \qquad [17.19]$$

donde $h \in H^2$ y h no tiene ceros en U. Esto hace posible, en muchos casos, aplicar resultados de H^2 a funciones de cualquier H^p. La demostración siguiente utiliza esta técnica.

17.3.3. Teorema. *Si $f \in H^1$, entonces existe el*

$$f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r \to 1} f(re^{i\theta}) \qquad [17.20]$$

en casi todos los puntos de T, y

$$\lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f^*(e^{i\theta}) - f(re^{i\theta})| \, d\theta = 0. \qquad [17.21]$$

DEMOSTRACIÓN. Que existe el límite [17.20] en c.t.p. se deduce del corolario del teorema 11.4.2. Si B es el producto de Blaschke formado con los ceros de f, la observación precedente muestra que existe una $h \in H^2$ tal que $h^2 = f/B$ y $\|h\|_2^2 = \|f\|_1$. Pongamos $g = Bh$. Entonces $g \in H^2$, $\|g\|_2 = \|h\|_2$ y $f = gh$. Hemos factorizado f en un producto de dos funciones que pertenecen a H^2.

Definamos f_r en T mediante $f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta})$, y definamos g_r y h_r de la misma manera. Como $f^* = g^* h^*$ en c.t.p., tenemos

$$f^* - f_r = g^*(h^* - h_r) + h_r(g^* - g_r). \qquad [17.22]$$

Por el teorema 17.3.1, $\|h^* - h_r\|_2 \to 0$ y $\|g^* - g_r\|_2 \to 0$ cuando $r \to 1$. Además,

$$\|g^*\|_2^2 = \|g\|_2^2 = \|f\|_1 \qquad [17.23]$$

y

$$\|h_r\|_2^2 \leqslant \|h\|_2^2 = \|f\|_1. \qquad [17.24]$$

Si aplicamos la desigualdad de Schwarz a cada uno de los dos productos del segundo miembro de [17.22], concluimos en consecuencia que $\|f^* - f_r\|_1 \to 0$ cuando $r \to 1$. ////

Corolario. *Si $f \in H^1$, entonces f es la integral de Poisson y la integral de Cauchy de f^*.*

DEMOSTRACIÓN. Si $R < 1$ y $g(z) = f(Rz)$, entonces $g \in H(D)$, donde $D = D(0; 1/R)$. Por tanto, para $z \in U$,

$$f(Rz) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(R\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(Re^{it})}{e^{it} - z} e^{it} \, dt. \qquad [17.22]$$

Fijemos ahora $z \in U$, hagamos $R \to 1$, y utilicemos [17.22]. Esto proporciona la representación de Cauchy. La representación de Poisson se obtiene de la misma manera. ////

17.4. EL TEOREMA DE F. Y M. RIESZ

17.4.1. Teorema. *Si μ es una medida de Borel compleja sobre la circunferencia unidad T y si*

$$\int_T e^{-int}\, d\mu(t) = 0 \qquad (n = -1, -2, -3, \ldots), \tag{17.25}$$

entonces μ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue.

DEMOSTRACIÓN. Para $z \in U$, definamos

$$f(z) = \int_T \frac{d\mu(t)}{1 - ze^{-it}}. \tag{17.26}$$

Si $z = re^{i\theta}$, entonces

$$(1 - ze^{-it})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in(\theta - t)}, \tag{17.27}$$

y como

$$P_r(\theta - t) = \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta - t)}, \tag{17.28}$$

[17.25] muestra que f viene dada también por la integral de Poisson

$$f(z) = \int_T P_r(\theta - t)\, d\mu(t). \tag{17.29}$$

En consecuencia,

$$M_1(f; r) \leqslant \int_T d|\mu|(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\, d\theta = \|\mu\|, \tag{17.30}$$

de modo que $f \in H^1$. Pero entonces se deduce del teorema 17.3.3 que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f^*(e^{it})\, dt, \tag{17.31}$$

donde $f^* \in L^1(T)$. La comparación de [17.29] y [17.31] conduce a

$$d\mu(t) = \frac{1}{2\pi} f^*(e^{it})\, dt, \tag{17.32}$$

por el teorema 11.4.2. Esto proporciona la conclusión deseada. ////

La característica más notable de este teorema es que obtiene la continuidad absoluta de una medida de una condición que aparentemente no tiene relación, la anulación de la mitad de sus coeficientes de Fourier. En los últimos años, se ha extendido el teorema a otras varias situaciones.

17.5. TEOREMAS DE FACTORIZACION

Sabemos ya por el teorema 17.2.4 que toda $f \in H^p$ (excepto $f=0$) puede factorizarse en un producto de Blaschke y una función $g \in H^p$ que no tiene ceros en U. Existe también una factorización de g de naturaleza más sutil. Se relaciona, imprecisamente hablando, con la rapidez con la que g tiende a cero a lo largo de ciertos radios.

17.5.1. Definición. Una *función interior* es una función $M \in H^\infty$ para la que $|M^*|=1$ en c.t.p. de T. (Como siempre, M^* denota los límites radiales de M.)

Si φ es una función medible positiva definida sobre T tal que $\log \varphi \in L^1(T)$, y si

$$Q(z)=c \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log \varphi(e^{it})\, dt \right\} \qquad [17.33]$$

para $z \in U$, entonces Q se llama una *función exterior.* Aquí c es una constante, $|c|=1$.

El teorema 15.5.4 muestra que todo producto de Blaschke es una función interior, pero existen otras. Pueden describirse de la manera siguiente.

17.5.2. Teorema. *Supongamos que c es una constante, $|c|=1$, que B es un producto de Blaschke, que μ es una medida de Borel finita positiva sobre T que es singular con respecto a la medida de Lebesgue, y que*

$$M(z)=cB(z) \exp\left\{ -\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, d\mu(t) \right\} \quad (z \in U). \qquad [17.34]$$

Entonces M es una función interior, y toda función interior es de esta forma.

DEMOSTRACIÓN. Si se verifica [17.34] y $g=M/B$, entonces $\log|g|$ es la integral de Poisson de $-d\mu$, y, por tanto, $\log|g| \leqslant 0$, de modo que $g \in H^\infty$, y lo mismo ocurre con M. Además, $D\mu=0$ en c.t.p., puesto que μ es singular (teorema 8.1.6), y en consecuencia los límites radiales de $\log|g|$ son 0 en c.t.p. (teorema 11.2.8). Como $|B^*|=1$ en c.t.p., vemos que M es una función interior.

Recíprocamente, sea B el producto de Blaschke formado con los ceros de una función interior dada M y pongamos $g=M/B$. Entonces $\log|g|$ es armónica en U. Los teoremas 15.5.4 y 17.2.4 muestran que $|g| \leqslant 1$ en U y que $|g^*|=1$ en c.t.p. de T. Entonces $\log|g| \leqslant 0$. Concluimos del teorema 11.4.2 que $\log|g|$ es la integral de Poisson de $-d\mu$, para alguna medida positiva μ sobre T. Como $\log|g^*|=0$ en c.t.p. de T, tenemos $D\mu=0$ en c.t.p. de T, y, por tanto, μ es singular. Finalmente, $\log|g|$ es la parte real de

$$h(z)=-\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, d\mu(t),$$

y esto implica que $g = c \exp(h)$ para alguna constante c con $|c| = 1$. Entonces M es de la forma [17.34].

Esto completa la demostración. ////

El ejemplo más simple de una función interior que no es un producto de Blaschke, es el siguiente: Tomemos $c = 1$ y $B = 1$, y sea μ la masa unidad en $t = 0$. Entonces

$$M(z) = \exp\left\{\frac{z+1}{z-1}\right\},$$

que tiende a cero muy rápidamente a lo largo del radio que termina en $z = 1$.

17.5.3. Teorema. *Supongamos que Q es la función exterior relativa a φ como en la definición* 17.5.1. *Entonces*

a) $\log|Q|$ *es la integral de Poisson de* $\log\varphi$.

b) $\lim_{r\to 1} |Q(re^{i\theta})| = \varphi(e^{i\theta})$ *en c.t.p. de* T.

c) $Q \in H^p$ *si, y sólo si,* $\varphi \in L^p(T)$. *En este caso,* $\|Q\|_p = \|\varphi\|_p$.

DEMOSTRACIÓN. *a)* es claro por simple inspección y *a)* implica que los los límites radiales de $\log|Q|$ son iguales a $\log\varphi$ en c.t.p. de T, lo que demuestra *b)*. Si $Q \in H^p$, el lema de Fatou implica que $\|Q^*\|_p \leqslant \|Q\|_p$, por tanto, $\|\varphi\|_p \leqslant \|Q\|_p$, por *b)*. Recíprocamente, si $\varphi \in L^p(T)$, entonces

$$|Q(re^{i\theta})|^p = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\log\varphi^p(e^{it})\,dt\right\}$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\varphi^p(e^{it})\,dt,$$

por la desigualdad entre las medias geométrica y aritmética (teorema 3.1.3), y si integramos la última desigualdad con respecto a θ obtenemos que $\|Q\|_p \leqslant \|\varphi\|_p$ si $p < \infty$. El caso $p = \infty$ es trivial. ////

17.5.4. Teorema. *Supongamos* $0 < p \leqslant \infty$, $f \in H^p$, *y que f no es idénticamente* 0. *Entonces* $\log|f^*| \in L^1(T)$, *la función exterior*

$$Q_f(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log|f^*(e^{it})|\,dt\right\} \qquad [17.35]$$

está en H^p, y existe una función interior M_f tal que

$$f = M_f Q_f. \qquad [17.36]$$

Más aún,

$$\log|f(0)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f^*(e^{it})|\,dt. \qquad [17.37]$$

La igualdad se verifica en [17.37] *si, y sólo si, M_f es constante.*

Las funciones M_f y Q_f se llaman los *factores interior* y *exterior* de f, respectivamente; Q_f depende sólo de los valores de $|f|$ en la frontera.

DEMOSTRACIÓN. Suponemos primero que $f \in H^1$. Si B es el producto de Blaschke formado con los ceros de f y si $g = f/B$, el teorema 17.2.4 muestra

que $g \in H^1$; y como $|g^*| = |f^*|$ en c.t.p. de T, basta demostrar el teorema con g en lugar de f.

Por tanto, supongamos que f no tiene ceros en U y que $f(0)=1$. Entonces $\log|f|$ es armónica en U, $\log|f(0)|=0$, y como $\log = \log^+ - \log^-$, la propiedad del valor medio de las funciones armónicas implica que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^- |f(re^{i\theta})|\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta \leqslant \|f\|_0 \leqslant \|f\|_1 \qquad [17.38]$$

para $0 < r < 1$. Se deduce ahora del lema de Fatou que tanto $\log^+|f^*|$ y $\log^-|f^*|$ están en $L^1(T)$, y, por tanto, también $\log|f^*|$.

Esto muestra que la definición [17.35] tiene sentido. Por el teorema 17.5.3, $Q_f \in H^1$. Además, $|Q_\pm^*| = |f^*| \neq 0$ en c.t.p., porque $\log|f^*| \in L^1(T)$. Si podemos demostrar que

$$|f(z)| \leqslant |Q_f(z)| \qquad (z \in U), \qquad [17.39]$$

entonces f/Q_f será una función interior, y obtendremos la factorización [17.36].

Como $\log|Q_f|$ es la integral de Poisson de $\log|f^*|$, [17.39] es equivalente a la desigualdad

$$\log|f| \leqslant P\,[\log|f^*|], \qquad [17.40]$$

que demostraremos a continuación. Nuestras notaciones serán como las del capítulo 11: $P[h]$ es la integral de Poisson de la función $h \in L^1(T)$.

Para $|z| \leqslant 1$ y $0 < R < 1$, pongamos $f_R(z) = f(Rz)$. Fijemos $z \in U$. Entonces

$$\log|f_R(z)| = P\,[\log^+|f_R|](z) - P\,[\log^-|f_R|](z). \qquad [17.41]$$

Como $|\log^+ u - \log^+ v| \leqslant |u-v|$ para todos los números reales u y v, y como $\|f_R - f^*\|_1 \to 0$ cuando $R \to 1$ (teorema 17.3.3), la primera integral de Poisson en [17.41] converge a $P\,[\log^+|f^*|]$, cuando $R \to 1$. En consecuencia, el lema de Fatou proporciona

$$P\,[\log^-|f^*|] \leqslant \liminf_{R\to 1} P\,[\log^-|f_R|] = P\,[\log^+|f^*|] - \log|f|, \qquad [17.42]$$

que es lo mismo que [17.40].

Hemos establecido, pues, la factorización [17.36]. Si ponemos $z=0$ en [17.39] obtenemos [17.37]; la igualdad se verifica en [17.37] si, y sólo si, $|f(0)| = |Q_f(0)|$, es decir, si, y sólo si, $|M_f(0)|=1$; y como $\|M_f\|_\infty = 1$, esto ocurre sólo cuando M_f es constante.

Esto completa la demostración para el caso $p=1$.

Si $1 < p \leqslant \infty$, entonces $H^p \subset H^1$, y, por tanto, todo lo que queda por demostrar es que $Q_f \in H^p$. Pero si $f \in H^p$, entonces $|f^*| \in L^p(T)$, por el lema de Fatou; en consecuencia, $Q_f \in H^p$, por el teorema 17.5.3, *c)*.

Si $p < 1$, podemos utilizar la técnica descrita en el apartado 17.3.2. Dejamos los detalles como ejercicio. ////

El hecho de que $\log|f^*| \in L^1(T)$ tiene una consecuencia que hemos utilizado ya en la demostración, pero que es lo bastante importante para ser enunciada separadamente:

17.5.6. Teorema. *Si $0 < p \leqslant \infty$, $f \in H^p$, y f no es idénticamente* 0, *entonces en casi todo punto de T tenemos $f^*(e^{i\theta}) \neq 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $f^*=0$ entonces $\log|f^*|=-\infty$, y si esto ocurre en un conjunto de medida positiva, entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log|f^*(e^{it})|\,dt=-\infty. \qquad ////$$

Observemos que el teorema 17.5.5 impone una restricción cuantitativa a la situación de los ceros de los límites radiales de una $f \in H^p$. Dentro de U los ceros también están restringidos cuantitativamente, por la condición de Blaschke.

Como siempre, podemos repetir el resultado anterior sobre los ceros como un teorema de unicidad:

Si $f \in H^p$, $g \in H^p$ y $f^*(e^{i\theta})=g^*(e^{i\theta})$ en algún subconjunto de T cuya medida de Lebesgue sea positiva, entonces $f(z)=g(z)$ para todo $z \in U$.

17.5.7. Observaciones. Consideremos rápidamente la clase N, con el propósito de determinar hasta qué punto son ciertos en ella los teoremas 17.5.4 y 17.5.5. Si $f \in N$ y $f \not\equiv 0$, podemos dividir por un producto de Blaschke y obtener un cociente g que no tenga ceros en U y que esté en N (teorema 17.2.4). Entonces $\log|g|$ es armónica, y como

$$|\log|g||=2\log^+|g|-\log|g| \qquad [17.43]$$

y

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|g(re^{i\theta})|\,d\theta=\log|g(0)|, \qquad [17.44]$$

vemos que $\log|g|$ satisface las hipótesis del teorema 11.5.6 y es, en consecuencia, la integral de Poisson de una medida real μ. Por tanto,

$$f(z)=cB(z)\exp\left\{\int_T \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\mu(t)\right\}, \qquad [17.45]$$

donde c es una constante, $|c|=1$, y B es un producto de Blaschke.

Obsérvemos cómo la hipótesis de que las integrales de $\log^+|g|$ estén acotadas (que es una formulación cuantitativa del enunciado de que $|g|$ no se aproxime mucho a ∞) implica la acotación de las integrales de $\log^-|g|$ (que dice que $|g|$ no se aproxima mucho a 0 en muchos sitios).

Si μ es una medida negativa, el factor exponencial en [17.45] está en H^∞. Apliquemos la descomposición de Jordan a μ. Ello muestra que:

A toda $f \in A$ le corresponden dos funciones b_1 y $b_2 \in H^\infty$ tales que b_2 no tiene ceros en U y $f=b_1/b_2$.

Como $b_2^* \neq 0$ en c.t.p., se deduce que f posee límites radiales finiots en c.t.p. Además, $f^* \neq 0$ en c.t.p.

¿Está $\log|f^*|$ en $L^1(T)$? Sí, y la demostración es idéntica a la dada en el teorema 17.5.4.

Sin embargo, la desigualdad [17.45] del teorema 17.5.4 no se verifica ya necesariamente. Por ejemplo, si

$$f(z)=\exp\left\{\frac{1+z}{1-z}\right\}. \qquad [17.46]$$

entonces $\|f\|_0 = e$, $|f^*| = 1$ en c.t.p., y

$$\log |f(0)| = 1 > 0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f^*(e^{it})| \, dt. \qquad [17.47]$$

17.6. EL OPERADOR DE DESPLAZAMIENTO

17.6.1. Subespacios invariantes. Consideremos un operador lineal acotado S sobre un espacio de Banach X; esto es, S es una transformación lineal acotada de X en X. Si un subespacio cerrado Y de X tiene la propiedad de que $S(Y) \subset Y$, llamamos a Y un *subespacio invariante respecto de S*. Por tanto, los subespacios invariantes respecto de S de X son exactamente los que se transforman en sí mismos mediante S.

El conocimiento de los subespacios invariantes de un operador S nos ayuda a visualizar su acción. (Este es un principio muy general y, por tanto, bastante vago: Al estudiar una transformación de cualquier tipo, ayuda el conocer lo que la transformación mantiene fijo.) Por ejemplo, si S es un operador lineal sobre un espacio vectorial n-dimensional X y si S tiene n vectores característicos linealmente independientes $x_1, \ldots, x_n$, los espacios unidimensionales engendrados por cualquiera de estos x_i son invariantes con respecto a S, y obtenemos una descripción muy simple de S si tomamos $\{x_1, \ldots, x_n\}$ como base de X.

Vamos a describir los subespacios invariantes del llamado «operador de desplazamiento» S sobre ℓ^2. Aquí ℓ^2 es el espacio de todas las sucesiones complejas

$$x = \{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots\} \qquad [17.48]$$

para las cuales

$$\|x\| = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} |\xi_n|^2 \right\}^{1/2} < \infty, \qquad [17.49]$$

y S lleva el elemento $x \in \ell^2$ dado por [17.48] al

$$Sx = \{0, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots\}. \qquad [17.50]$$

Es claro que S es un operador lineal acotado sobre ℓ^2 y que $\|S\| = 1$.

Aparecen inmediatamente algunos subespacios invariantes con respecto a S: Si Y_k es el conjunto de todos los $x \in \ell^2$ cuyas primeras k coordenadas son 0, entonces Y_k es invariante con respecto a S.

Para obtener otros, hacemos uso de un isomorfismo de espacio de Hilbert entre ℓ^2 y H^2 que convierte el operador desplazamiento S en un operador de multiplicación sobre H^2. El punto interesante en ello es que este operador de multiplicación es más fácil de analizar (por la estructura más rica de H^2 como espacio de funciones holomorfas) que lo sería el operador correspondiente en el marco original del espacio de sucesiones ℓ^2.

Asociamos a cada $x \in \ell^2$, dado por [17.48], la función

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n z^n \qquad (z \in U). \qquad [17.51]$$

Por el teorema 17.3.1, ésta define una aplicación lineal uno a uno de ℓ^2 sobre H^2. Si

$$y=\{\eta_n\}, \qquad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\eta_n z^n \tag{17.52}$$

y si se define el producto interior en H^2 mediante

$$(f, g)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^*(e^{i\theta})\overline{g^*(e^{i\theta})}\, d\theta, \tag{17.53}$$

el teorema de Parseval muestra que $(f, g)=(x, y)$. Por tanto, tenemos un isomorfismo de espacio de Hilbert de ℓ^2 sobre H^2, y el operador de desplazamiento S se convierte en un operador de multiplicación (que denotaremos también mediante S) sobre H^2:

$$(Sf)(z)=zf(z) \qquad (f \in H^2,\ z \in U). \tag{17.54}$$

Los subespacios invariantes Y_k antes mencionados, puede verse ahora que consisten en todas las $f \in H^2$ que tienen un cero en el origen de orden k al menos. Esto proporciona una clave: Para un conjunto finito cualquiera $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \subset U$, el espacio Y de todas las $f \in H^2$ tales que $f(\alpha_1)=\ldots=f(\alpha_k)=0$ es invariante respecto de S. Si B es el producto de Blaschke finito con ceros en $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, entonces $f \in Y$ si, y sólo si, $f/B \in H^2$. Por tanto, $Y=BH^2$.

Esto sugiere que los productos de Blaschke *infinitos* pueden dar lugar también a subespacios invariantes con respecto a S y, más en general, que los productos de Blaschke podrían cambiarse por funciones interiores φ. No es difícil de ver que cada φH^2 es un subconjunto cerrado de H^2 invariante con respecto a S, pero que todo subespacio cerrado de H^2 invariante respecto de S, es de esta forma, es un resultado más profundo.

17.6.2. Teorema de Beurling.

a) *Para cada función interior φ el espacio*

$$\varphi H^2=\{\varphi f : f \in H^2\} \tag{17.55}$$

es un subespacio cerrado de H^2 invariante con respecto a S.

b) *Si φ_1 y φ_2 son funciones interiores y si $\varphi_1 H^2=\varphi_2 H^2$, entonces φ_1/φ_2 es constante.*

c) *Todo subconjunto cerrado Y de H^2 invariante con respecto a S, distinto de $\{0\}$, contiene una función interior φ tal que $Y=\varphi H^2$.*

DEMOSTRACIÓN. H^2 es un espacio de Hilbert relativo a la norma

$$\|f\|_2=\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f^*(e^{i\theta})|^2\, d\theta\right\}^{1/2}. \tag{17.56}$$

Si φ es una función interior, entonces $|\varphi^*|=1$ en c.t.p. La aplicación $f \to \varphi f$ es, en consecuencia, una isometría de H^2 en H^2; siendo una isometría, su recorrido φH^2 es un subespacio cerrado de H^2. (*Demostración:* Si $\varphi f_n \to g$ en H^2, entonces $\{\varphi f_n\}$ es una sucesión de Cauchy, por lo que $\{f_n\}$ también lo es, y, por tanto, $f_n \to f \in H^2$, por lo que $g=\varphi f \in \varphi H^2$.) La invariancia de φH^2 con res-

pecto a S es también trivial, puesto que $z \cdot \varphi f = \varphi \cdot zf$. En consecuencia, se verifica *a)*.

Si $\varphi_1 H^2 = \varphi_2 H^2$, entonces $\varphi_1 = \varphi_2 f$ para alguna $f \in H^2$, y, por tanto, $\varphi_1/\varphi_2 \in H^2$. Análogamente, $\varphi_2/\varphi_1 \in H^2$. Pongamos $\varphi = \varphi_1/\varphi_2$ y $h = \varphi + (1/\varphi)$. Entonces $h \in H^2$, y como $|\varphi^*| = 1$ en c.t.p. de T, h^* es real en c.t.p. de T. Como h es la integral de Poisson de h^*, se deduce que h es real en U, y, por tanto, h es constante. Entonces φ debe ser constante y *b)* está demostrado.

En la demostración de *c)* utilizaremos un método iniciado por Helson y Lowdenslager. Supongamos que Y es un subespacio cerrado de H^2 invariante con respecto a S que no consta sólo del 0. Entonces existe un entero mínimo k tal que Y contiene una función f de la forma

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n z^n, \qquad c_k = 1. \tag{17.57}$$

Entonces $f \notin zY$, donde zY representa al conjunto de todas las g de la forma $g(z) = zf(z)$, $f \in Y$. Se tiene que zY es un subespacio cerrado *propio* de Y [cerrado por el razonamiento utilizado en la demostración de *a)*], por tanto, Y contiene un vector no nulo que es ortogonal a zY (teorema 4.1.11).

Por tanto, existe una $\varphi \in Y$ tal que $\|\varphi\|_2 = 1$ y $\varphi \perp zY$. Entonces $g \perp z^n \varphi$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$ Por la definición del producto interior en H^2 (véase [17.53]) esto significa que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi^*(e^{i\theta})|^2 e^{-in\theta}\, d\theta \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{17.58}$$

Estas ecuaciones se conservan si cambiamos los primeros miembros por sus complejos conjugados, es decir, si cambiamos n por $-n$. Por tanto, todos los coeficientes de Fourier de la función $|\varphi^*|^2 \in L^1(T)$ son 0, excepto el que corresponde a $n = 0$, que es 1. Como las funciones de L^1 están determinadas por sus coeficientes de Fourier (teorema 5.4.1), se tiene que $|\varphi^*| = 1$ en c.t.p. de T. Pero $\varphi \in H^2$, por lo que φ es la integral de Poisson de φ^* y, por tanto, $|\varphi| \leqslant 1$. Concluimos que φ es una función interior.

Como $\varphi \in Y$ e Y es invariante con respecto a S, tenemos $\varphi z^n \in Y$ para todo $n \geqslant 0$, por tanto, $\varphi P \in Y$ para todo polinomio P. Los polinomios son densos en H^2 (las sumas parciales de la serie de potencias de cualquier $f \in H^2$ convergen a f en la norma de H^2, por el teorema de Parseval), y como Y es cerrado y $|\varphi| \leqslant 1$, se deduce que $\varphi H^2 \subset Y$. Tenemos que demostrar que esta inclusión *no* es propia. Como φH^2 es cerrado, basta demostrar que las hipótesis $h \in Y$ y $h \perp \varphi H^2$ implican $h = 0$.

Si $h \perp \varphi H^2$, entonces $h \perp \varphi z^n$ para $n = 1, 2, \ldots$, ó

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h^*(e^{i\theta}) \overline{\varphi^*(e^{i\theta})} e^{-in\theta}\, d\theta = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{17.59}$$

Si $h \in Y$, entonces $z^n h \in zY$ si $n = 1, 2, 3, \ldots$, y nuestra elección de φ muestra que $z^n h \perp \varphi$, ó

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h^*(e^{i\theta}) \overline{\varphi^*(e^{i\theta})} e^{-in\theta}\, d\theta = 0 \qquad (n = -1, -2, -3, \ldots). \tag{17.60}$$

Por tanto, todos los coeficientes de Fourier de $h^*\overline{\varphi^*}$ son 0, y entonces, $h^*\overline{\varphi^*}=0$ en c.t.p. de T; y como $|\varphi^*|=1$ en c.t.p., tenemos $h^*=0$ en c.t.p. En consecuencia, $h=0$, lo que completa la demostración. ////

17.6.3. Observación. Si combinamos los teoremas 17.5.2 y 17.6.2, vemos que los subespacios de H^2 invariantes con respecto a S se caracterizan por los siguientes datos: una sucesión de números complejos $\{\alpha_n\}$ (posiblemente finita, o incluso vacía) tal que $|\alpha_n|<1$ y $\Sigma(1-|\alpha_n|)<\infty$, y una medida de Borel positiva μ sobre T, singular con respecto a la medida de Lebesgue (por tanto, $D\mu=0$ en c.t.p.). Es fácil (lo dejamos como ejercicio) obtener condiciones, en términos de $\{\alpha_n\}$ y de μ, que garanticen el que un subespacio de H^2 invariante con respecto a S contiene a otro. El conjunto parcialmente ordenado de todos los espacios invariantes con respecto a S puede verse que posee una estructura extremadamente complicada, mucho más complicada que lo que podría esperarse de la sencilla definición del operador de desplazamiento sobre ℓ^2.

Concluimos la sección con una fácil consecuencia del teorema 17.6.2, que se basa en la factorización descrita en el teorema 17.5.3.

17.6.4. Teorema. *Supongamos que M_f es el factor interior de una función $f\in H^2$, e Y es el subespacio cerrado más pequeño de H^2 invariante con respecto a S que contiene a f. Entonces*

$$Y=M_fH^2. \qquad [17.61]$$

En particular, $Y=H^2$ si, y sólo si, f es una función exterior.

DEMOSTRACIÓN. Sea $f=M_fQ_f$ la factorización de f en sus factores interior y exterior. Es claro que $f\in M_fH^2$; y como M_fH^2 es cerrado e invariante con respecto a S, tenemos $Y\subset M_fH^2$.

Por otra parte, el teorema 17.6.2 muestra que existe una función interior φ tal que $Y=\varphi H^2$. Como $f\in Y$, existe una $h=M_hQ_h\in H^2$ tal que

$$M_fQ_f=\varphi M_hQ_h. \qquad [17.62]$$

Como las funciones interiores tienen valor absoluto 1 en c.t.p. de T, [17.62] implica que $Q_f=Q_h$, por lo que $M_f=\varphi M_h\in Y$, y en consecuencia Y debe contener al más pequeño subespacio cerrado invariante con respecto a S que contiene a M_f. Por tanto, $M_fH^2\subset Y$, y la demostración está completa. ////

Puede ser de interés el resumir estos resultados en términos de dos cuestiones a las que proporcionan respuestas.

Si $f\in H^2$, ¿qué funciones $g\in H^2$ pueden ser aproximadas en la norma H^2 mediante funciones de la forma fP, donde P recorre los polinomios? *Respuesta:* Precisamente aquellas g para las que $g/M_f\in H^2$.

¿Para qué funciones $f\in H^2$ es cierto que el conjunto $\{fP\}$ es denso en H^2? *Respuesta:* Precisamente para aquellas f para las que

$$\log|f(0)|=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f^*(e^{it})|\,dt.$$

17.7. FUNCIONES CONJUGADAS

17.7.1. Formulación del problema. Toda función armónica real u en el disco unidad U es la parte real de una, y sólo una, $f \in H(U)$ tal que $f(0)=u(0)$. Si $f=u+iv$, el último requisito puede también enunciarse en la forma $v(0)=0$. La función v se llama la *armónica conjugada* de u, o la *función conjugada* de u.

Definamos $M_p(u;\, r)$ como en el teorema 17.2.1 (con u en lugar de f). Como $|u|$ es subarmónica, el teorema 17.2.1 puede aplicarse a $M_p(u;\, r)$. Por tanto, si $p \geqslant 1$,

$$\lim_{r\to 1} M_p(u;\, r) = \sup_{0<r<1} M_p(u;\, r). \qquad [17.63]$$

Denotaremos a este valor común mediante $\|u\|_p$.

Surge ahora la siguiente cuestión: *¿El que $\|u\|_p$ sea finita implica que lo sea $\|v\|_p$?*

Esa cuestión es equivalente a la siguiente: *¿Debe ser $f \in H^p$ si $\|u\|_p < \infty$?*

En el ejercicio 25 se contiene aún otra formulación de la cuestión.

La respuesta (dada por M. Riesz) es afirmativa si $1 < p < \infty$. (Para $p=1$ y $p=\infty$ es negativa; véase ejercicio 24.) El enunciado preciso se da en el teorema 17.7.3.

17.7.2. Lema. *Supongamos que $1 < p \leqslant 2$. Existe una constante positiva B, que depende sólo de p, tal que*

$$(1+B)\,(B\cos\beta)^p - B\cos p\beta \geqslant 1 \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{2}\right). \qquad [17.64]$$

DEMOSTRACIÓN. Pongamos $B=(\cos\delta)^{-1}$, donde δ se toma de modo que $(1+p)\delta=\pi$. Entonces $\delta < \pi/2$, de modo que $B > 0$, y $\cos p\delta = -\cos\delta$.

Si $0 \leqslant |\beta| \leqslant \delta$, entonces $B\cos\beta \geqslant B\cos\delta = 1$, así que el primer miembro de [17.64] es al menos $(1+B)-B=1$.

Si $\delta < |\beta| \leqslant \pi/2$, entonces $p\delta < p|\beta| \leqslant p\pi/2 \leqslant \pi$, así que

$$\cos p\beta < \cos p\delta = -1/B.$$

En consecuencia, $-B\cos p\beta > 1$, y [17.64] se verifica de nuevo. ////

17.7.3. Teorema. *A cada p tal que $1 < p < \infty$ le corresponde una constante A_p tal que se verifica la desigualdad*

$$\|v\|_p \leqslant A_p \|u\|_p \qquad [17.65]$$

para toda función armónica real u en U si v es la armónica conjugada de u.

DEMOSTRACIÓN. Suponemos primero que $1 < p \leqslant 2$, y ponemos $f=u+iv$.

El lema resuelve el caso en el que $u > 0$ en U. Porque entonces f no tiene ceros en U; y como U es simplemente conexo, existe una $g \in H(U)$ tal que $f=e^g$, $g=\alpha+i\beta$ (de modo que α y β son armónicas), y $\beta(0)=0$. Como $u > 0$, tenemos $|\beta| < \pi/2$ en U. Como

$$u = e^\alpha \cos\beta = |f| \cos\beta, \qquad [17.66]$$

el lema 17.7.2 muestra que

$$|f|^p \leqslant (1+B)B^p u^p - B|f|^p \cos p\beta. \qquad [17.67]$$

Observemos que $|f|^p \cos p\beta$ es la parte real de $\exp(pg)$ y es en consecuencia armónica, de modo que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p \cos[p\beta(re^{i\theta})]\, d\theta = |f(0)|^p > 0 \quad (0 < r < 1). \qquad [17.68]$$

Por tanto, la integración de [17.67] conduce a

$$\|f\|_p \leqslant C\|u\|_p \qquad [17.69]$$

donde $C=(1+B)^{1/p}B$.

Esta es la clave de la demostración. El resto es rutinario y puede llevarse a cabo de varias maneras.

Si $u > 0$ en U y u es continua en $\bar{U}$, entonces [17.69] puede escribirse en la forma

$$\|f\|_p \leqslant C\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(e^{it})^p\, dt\right)^{1/p}. \qquad [17.70]$$

Supongamos ahora que u es continua en $\bar{U}$, real y armónica en U, y definamos

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, u^+(e^{it})\, dt = u_1(z) + iv_1(z). \qquad [17.71]$$

para $z \in U$; definamos $f_2 = u_2 + iv_2$ de la misma manera, con u^- en lugar de u^+. Entonces [17.70] puede aplicarse a los pares f_1, u_1 y f_2, u_2 en lugar de f, u. En T tenemos $u_1 = u^+ \leqslant |u|$. En $\bar{U}$, $u = u_1 - u_2$. En U, $f = f_1 - f_2$. Se tiene que el par f, u satisface [17.70] con $2C$ en lugar de C. En consecuencia, se verifica [17.65] con $A_p = 2C$, si u es continua en $\bar{U}$.

En el caso general, tomemos $R < 1$, y pongamos $f_R(z) = f(Rz)$, para $z \in U$. Puede aplicarse el caso precedente a f_R. Como $\|u_R\|_p \leqslant \|u\|_p$, obtenemos

$$\|f_R\|_p \leqslant A_p\|u_R\|_p \leqslant A_p\|u\|_p \qquad [17.72]$$

para todo $R < 1$, y esto proporciona [17.65], porque $|v| \leqslant |f|$.

Hemos demostrado, pues, el teorema para $1 < p \leqslant 2$.

Para completar la demostración, supongamos $2 \leqslant q < \infty$ y sea p el exponente conjugado a q.

Sean u y v como en el enunciado del teorema, pongamos $f = u + iv$, y sea $g(z) = \alpha(z) + i\beta(z)$ un polinomio, con $g(0)$ real. Afirmamos que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(re^{i\theta})\beta(e^{i\theta})\, d\theta = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(re^{i\theta})\alpha(e^{i\theta})\, d\theta \qquad [17.73]$$

para $0 < r < 1$. Para verlo, notemos que $u\beta + v\alpha$ es armónica, por ser la parte imaginaria de fg. En consecuencia,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [u(re^{i\theta})\beta(e^{i\theta}) + v(re^{i\theta})\alpha(e^{i\theta})]\, d\theta = u(0)\beta(0) + v(0)\alpha(0), \qquad [17.74]$$

y como $\beta(0)=0$ y $v(0)=0$, obtenemos [17.73]. La desigualdad de Hölder proporciona

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(re^{i\theta})\alpha(e^{i\theta})\,d\theta\right| \leqslant \|u\|_q\|\beta\|_p \leqslant \|u\|_q A_p\|\alpha\|_p. \qquad [17.75]$$

Como los polinomios trigonométricos reales α son densos en el espacio de las funciones reales de L^p definidas en T, [17.75] y el teorema 6.4.2 muestran que

$$\|v\|_q \leqslant A_p\|u\|_q.$$

Hemos demostrado, pues, el teorema para $2\leqslant q<\infty$, y vemos que $A_q\leqslant A_p$. Si tomamos los valores admisibles más pequeños para A_p y A_q, el último cálculo puede invertirse, y obtenemos que $A_p=A_q$. ////

EJERCICIOS

1. Demuéstrense los teoremas 17.1.4 y 17.1.5 para funciones subarmónicas semicontinuas superiormente.

2. Supongamos $f\in H(\Omega)$. Demuéstrese que $\log(1+|f|)$ es subarmónica en Ω.

3. Supongamos $0<p\leqslant\infty$ y $f\in H(U)$. Demuéstrese que $f\in H^p$ si, y sólo si, existe una función armónica u en U tal que $|f(z)|^p\leqslant u(z)$ para todo $z\in U$. Demuéstrese que si existe una tal *mayorante armónica* u de $|f|^p$, entonces existe una que es mínima, u_f. (Explícitamente, $|f|^p\leqslant u_f$ con u_f armónica; si $|f|^p\leqslant u$ y u es armónica, entonces $u_f\leqslant u$.) Demuéstrese que $\|f\|_p\leqslant u_f(0)^{1/p}$.

   Sugerencia: Considérense las funciones armónicas en $D(0;R)$, $R<1$, cuyos valores en la frontera sean $|f|^p$, y hágase $R\to 1$.

4. Demuéstrese de la misma manera que $f\in N$ si, y sólo si, $\log^+|f|$ tiene una mayorante armónica en U.

5. Supongamos $f\in H^p$, $\varphi\in H(U)$ y $\varphi(U)\subset U$. ¿Puede deducirse que $f\circ\varphi\in H^p$? Contéstese a la misma pregunta con N en lugar de H^p.

6. Si $0<r<s\leqslant\infty$, demuéstrese que H^s es un subconjunto *propio* de H^r.

7. Demuéstrese que H^∞ es una subclase *propia* de la intersección de todos los H^p con $p<\infty$.

8. Si $f\in H^1$ y $f^*\in L^p(T)$, demuéstrese que $f\in H^p$.

9. Supongamos que $f\in H(U)$ y que $f(U)$ no es denso en el plano. Demuéstrese que f tiene límites radiales finitos en casi todo punto de T.

10. Fijemos $\alpha\in U$. Demuéstrese que la aplicación $f\to f(\alpha)$ es un funcional lineal acotado sobre H^2. Como H^2 es un espacio de Hilbert, este funcional puede ser representado mediante un producto interior con cierta $g\in H^2$. Obténgase esta g.

11. Fijemos $\alpha\in U$. ¿Cómo puede ser de grande $|f'(\alpha)|$ si $\|f\|_2\leqslant 1$? Obténganse las funciones extremales. Hágase lo mismo para $f^{(n)}(\alpha)$.

12. Supongamos que $p\geqslant 1$, $f\in H^p$, y que f^* es real en c.t.p. de T. Demuéstrese que f es entonces constante. Demuéstrese que este resultado es falso para todo $p<1$.

13. Supongamos que $f\in H(U)$, y supongamos que existe una $M<\infty$ tal que f transforma toda circunferencia de radio $r<1$ y centro 0 sobre una curva γ_r cuya longitud es a lo sumo M. Demuéstrese que f posee una extensión continua en $\bar{U}$ y que la restricción de f a T es absolutamente continua.

14. Supongamos que μ es una medida de Borel compleja sobre T tal que

$$\int_T e^{int}\, d\mu(t)=0 \qquad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

Demuéstrese que o bien $\mu=0$ o el soporte de μ es todo T.

15. Supongamos que K es un subconjunto compacto *propio* de la circunferencia unidad T. Demuéstrese que toda función continua sobre K puede aproximarse uniformemente en K mediante polinomios.

Sugerencia: Utilícese el ejercicio 14.

16. Complétese la demostración del teorema 17.5.4 para el caso $0 < p < 1$.

17. Sea φ una función interior no constante que no tiene ceros en U.

a) Demuéstrese que $1/\varphi \notin H^p$ si $p > 0$.

b) Demuéstrese que existe al menos un $e^{i\theta} \in T$ tal que $\lim_{r\to 1} \varphi(re^{i\theta})=0$.

Sugerencia: $\log|\varphi|$ es una función armónica negativa.

18. Supongamos que φ es una función interior no constante, $|\alpha| < 1$ y $\alpha \notin \varphi(U)$. Demuéstrese que $\lim_{r\to 1} \varphi(re^{i\theta})=\alpha$ para al menos un $e^{i\theta} \in T$.

19. Supongamos que $f \in H^1$ y $1/f \in H^1$. Demuéstrese entonces que f es una función exterior.

20. Supongamos que $f \in H^1$ y $\operatorname{Re}[f(z)] > 0$ para todo $z \in U$. Demuéstrese que f es una función exterior.

21. Demuéstrese que $f \in N$ si, y sólo si, $f=g/h$, donde g y $h \in H^\infty$ y h no tiene ceros en U.

22. Demuéstrese el recíproco siguiente del teorema 15.5.4:
Si $f \in H(U)$ y si

$$\lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} |\log|f(re^{i\theta})||\, d\theta=0, \qquad (*)$$

entonces f es un producto de Blaschke.

Sugerencia: (*) implica

$$\lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta=0.$$

Como $\log^+|f| \geqslant 0$, se deduce del teorema 17.1.3 y del 17.1.5 que $\log^+|f|=0$, por lo que $|f| \leqslant 1$. Ahora bien, $f=Bg$, g no tiene ceros, $|g| \leqslant 1$, y se verifica (*) con $1/g$ en lugar de f. Por el primer razonamiento, $|1/g| \leqslant 1$. En consecuencia, $|g|=1$.

23. Obténganse las condiciones mencionada en el apartado 17.6.3.

24. La transformación conforme de U sobre una banda vertical muestra que el teorema de M. Riesz sobre funciones conjugadas no puede extenderse a $p=\infty$. Dedúzcase que tampoco puede extenderse a $p=1$.

25. Supongamos $1 < p < \infty$, y asociemos a cada $f \in L^p(T)$ sus coeficientes de Fourier.

$$\hat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})e^{-int}\, dt \qquad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Dedúzcanse los siguientes enunciados a partir del teorema 17.7.3:

a) A cada $f \in L^p(T)$ le corresponde una función $g \in L^p(T)$ tal que $\hat{g}(n)=\hat{f}(n)$ para $n \geqslant 0$, pero $\hat{g}(n)=0$ para toda $n < 0$. De hecho, existe una constante C, que depende sólo de p, tal que

$$\|g\|_p \leqslant C\|f\|_p.$$

La aplicación $f \to g$ es, pues, una proyección lineal acotada de $L^p(T)$ en $L^p(T)$. La serie de Fourier de g se obtiene de la de f eliminando los términos con $n < 0$.

b) Demuéstrese que también se verifica lo anterior si se eliminan los términos que corresponden a $n < k$, donde k es un entero dado cualquiera.

c) Dedúzcase a partir de *b)* que las sumas parciales s_n de la serie de Fourier de cualquier $f \in L^p(T)$ forman una sucesión acotada en $L^p(T)$. Conclúyase además que se tiene, en realidad:

$$\lim_{n \to \infty} \|f - s_n\|_p - 0.$$

d) Si $f \in L^p(T)$ y si

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^p,$$

entonces $F \in H^p$, y toda $F \in H^p$ se obtiene de esa manera. Por tanto, la proyección mencionada en *a)* puede considerarse como una aplicación de $L^p(T)$ sobre H^p.

26. Demuéstrese que existe una demostración mucho más simple del teorema 17.7.3 si $p=2$, y obténgase el mejor valor de A_2.

27. Supongamos que $f(z)=\Sigma_0^\infty a_n z^n$ en U y que $\Sigma|a_n| < \infty$. Demuéstrese que

$$\int_0^1 |f'(re^{i\theta})|\, dr < \infty$$

para todo θ.

28. Demuéstrese que los enunciados siguientes son correctos si $\{n_k\}$ es una sucesión de enteros positivos que tiende a ∞ con suficiente rapidez. Si

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{n_k}}{k}$$

entonces $|f'(z)| > n_k/(10k)$ para todo z tal que

$$1 - \frac{1}{n_k} < |z| < 1 - \frac{1}{2n_k}.$$

En consecuencia:

$$\int_0^1 |f'(re^{i\theta})|\, dr = \infty$$

para todo θ, si bien

$$\lim_{R \to 1} \int_0^R f'(re^{i\theta})\, dr$$

existe (y es finito) para casi todo θ. Interprétese esto geométricamente, en términos de las longitudes de las imágenes mediante f de los radios de U.

TEORIA ELEMENTAL DE LAS ALGEBRAS DE BANACH

18.1. INTRODUCCION

18.1.1. Definiciones. Una *álgebra compleja* es un espacio vectorial A sobre el campo complejo en el que se ha definido una multiplicación asociativa y distributiva, es decir,

$$x(yz)=(xy)z, \qquad (x+y)z=xz+yz, \qquad x(y+z)=xy+xz \qquad [18.1]$$

para x, y y $z \in A$, y que está relacionada con la multiplicación escalar de modo que

$$\alpha(xy)=x(\alpha y)=(\alpha x)y \qquad [18.2]$$

para x e $y \in A$, y α escalar.

Si existe una norma definida en A que le convierte en un espacio vectorial normado y que satisface la desigualdad multiplicativa

$$\|xy\| \leqslant \|x\| \, \|y\| \qquad (x \text{ e } y \in A) \qquad [18.3]$$

entonces A es una *álgebra compleja normada.* Si, además, A es un espacio métrico completo relativo a esta norma, es decir, si A es un espacio de Banach, entonces llamamos a A una *álgebra de Banach.*

La desigualdad [18.3] hace de la multiplicación una operación continua. Esto significa que si $x_n \to x$ y $y_n \to y$, entonces $x_n y_n \to xy$, lo que se deduce de [18.3] y de la identidad

$$x_n y_n - xy = (x_n - x)y_n + x(y_n - y). \qquad [18.4]$$

Nótese que no se ha requerido que A fuera conmutativa, es decir, que $xy=yx$ para todo x e $y \in A$, y no lo haremos salvo cuando se establezca explícitamente.

Sin embargo, *supondremos* que A posee *elemento unidad.* Este es un elemento e tal que

$$xe=ex=x \qquad (x \in A). \qquad [18.5]$$

Se ve fácilmente que existe a lo sumo un tal e $(e'=e'e=e)$ y que $\|e\| \geqslant 1$, por [18.3]. Haremos la hipótesis adicional de que

$$\|e\|=1 \qquad [18.6]$$

Un elemento $x \in A$ se dirá *invertible* si x tiene un *inverso* en A, es decir, si existe un elemento $x^{-1} \in A$ tal que

$$x^{-1}x = xx^{-1} = e. \qquad [18.7]$$

Se ve fácilmente de nuevo que ningún $x \in A$ tiene más de un inverso.

Si x e y son invertibles en A, también lo son x^{-1} y xy, puesto que $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$. Los elementos invertibles forman en consecuencia un grupo con respecto a la multiplicación.

El *espectro* de un elemento $x \in A$ es el conjunto de todos los números complejos λ tales que $x - \lambda e$ *no* es invertible. Denotaremos al espectro de x mediante $\sigma(x)$.

18.1.2. Observación. La teoría de las álgebras de Banach contiene una gran cantidad de relaciones entre propiedades algebraicas por un lado y topológicas por otro. Vimos ya un ejemplo de esto en el teorema 9.4.4, y veremos otros. Existen también estrechas relaciones entre las álgebras de Banach y las funciones holomorfas: La demostración más fácil del hecho fundamental de que $\sigma(x)$ no es nunca vacío depende del teorema de Liouville referente a las funciones enteras, y la fórmula del radio espectral se deduce de manera natural de teoremas sobre series de potencias. Esta es una razón para restringir nuestra atención a las álgebras de Banach *complejas*. La teoría de las álgebras de Banach reales (omitimos la definición, que es obvia) no es tan satisfactoria.

18.2. LOS ELEMENTOS INVERTIBLES

En esta sección, A será una álgebra de Banach compleja con elemento unidad e, y G será el conjunto de todos los elementos invertibles de A.

18.2.1. Teorema. *Si $x \in A$ y $\|x\| < 1$, entonces $e + x \in G$,*

$$(e+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \qquad [18.8]$$

y

$$\|(e+x)^{-1} - e + x\| \leqslant \frac{\|x\|^2}{1 - \|x\|}. \qquad [18.9]$$

DEMOSTRACIÓN. La desigualdad multiplicativa [18.3] muestra que $\|x^n\| \leqslant \|x\|^n$. Si

$$s_N = e - x + x^2 - \ldots + (-1)^N x^N, \qquad [18.10]$$

se deduce que $\{s_N\}$ es una sucesión de Cauchy en A y, por tanto, que la serie en [18.8] converge (con respecto a la norma de A) a un elemento $y \in A$. Como la multiplicación es continua y

$$(e+x)s_N = e + (-1)^N x^{N+1} = s_N(e+x), \qquad [18.11]$$

vemos que $(e+x)y=e=y(e+x)$. Esto proporciona [18.8], y [18.9] se deduce de

$$\left\|\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n x^n\right\| \leqslant \sum_{n=2}^{\infty}\|x^n\| \leqslant \sum_{n=2}^{\infty}\|x\|^n = \frac{\|x\|^2}{1-\|x\|}. \qquad [18.12] \quad ////$$

18.2.2. Teorema. *Supongamos $x \in G$, $\|x^{-1}\|=1/\alpha$, $h \in A$ y $\|h\|=\beta<\alpha$. Entonces $x+h \in G$, y*

$$\|(x+h)^{-1}-x^{-1}+x^{-1}hx^{-1}\| \leqslant \frac{\beta^2}{\alpha^2(\alpha-\beta)}. \qquad [18.13]$$

DEMOSTRACIÓN. $\|x^{-1}h\| \leqslant \beta/\alpha < 1$, por tanto, $e+x^{-1}h \in G$, por el teorema 18.2.1; y como $x+h=x(e+x^{-1}h)$, tenemos $x+h \in G$ y

$$(x+h)^{-1}=(e+x^{-1}h)^{-1}x^{-1}. \qquad [18.14]$$

Por tanto:

$$(x+h)^{-1}-x^{-1}+x^{-1}hx^{-1}=[(e+x^{-1}h)^{-1}-e+x^{-1}h]x^{-1}, \qquad [18.15]$$

y la desigualdad [18.13] se deduce del teorema 18.2.1, con $x^{-1}h$ en lugar de x. ////

Corolario 1. *G es un conjunto abierto, y la aplicación $x \to x^{-1}$ es un homeomorfismo de G sobre G.*

En efecto, si $x \in G$ y $\|h\| \to 0$, [18.13] implica que $\|(x+h)^{-1}-x^{-1}\| \to 0$. Por tanto, $x \to x^{-1}$ es continua; aplica claramente G sobre G, y como es su propia inversa, es un homeomorfismo.

Corolario 2. *La aplicación $x \to x^{-1}$ es diferenciable. Su diferencial en cualquier punto $x \in G$ es el operador lineal que transforma $h \in A$ en $-x^{-1}hx^{-1}$.*

Esto puede obtenerse también de [18.13]. Nótese que la noción de diferencial de una transformación tiene sentido en cualquier espacio vectorial normado, no solamente en R^k, como en la definición 8.4.1. Si A es conmutativa, la diferencial anterior transforma h en $-x^{-2}h$, que concuerda con el hecho de que la derivada de la función holomorfa z^{-1} es $-z^{-2}$.

Corolario 3. *Para todo $x \in A$, $\sigma(x)$ es compacto, y $|\lambda| \leqslant \|x\|$ si $\lambda \in \sigma(x)$.*

En efecto, si $|\lambda| > \|x\|$, entonces $e-\lambda^{-1}x \in G$, por el teorema 18.2.1, y lo mismo verifica $x-\lambda e=-\lambda(e-\lambda^{-1}x)$; en consecuencia, $\lambda \notin \sigma(x)$. Para demostrar que $\sigma(x)$ es cerrado, observemos: *a)* $\lambda \in \sigma(x)$ si, y sólo si, $x-\lambda e \notin G$; *b)* el complementario de G es un subconjunto cerrado de A, por el corolario 1, y *c)* la aplicación $\lambda \to x-\lambda e$ es una aplicación continua del plano complejo en A.

18.2.3. Teorema. *Sea Φ un funcional lineal acotado sobre A, fijemos $x \in A$, y definamos*

$$f(\lambda)=\Phi[(x-\lambda e)^{-1}] \qquad (\lambda \notin \sigma(x)). \qquad [18.16]$$

Entonces f es holomorfa en el complementario de $\sigma(x)$ y $f(\lambda) \to 0$ cuando $\lambda \to \infty$.

DEMOSTRACIÓN. Fijemos $\lambda \notin \sigma(x)$ y apliquemos el teorema 18.2.2 con $x-\lambda e$ en lugar de x y con $(\lambda-\mu)e$ en lugar de h. Vemos que existe una constante C, que depende de x y λ, tal que

$$\|(x-\mu e)^{-1}-(x-\lambda e)^{-1}+(\lambda-\mu)(x-\lambda e)^{-2}\| \leqslant C|\mu-\lambda|^2 \qquad [18.17]$$

para todo μ suficientemente próximo a λ. Por tanto,

$$\frac{(x-\mu e)^{-1}-(x-\lambda e)^{-1}}{\mu-\lambda} \to (x-\lambda e)^{-2} \qquad [18.18]$$

cuando $\mu \to \lambda$, y si aplicamos Φ a ambos miembros de [18.18], la continuidad y linealidad de Φ muestran que

$$\frac{f(\mu)-f(\lambda)}{\mu-\lambda} \to \Phi[(x-\lambda e)^{-2}]. \qquad [18.19]$$

Por tanto, f es diferenciable y en consecuencia holomorfa fuera de $\sigma(x)$. Finalmente, cuando $\lambda \to \infty$ tenemos

$$\lambda f(\lambda)=\Phi[\lambda(x-\lambda e)^{-1}]=\Phi\left[\left(\frac{x}{\lambda}-e\right)^{-1}\right] \to \Phi(-e), \qquad [18.20]$$

por la continuidad de la aplicación de inversión en G. ////

18.2.4. Teorema. *Para todo $x \in A$, $\sigma(x)$ es compacto y no vacío.*

DEMOSTRACIÓN. Sabemos ya que $\sigma(x)$ es compacto. Fijemos $x \in A$ y $\lambda_0 \notin \sigma(x)$. Entonces $(x-\lambda_0 e)^{-1} \neq 0$, y el teorema de Hahn-Banach implica la existencia de un funcional lineal acotado Φ sobre A tal que $f(\lambda_0) \neq 0$, donde f está definido como en el teorema 18.2.3. Si $\sigma(x)$ fuera vacío, el teorema 18.2.3 implicaría que f es una función entera que tiende a 0 en el ∞; por tanto, $f(\lambda)=0$ para todo λ, por el teorema de Liouville, y esto contradice el que $f(\lambda_0) \neq 0$. Por tanto, $\sigma(x)$ es no vacío. ////

18.2.5. Teorema (Gelfand-Mazur). *Si A es una álgebra de Banach compleja con elemento unidad en la que todo elemento distinto de cero es invertible, entonces A es (isométricamente isomorfa al) el cuerpo complejo.*

Una álgebra en la que todo elemento distinto de cero es invertible se llama un *álgebra de división*. Nótese que la conmutatividad de A no es parte de las hipótesis; es parte de la conclusión.

DEMOSTRACIÓN. Si $x \in A$ y $\lambda_1 \neq \lambda_2$, al menos uno de los elementos $x-\lambda_1 e$ y $x-\lambda_2 e$ debe ser invertible, puesto que no pueden ser ambos 0. Se deduce, pues, del teorema 18.2.4 que $\sigma(x)$ consiste exactamente en un punto, que llamaremos $\lambda(x)$, para cada $x \in A$. Como $x-\lambda(x)e$ no es invertible, debe ser 0, y, por tanto, $x=\lambda(x)e$. La aplicación $x \to \lambda(x)$ es, por tanto, un isomorfismo de A sobre el cuerpo complejo, que es también una isometría, puesto que $|\lambda(x)|=\|\lambda(x)e\|=\|x\|$ para todo $x \in A$. ////

18.2.6. Definición. Para cualquier $x \in A$, el *radio espectral* $\rho(x)$ de x es el radio del disco cerrado más pequeño con centro en el origen y que contiene a $\sigma(x)$ (a veces se le llama también la *norma espectral* de x; véase el ejercicio 14):

$$\rho(x)=\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}.$$

18.2.7. Teorema (fórmula del radio espectral). *Para todo* $x \in A$,

$$\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = \rho(x). \qquad [18.21]$$

(La existencia del límite es parte de la conclusión.)

DEMOSTRACIÓN. Fijemos $x \in A$, sea n un entero positivo, λ un número complejo, y supongamos $\lambda^n \notin \sigma(x^n)$. Tenemos

$$(x^n - \lambda^n e) = (x - \lambda e)\,(x^{n-1} + \lambda x^{n-2} + \ldots + \lambda^{n-1} e). \qquad [18.22]$$

Multipliquemos ambos miembros de [18.22] por $(x^n - \lambda^n e)^{-1}$. Esto muestra que $x - \lambda e$ es invertible, y, por tanto, $\lambda \notin \sigma(x)$.

Por consiguiente, si $\lambda \in \sigma(x)$, entonces $\lambda^n \in \sigma(x^n)$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ El corolario 3 del teorema 18.2.2 muestra que $|\lambda^n| \leqslant \|x^n\|$, y, en consecuencia, $|\lambda| \leqslant \|x^n\|^{1/n}$. Esto proporciona

$$\rho(x) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}. \qquad [18.23]$$

Ahora bien, si $|\lambda| > \|x\|$, es fácil comprobar que

$$(\lambda e - x) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} x^n = e. \qquad [18.24]$$

La serie anterior es, por tanto, $-(x - \lambda e)^{-1}$. Sea Φ un funcional lineal acotado sobre A y definamos f como en el teorema 18.2.3. Por [18.24], el desarrollo

$$f(\lambda) = -\sum_{n=0}^{\infty} \Phi(x^n) \lambda^{-n-1} \qquad [18.25]$$

es válido para todo λ tal que $|\lambda| > \|x\|$. Por el teorema 18.2.3, f es holomorfa fuera de $\sigma(x)$, por tanto, en el conjunto $\{\lambda : |\lambda| > \rho(x)\}$. Se deduce, pues, que la serie de potencias [18.25] converge si $|\lambda| > \rho(x)$. En particular

$$\sup_n |\Phi(\lambda^{-n} x^n)| < \infty \qquad (|\lambda| > \rho(x)) \qquad [18.26]$$

para todo funcional lineal acotado Φ sobre A.

Una consecuencia del teorema de Hahn-Banach (apartado 5.5.6) es que la norma de cualquier elemento de A es igual a su norma como funcional lineal sobre el espacio dual de A. Como se verifica [18.26] para todo Φ, podemos aplicar ahora el teorema de Banach-Steinhaus y concluir que a cada λ tal que $|\lambda| > \rho(x)$ le corresponde un número real $C(\lambda)$ tal que

$$\|\lambda^{-n} x^n\| \leqslant C(\lambda) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \qquad [18.27]$$

Multipliquemos [18.27] por $|\lambda|^n$ y tomemos la raíz n-ésima. Esto proporciona

$$\|x^n\|^{1/n} \leqslant |\lambda| [C(\lambda)]^{1/n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad [18.28]$$

si $|\lambda| > \rho(x)$, y, por tanto,

$$\limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} \leqslant \rho(x). \qquad [18.29]$$

El teorema se deduce de [18.23] y [18.29]. ////

18.2.8. Observaciones.

a) El que un elemento de A sea o no invertible en A es una propiedad puramente algebraica. Por tanto, el espectro de x, y de la misma manera el radio espectral $\rho(x)$, están definidos en términos de la estructura algebraica de A, sin tener en cuenta ninguna consideración métrica (o topológica). El límite que aparece en el enunciado del teorema 18.2.7, por otra parte, depende de propiedades métricas de A. Esta es una característica notable del teorema: Afirma la igualdad de dos cantidades que surgen de forma enteramente distinta.

b) Nuestra álgebra puede ser una subálgebra de Banach B más amplia (se presenta un ejemplo a continuación), y entonces podría suceder muy bien que algún $x \in A$ no fuera invertible en A, pero lo fuera en B. El espectro de x depende, por consiguiente, del álgebra; utilizando la notación obvia, tenemos $\sigma_A(x) \supset \sigma_B(x)$, y la inclusión puede ser propia. El *radio espectral* de x, sin embargo, no se altera por ello, puesto que el teorema 18.2.7 muestra que puede expresarse en términos de propiedades métricas de potencias de x, y éstas son independientes de todo lo que ocurra fuera de A.

18.2.9. Ejemplo. Sea $C(T)$ el álgebra de todas las funciones complejas continuas definidas sobre la circunferencia unidad T (con adición y multiplicación puntual y la norma del supremo), y sea A el conjunto de todas las $f \in C(T)$ que pueden extenderse como funciones continuas F en la adherencia del disco unidad U, tales que F sea holomorfa en U. Se ve fácilmente que A es una subálgebra de $C(T)$. Si $f_n \in A$ y $\{f_n\}$ converge uniformemente en T, el teorema del módulo máximo obliga a que la sucesión asociada $\{F_n\}$ converja uniformemente en la adherencia de U. Esto muestra que A es una subálgebra *cerrada* de $C(T)$, y, por tanto, A es también un álgebra de Banach.

Definamos la función f_0 mediante $f_0(e^{i\theta}) = e^{i\theta}$. Entonces $F_0(z) = z$. El espectro de f_0 como elemento de A consiste en el disco unidad cerrado; con respecto a $C(T)$, el espectro de f_0 consiste sólo en la circunferencia unidad. De acuerdo con el teorema 18.2.7, los dos radios espectrales coinciden.

18.3. IDEALES Y HOMOMORFISMOS

De ahora en adelante consideraremos sólo álgebras *conmutativas*.

18.3.1. Definición. Un subconjunto I de una álgebra compleja conmutativa A se dice un *ideal* si *a)* I es un subespacio de A (en el sentido de espacio vectorial), y *b)* $xy \in I$ si $x \in A$ e $y \in I$. Si $I \neq A$, I es un ideal *propio*. Los *ideales maximales* son ideales propios que no están contenidos en ningún ideal propio más amplio. Nótese que ningún ideal propio contiene elementos invertibles.

Si B es otra álgebra compleja, una aplicación φ de A en B se llama un *homomorfismo* si φ es una aplicación lineal que conserva también la multiplicación: $\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(xy)$ para todo x e $y \in A$. El *núcleo* (o espacio nulo) de φ es el conjunto de todos los $x \in A$ tales que $\varphi(x) = 0$. Es trivial comprobar que el núcleo de un homomorfismo es un ideal. Para el recíproco, véase el apartado 18.3.3.

18.3.2. Teorema. *Si A es una álgebra compleja conmutativa con elemento unidad, todo ideal propio de A está contenido en un ideal maximal. Si, además, A es un álgebra de Banach, todo ideal maximal de A es cerrado.*

DEMOSTRACIÓN. La primera parte es una consecuencia casi inmediata del principio de maximalidad de Hausdorff (y se verifica en cualquier anillo conmutativo con elemento unidad). Sea I un ideal propio de A. Ordenemos parcialmente la colección $\mathfrak{P}$ de todos los ideales propios de A que contienen a I (por inclusión de conjuntos), y sea M la unión de los ideales en alguna subcolección maximal ordenada linealmente $\mathfrak{Q}$ de $\mathfrak{P}$. Entonces M es un ideal (siendo la unión de una colección *linealmente* ordenada de ideales), $I \subset M$ y $M \neq A$, puesto que ningún elemento de $\mathfrak{P}$ contiene al elemento unidad de A. La maximalidad de $\mathfrak{Q}$ implica que M es un ideal maximal de A.

Si A es una álgebra de Banach, la adherencia $\overline{M}$ de M es también un ideal (dejamos los detalles de la demostración de este enunciado al lector). Como $\overline{M}$ no contiene ningún elemento invertible de A y puesto que el conjunto de todos los elementos invertibles es abierto, tenemos que $\overline{M} \neq A$, y la maximalidad de M muestra, en consecuencia, que $\overline{M} = M$. ////

18.3.3. Espacios cociente y álgebras cociente. Supongamos que J es un subespacio de un espacio vectorial A y asociemos a cada $x \in A$ la clase

$$\varphi(x) = x + J = \{x + y : y \in J\}. \qquad [18.30]$$

Si $x_1 - x_2 \in J$, entonces $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$. Si $x_1 - x_2 \notin J$, $\varphi(x_1) \cap \varphi(x_2) = \varnothing$. El conjunto de todas las clases de J se denota mediante A/J; es un espacio vectorial si definimos

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x + y), \qquad \lambda\varphi(x) = \varphi(\lambda x) \qquad [18.31]$$

para x e $y \in A$ y escalares λ. Como J es un espacio vectorial, las operaciones [18.31] están bien definidas; esto significa que si $\varphi(x) = \varphi(x')$ y $\varphi(y) = \varphi(y')$, entonces

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x') + \varphi(y'), \qquad \lambda\varphi(x) = \lambda\varphi(x'). \qquad [18.32]$$

Además, φ es claramente una aplicación lineal de A sobre A/J; el elemento cero de A/J es $\varphi(0) = J$.

Supongamos a continuación que A no es sólo un espacio vectorial, sino también una álgebra conmutativa y que J es un ideal propio de A. Si $x' - x \in J$ e $y' - y \in J$, la identidad

$$x'y' - xy = (x' - x)y' + x(y' - y) \qquad [18.33]$$

muestra que $x'y' - xy \in J$. En consecuencia, puede definirse la multiplicación en A/J de una manera consistente:

$$\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(xy) \qquad (x \text{ e } y \in A). \qquad [18.34]$$

Se comprueba entonces fácilmente que A/J es una álgebra, y que φ es un homomorfismo de A sobre A/J cuyo núcleo es J.

Si A posee elemento unidad e, entonces $\varphi(e)$ es el elemento unidad de A/J, y *A/J es un cuerpo si, y sólo si, J es un ideal maximal.*

Para ver esto, supongamos $x \in A$ y $x \notin J$, y pongamos

$$I = \{ax + y : a \in A,\ y \in J\}. \qquad [18.35]$$

Entonces I es un ideal en A que contiene propiamente a J, ya que $x \in I$. Si J es maximal, $I=A$, por lo que $ax+y=e$ para algún $a \in A$ e $y \in J$; por tanto, $\varphi(a)\varphi(x)=\varphi(e)$; esto dice que todo elemento distinto de cero de A/J es invertible, de modo que A/J es un cuerpo. Si J no es maximal, podemos tomar x como antes de tal modo que $I \neq A$, por tanto, $e \notin I$, y entonces $\varphi(x)$ no es invertible en A/J.

18.3.4. Normas cociente. Supongamos que A es un espacio vectorial normado, que J es un subespacio *cerrado* de A, y que $\varphi(x)=x+J$, como antes. Definamos

$$\|\varphi(x)\| = \inf\{\|x+y\| : y \in J\}. \qquad [18.36]$$

Notemos que $\|\varphi(x)\|$ es la mayor cota inferior de las normas de aquellos elementos que están en la clase $\varphi(x)$; esta es la distancia de x a J. A la norma definida en A/J mediante [18.36] la llamaremos la *norma cociente* de A/J. Tiene las propiedades siguientes:

a) *A/J es un espacio vectorial normado.*
b) *Si A es un espacio de Banach, también lo es A/J.*
c) *Si A es una álgebra de Banach conmutativa y J es un ideal cerrado propio, entonces A/J es una álgebra de Banach conmutativa.*

Estas propiedades se comprueban fácilmente:

Si $x \in J$, $\|\varphi(x)\|=0$. Si $x \notin J$, el hecho de que J sea cerrado implica que $\|\varphi(x)\| > 0$. Es claro que $\|\lambda\varphi(x)\| = |\lambda|\,\|\varphi(x)\|$. Si x_1 y $x_2 \in A$ y $\epsilon > 0$, existen y_1 e $y_2 \in J$ tales que

$$\|x_i+y_i\| < \|\varphi(x_i)\| + \epsilon \qquad (i=1, 2). \qquad [18.37]$$

En consecuencia,

$$\|\varphi(x_1+x_2)\| \leqslant \|x_1+x_2+y_1+y_2\| < \|\varphi(x_1)\| + \|\varphi(x_2)\| + 2\epsilon, \qquad [18.38]$$

lo que proporciona la desigualdad triangular y demuestra *a)*.

Supongamos que A es completo y que $\{\varphi(x_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en A/J. Existe una subsucesión para la que

$$\|\varphi(x_{n_i}) - \varphi(x_{n_{i+1}})\| < 2^{-i} \qquad (i=1, 2, 3, \ldots). \qquad [18.39]$$

y existen elementos z_i de modo que $z_i - x_{n_i} \in J$ y $\|z_i - z_{i+1}\| < 2^{-i}$. Por tanto, $\{z_i\}$ es una sucesión de Cauchy en A; puesto que A es completo, existe un $z \in A$ tal que $\|z_i - z\| \to 0$. Se deduce que $\varphi(x_{n_i})$ converge a $\varphi(z)$ en A/J. Pero si una sucesión de Cauchy posee una subsucesión convergente, entonces converge la sucesión total. Por tanto, A/J es completo, y hemos demostrado *b)*.

Para demostrar *c)*, tomemos x_1 y $x_2 \in A$ y $\epsilon > 0$, y tomemos y_1 e $y_2 \in J$ de modo que se verifique [18.37]. Notemos que $(x_1+y_1)(x_2+y_2) \in x_1x_2+J$, así que

$$\|\varphi(x_1x_2)\| \leqslant \|(x_1+y_1)(x_2+y_2)\| \leqslant \|x_1+y_1\|\,\|x_2+y_2\|. \qquad [18.40]$$

Por otra parte, [18.37] implica

$$\|\varphi(x_1x_2)\| \leqslant \|\varphi(x_1)\|\,\|\varphi(x_2)\|. \qquad [18.41]$$

Finalmente, si e es el elemento unidad de A, tomemos $x_1 \notin J$ y $x_2 = e$ en [18.41]; esto proporciona $\|\varphi(e)\| \geqslant 1$. Pero $e \in \varphi(e)$, y la definición de la norma cociente muestra que $\|\varphi(e)\| \leqslant \|e\| = 1$. Por tanto, $\|\varphi(e)\| = 1$, lo que completa la demostración.

18.3.5. Observación. Después de estos preliminares, estamos en situación de obtener algunos de los hechos clave referentes a las álgebras de Banach conmutativas.

Supongamos, como antes, que A es una álgebra de Banach compleja conmutativa con elemento unidad e. Asociamos a A el conjunto Δ de todos los homomorfismos de A sobre el cuerpo complejo, o, en terminología diferente, los *funcionales lineales multiplicativos* sobre A que no son idénticamente 0. Como antes, $\sigma(x)$ denota el espectro del elemento $x \in A$ y $\rho(x)$ el radio espectral de x.

Entonces se verifican las siguientes relaciones:

18.3.6. Teorema

a) *Todo ideal maximal M de A es el núcleo de algún $h \in \Delta$.*

b) $\lambda \in \sigma(x)$ *si, y sólo si,* $h(x) = \lambda$ *para algún* $h \in \Delta$.

c) x *es invertible en* A *si, y sólo si,* $h(x) \neq 0$ *para todo* $h \in \Delta$.

d) $h(x) \in \sigma(x)$ *para todo* $x \in A$ *y* $h \in \Delta$.

e) $|h(x)| \leqslant \rho(x) \leqslant \|x\|$ *para todo* $x \in A$ *y* $h \in \Delta$.

DEMOSTRACIÓN. Si M es un ideal maximal de A, entonces A/M es un cuerpo; y como M es cerrado (teorema 18.3.2), A/M es una álgebra de Banach. Por el teorema 18.2.5 existe un isomorfismo j de A/M sobre el cuerpo complejo. Si $h = j \circ \varphi$, donde φ es el homomorfismo de A sobre A/M cuyo núcleo es M, entonces $h \in \Delta$ y el núcleo de h es M. Esto demuestra *a)*.

Si $\lambda \in \sigma(x)$, entonces $x - \lambda e$ no es invertible; por tanto, el conjunto de todos los elementos $(x - \lambda e)y$, donde $y \in A$, es un ideal propio de A, que está en un ideal maximal (por el teorema 18.3.2), y *a)* muestra que existe un $h \in \Delta$ tal que $h(x - \lambda e) = 0$. Como $h(e) = 1$, esto proporciona $h(x) = \lambda$.

Por otro lado, si $\lambda \notin \sigma(x)$, entonces $(x - \lambda e)y = e$ para algún $y \in A$. Se tiene que $h(x - \lambda e)h(y) = 1$ para todo $h \in \Delta$, de modo que $h(x - \lambda e) \neq 0$, o $h(x) \neq \lambda$. Esto demuestra *b)*.

Como x es invertible si, y sólo si, $0 \notin \sigma(x)$, *c)* se deduce de *b)*.

Finalmente, *d)* y *e)* son consecuencias inmediatas de *b)*. ////

Notemos que *e)* implica que la norma de h, como funcional lineal, es a lo sumo 1. En particular, cada $h \in \Delta$ es continuo. Esto ya fue demostrado anteriormente (teorema 9.4.4).

18.4. APLICACIONES

Damos ahora algunos ejemplos de teoremas cuyos enunciados no incluyen conceptos algebraicos pero que pueden demostrarse por técnicas de álgebras de Banach.

18.4.1. Teorema. *Sea $A(U)$ el conjunto de todas las funciones continuas en la adherencia $\bar{U}$ del disco unidad abierto U cuyas restricciones a U son*

holomorfas. Supongamos que $f_1, \ldots, f_n$ *son elementos de* $A(U)$, *tales que*

$$|f_1(z)| + \ldots + |f_n(z)| > 0 \qquad [18.42]$$

para todo $z \in \bar{U}$. *Entonces existen* $g_1, \ldots, g_n \in A(U)$ *tales que*

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(z) g_i(z) = 1 \qquad (z \in \bar{U}). \qquad [18.43]$$

DEMOSTRACIÓN. Como sumas, productos y límites uniformes de funciones holomorfas son holomorfas, $A(U)$ es una álgebra de Banach, con la norma del supremo. El conjunto J de todas las funciones $\Sigma f_i g_i$, donde las g_i son elementos arbitrarios de $A(U)$, es un ideal de $A(U)$. Tenemos que demostrar que J contiene el elemento unidad 1 de $A(U)$. Por el teorema 18.3.2 esto ocurre si, y sólo si, J no está en ningún ideal maximal de $A(U)$. Por el teorema 18.3.6, *a)* basta, en consecuencia, demostrar que no existe ningún homomorfismo h de $A(U)$ sobre el cuerpo complejo tal que $h(f_i) = 0$ para todo $i (1 \leqslant i \leqslant n)$.

Antes de determinar estos homomorfismos, notemos que los polinomios constituyen un subconjunto denso de $A(U)$. Para verlo, supongamos $f \in A(U)$ y $\epsilon > 0$; como f es uniformemente continua en $\bar{U}$, existe un $r < 1$ tal que $|f(z) - f(rz)| < \epsilon$ para todo $z \in \bar{U}$; el desarrollo de $f(rz)$ en potencias de z converge si $|rz| < 1$; por tanto, converge a $f(rz)$ uniformemente para $z \in \bar{U}$, y esto proporciona la aproximación deseada.

Sea ahora h un homomorfismo complejo de $A(U)$. Pongamos $f_0(z) = z$. Entonces $f_0 \in A(U)$. Es obvio que $\sigma(f_0) = \bar{U}$. Por el teorema 18.3.6, *d)* existe un $\alpha \in \bar{U}$ tal que $h(f_0) = \alpha$. En consecuencia, $h(f_0^n) = \alpha^n = f_0^n(\alpha)$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$, por tanto, $h(P) = P(\alpha)$ para todo polinomio P. Como h es continuo y los polinomios son densos en $A(U)$, se deduce que $h(f) = f(\alpha)$ para toda $f \in A(U)$.

Nuestra hipótesis [18.42] implica que $|f_i(\alpha)| > 0$ para al menos un índice i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Por tanto, $h(f_i) \neq 0$.

Hemos demostrado que a cada $h \in \Delta$ le corresponde al menos una de las funciones dadas f_i tal que $h(f_i) \neq 0$, y esto, como notamos anteriormente, basta para demostrar el teorema. ////

Nota: Hemos determinado también todos los ideales maximales de $A(U)$, en el curso de la demostración anterior, puesto que cada uno de ellos es el núcleo de algún $h \in \Delta$: *Si* $\alpha \in \bar{U}$ *y si* M_α *es el conjunto de todas las* $f \in A(U)$ *tales que* $f(\alpha) = 0$, *entonces* M_α *es un ideal maximal de* $A(U)$, *y todos los ideales maximales de* $A(U)$ *se obtienen de esta manera.*

$A(U)$ se llama a veces el *álgebra del disco.*

18.4.2. Observación. Las restricciones de los elementos de $A(U)$ a la circunferencia unidad T constituyen una subálgebra cerrada de $C(T)$. Esta es el álgebra A discutida en el ejemplo 18.2.9. De hecho, A es una subálgebra *maximal* de $C(T)$. Más explícitamente, *si* $A \subset B \subset C(T)$ *y* B *es una subálgebra cerrada de* $C(T)$ *(relativa a la norma del supremo), entonces o* $B = A$ *o* $B = C(T)$.

Se desprende del teorema 11.4.4 que A consiste precisamente en aquellas $f \in C(T)$ para las que

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta}\, d\theta = 0 \qquad (n = -1, -2, -3, \ldots). \qquad [18.44]$$

En consecuencia, el teorema de maximalidad antes mencionado puede enunciarse como un teorema de aproximación:

18.4.3. Teorema. *Supongamos que $f \in C(T)$ y $\hat{g}(n) \neq 0$ para algún $n < 0$. Entonces a toda $f \in C(T)$ y todo $\epsilon > 0$ le corresponden polinomios*

$$P_n(e^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{m(n)} a_{n,k} e^{ik\theta} \qquad (n = 0, \ldots, N) \qquad [18.45]$$

tales que

$$|f(e^{i\theta}) - \sum_{n=0}^{N} P_n(e^{i\theta}) g^n(e^{i\theta})| < \epsilon \qquad (e^{i\theta} \in T). \qquad [18.46]$$

DEMOSTRACIÓN. Sea B la adherencia en $C = C(T)$ del conjunto de todas las funciones de la forma

$$\sum_{n=0}^{n} P_n g^n. \qquad [18.47]$$

El teorema afirma que $B = C$. Supongamos que $B \neq C$.

El conjunto de todas las funciones [18.47] (nótese que N no es fijo) es una álgebra compleja. Su adherencia B es una álgebra de Banach que contiene la función f_0, donde $f_0(e^{i\theta}) = e^{i\theta}$. Nuestra hipótesis $B \neq C$ implica que $1/f_0 \notin B$, porque si perteneciera, B contendría a f_0^n para todo entero n, y, por tanto, todos los polinomios trigonométricos estarían en B; y como los polinomios trigonométricos son densos en C (teorema 4.3.3) tendríamos $B = C$.

Por tanto, f_0 no es invertible en B. Por el teorema 18.3.6 existe un homomorfismo complejo h de B tal que $h(f_0) = 0$. Todo homomorfismo sobre el cuerpo complejo satisface $h(1) = 1$; y como $h(f_0) = 0$, tenemos también

$$h(f_0^n) = [h(f_0)]^n = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \qquad [18.48]$$

Sabemos que h es un funcional lineal sobre B, de norma 1 a lo sumo. El teorema de Hahn-Banach permite extender h como funcional lineal sobre C (también denotado con h) de la misma norma. Como $h(1) = 1$ y $\|h\| \leqslant 1$, el razonamiento utilizado en la sección 5.6 muestra que h es un funcional lineal *positivo* sobre C. En particular, $h(f)$ es real para f real; por tanto, $h(\bar{f}) = \overline{h(f)}$. Como f_0^{-n} es la compleja conjugada de f_0^n, se tiene que [18.48] también se verifica para $n = -1, -2, -3, \ldots$ Por tanto,

$$h(f_0^n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases} \qquad [18.49]$$

Como los polinomios trigonométricos son densos en C, existe sólo un funcional lineal acotado sobre C que satisface [18.49]. En consecuencia, h viene dado por la fórmula

$$h(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\, d\theta \qquad (f \in C). \qquad [18.50]$$

Si n es un entero positivo, $gf_0^n \in B$; y como h es multiplicativo en B, [18.50] proporciona

$$\hat{g}(-n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(e^{i\theta})e^{in\theta}\,d\theta=h(gf_0^n)=h(g)h(f_0^n)=0, \qquad [18.51]$$

por [18.49]. Esto contradice las hipótesis del teorema. ////

Concluimos con un teorema debido a WIENER.

18.4.4. Teorema. *Supongamos*

$$f(e^{i\theta})=\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}, \qquad \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty, \qquad [18.52]$$

y $f(e^{i\theta}) \neq 0$ *para todo* θ *real. Entonces*

$$\frac{1}{f(e^{i\theta})}=\sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{in\theta} \quad \textit{con} \quad \sum_{-\infty}^{\infty} |\gamma_n| < \infty. \qquad [18.53]$$

DEMOSTRACIÓN. Sea A el espacio de todas las funciones complejas f definidas sobre la circunferencia unidad que satisface [18.54], con la norma

$$\|f\|=\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|. \qquad [18.54]$$

Es claro que A es un espacio de Banach. De hecho, A es isométricamente isomorfo a ℓ^1, el espacio de todas las funciones complejas definidas sobre los enteros que son integrables con respecto a la medida discreta. Pero A es también una álgebra de Banach conmutativa, con la operación multiplicación puntual. En efecto, si $g \in A$ y $g(e^{i\theta})=\Sigma b_n e^{in\theta}$, entonces

$$f(e^{i\theta})g(e^{i\theta})=\sum_n \left(\sum_k c_{n-k}b_k\right) e^{in\theta} \qquad [18.55]$$

y, en consecuencia,

$$\|fg\|=\sum_n \left|\sum_k c_{n-k}b_k\right| \leqslant \sum_k |b_k| \sum_n |c_{n-k}| = \|f\| \cdot \|g\|. \qquad [18.56]$$

Además, la función 1 es el elemento unidad de A, y $\|1\|=1$.

Pongamos $f_0(e^{i\theta})=e^{i\theta}$, como antes. Entonces $f_0 \in A$, $1/f_0 \in A$, y $\|f_0^n\|=1$ para $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Si h es un homomorfismo complejo cualquiera de A y $h(f_0)=\lambda$, el hecho de que $\|h\| \leqslant 1$ implica que

$$|\lambda^n|=|h(f_0^n)| \leqslant \|f_0^n\|=1 \qquad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \qquad [18.57]$$

En consecuencia, $|\lambda|=1$. En otras palabras, a cada h le corresponde un punto $e^{i\alpha} \in T$ tal que $h(f_0)=e^{i\alpha}$, y, por tanto,

$$h(f_0^n)=e^{in\alpha}=f_0^n(e^{i\alpha}) \qquad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \qquad [18.58]$$

Si f viene dada por [18.52], entonces $f=\Sigma c_n f_0^n$. Esta serie converge en A; y como h es un funcional lineal continua sobre A, concluimos de [18.58] que

$$h(f)=f(e^{i\alpha}) \qquad (f \in A). \qquad [18.59]$$

Nuestra hipótesis de que f no se anula en ningún punto de T dice, en consecuencia, que f no está en el núcleo de ningún homomorfismo complejo de A, y el teorema 18.3.6 implica que f es invertible en A. Pero esto es precisamente lo que afirma el teorema. ///

EJERCICIOS

1. Supongamos que $B(X)$ es el álgebra de todos los operadores lineales acotados sobre el espacio de Banach X, con

$$(A_1+A_2)(x)=A_1x+A_2x, \quad (A_1A_2)(x)=A_1(A_2x), \quad \|A\|=\sup\frac{\|Ax\|}{\|x\|},$$

si A, A_1 y $A_2 \in B(X)$. Demuéstrese que $B(X)$ es una álgebra de Banach.

2. Sea n un entero positivo, X el espacio de todas las n-uplas (normado de cualquier manera, con tal de que se satisfagan los axiomas de un espacio vectorial normado), y $B(X)$ como en el ejercicio 1. Demuéstrese que el espectro de cada elemento de $B(X)$ consta a lo sumo de n números complejos. ¿Cuáles son?

3. Tomemos $X=L^2(-\infty,\infty)$, supongamos $\varphi \in L^\infty(-\infty,\infty)$, y sea M el operador de multiplicación que transforma $f \in L^2$ en φf. Demuéstrese que M es un operador lineal acotado sobre L^2 y que el espectro de M es igual al recorrido esencial de φ (capítulo 3, ejercicio 19).

4. ¿Cuál es el espectro del operador de desplazamiento sobre ℓ^2? (Véase el teorema 17.6.1 para la definición.)

5. Demuéstrese que la adherencia de un ideal en una álgebra de Banach es un ideal.

6. Si X es un espacio de Hausdorff compacto, obténganse todos los ideales maximales de $C(X)$.

7. Supongamos que A es una álgebra de Banach conmutativa con elemento unidad, generada por un solo elemento x. Esto significa que los polinomios en x son densos en A. Demuéstrese que el complementario de $\sigma(x)$ es un subconjunto conexo del plano.

   Sugerencia: Si $\lambda \notin \sigma(x)$, existen polinomios P_n tales que $P_n(x) \to (x-\lambda e)^{-1}$ en A. Demuéstrese que $P_n(z) \to (z-\lambda)^{-1}$ uniformemente para $z \in \sigma(x)$.

8. Supongamos que $\Sigma_0^\infty |c_n| < \infty$, $f(z)=\Sigma_0^\infty c_n z^n$, $|f(z)| > 0$ para todo $z \in \bar{U}$ y $1/f(z)=\Sigma_0^\infty a_n z^n$. Demuéstrese que $\Sigma_0^\infty |a_n| < \infty$.

9. Demuéstrese que un subespacio vectorial cerrado del álgebra de Banach $L^1(R^1)$ (véase el apartado 9.4.2) es invariante por traslaciones si, y sólo si, es un ideal.

10. Demuéstrese que $L^1(T)$ es una álgebra de Banach conmutativa (sin elemento unidad) si se define la multiplicación mediante

$$(f*g)(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)g(s)\,ds.$$

Obténganse todos los homomorfismos complejos de $L^1(T)$, como en el teorema 9.4.6. Si E es un conjunto de enteros y si I_E es el conjunto de todas las $f \in L^1(T)$ tales que $\hat{f}(n)=0$ para todo $n \in E$, demuéstrese que I_E es un ideal cerrado de $L^1(T)$, y pruébese que todo ideal cerrado de $L^1(T)$ se obtiene de esta manera.

11. Se define el *resolvente* $R(\lambda, x)$ de un elemento x de una álgebra de Banach con elemento unidad como

$$R(\lambda, x)=(\lambda e-x)^{-1}$$

para todos los complejos λ para los que existe este inverso. Demuéstrese la identidad

$$R(\lambda, x)-R(\mu, x)=(\mu-\lambda)R(\lambda)R(\mu)$$

y utilícese para dar una demostración alternativa del teorema 18.2.3.

12. Sea A una álgebra de Banach conmutativa con elemento unidad. El *radical* de A se define como la intersección de todos los ideales maximales de A. Demuéstrese que son equivalentes los siguientes tres enunciados acerca de un elemento $x \in A$:

a) x está en el radical de A.

b) $\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}=0$.

c) $h(x)=0$ para todo homomorfismo complejo de A.

13. Obténgase un elemento x de una álgebra de Banach A (por ejemplo, un operador lineal acotado sobre un espacio de Hilbert) tal que $x^n \neq 0$ para todo $n > 0$, pero $\lim_{n\to 0} \|x^n\|^{1/n}=0$.

14. Supongamos que A es una álgebra de Banach conmutativa con elemento unidad, y sea Δ el conjunto de todos los homorfismos complejos de A, como en el apartado 18.3.5. Asociemos a cada $x \in A$ una función $\hat{x}$ sobre Δ mediante la fórmula

$$\hat{x}(h)=h(x) \qquad (h \in \Delta).$$

$\hat{x}$ se llama la transformada de Gelfand de x.

Demuéstrese que la aplicación $x \to \hat{x}$ es un homomorfismo de A sobre una álgebra $\hat{A}$ de funciones complejas sobre Δ, con la operación de multiplicación puntual. ¿Qué condición tiene que verificar A para que este homomorfismo sea un isomorfismo? (Véase el ejercicio 12.)

Demuéstrese que el radio espectral $\rho(x)$ es igual a

$$\|\hat{x}\|_\infty=\sup\{|\hat{x}(h)| : h \in \Delta\}.$$

Demuéstrese que el recorrido de la función $\hat{x}$ es exactamente el espectro $\sigma(x)$.

15. Si A es una álgebra de Banach conmutativa *sin* elemento unidad, sea A_1 el álgebra de todos los pares ordenados (x, λ), con $x \in A$ y λ un número complejo; la adición y multiplicación se definen de forma «obvia», y $\|(x, \lambda)\|=\|x\|+|\lambda|$. Demuéstrese que A_1 es una álgebra de Banach conmutativa con elemento unidad y que la aplicación $x \to (x, 0)$ es un isomorfismo isométrico de A sobre un ideal maximal de A_1. Esta es una inclusión normal de una álgebra sin elemento unidad en una con él.

16. Demuéstrese que H^∞ es una álgebra de Banach conmutativa con elemento unidad, relativa a la norma del supremo, con adición y multiplicación puntuales. La aplicación $f \to f(\alpha)$ es un homomorfismo complejo de H^∞, si $|\alpha| < 1$. Demuéstrese que hay otros.

17. Demuéstrese que el conjunto de todas las funciones $(z-1)^2 f$, donde $f \in H^\infty$, es un ideal de H^∞ que no es cerrado.

Sugerencia:

$$|(1-z)^2(1+\epsilon-z)^{-1}-(1-z)| < \epsilon \quad \text{si } |z| < 1,\ \epsilon > 0.$$

18. Supongamos que φ es una función interior. Demuéstrese que $\{\varphi f : f \in H^\infty\}$ es un ideal cerrado de H^∞. En otras palabras, demuéstrese que si $\{f_n\}$ es una sucesión en H^∞ tal que $\varphi f_n \to g$ uniformemente en U, entonces $g/\varphi \in H^\infty$.

TRANSFORMADAS DE FOURIER HOLOMORFAS

19.1. INTRODUCCION

19.1.1. Observación. En el capítulo 9 se definió la transformada de Fourier de una función f en R^1 como una función $\hat{f}$ en R^1. Frecuentemente puede extenderse $\hat{f}$ como función holomorfa en cierta región del plano. Por ejemplo, si $f(t)=e^{-|t|}$, entonces $\hat{f}(x)=(1+x^2)^{-1}$, que es una función racional. Esto no debe sorprender demasiado. Para cada t real, el núcleo e^{itz} es una función entera de z, por lo que se debe esperar que existan condiciones para f bajo las que $\hat{f}$ sea holomorfa en ciertas regiones.

Describiremos dos clases de funciones holomorfas que surgen de esta manera.

Para la primera, sea F una función cualquiera en $L^2(-\infty,\infty)$ que se anula en $(-\infty,0)$ [por ejemplo, tomemos $F\in L^2(0,\infty)$] y definamos

$$f(z)=\int_0^\infty F(t)e^{itz}\,dt \qquad (z\in\Pi^+), \tag{19.1}$$

donde Π^+ es el conjunto de todos los $z=x+iy$ con $y>0$. Si $z\in\Pi^+$, entonces $|e^{itz}|=e^{-ty}$, que prueba que la integral de [19.1] existe como integral de Lebesgue.

Si $\operatorname{Im} z>\delta>0$, $\operatorname{Im} z_n>\delta$ y $z_n\to z$, el teorema de la convergencia dominada muestra que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty |\exp(itz_n)-\exp(itz)|^2\,dt=0$$

porque el integrando está acotado por la función de L^1 $4\exp(-2\delta t)$ y tiende a 0 para todo $t>0$. La desigualdad de Schwarz implica en consecuencia que f es continua en Π^+. Los teoremas de Fubini y Cauchy muestran que $\int_\gamma f(z)\,dz=0$ para todo camino cerrado γ en Π^+. Por el teorema de Morera, $f\in H(\Pi^+)$.

Escribamos de nuevo [19.1] en la forma

$$f(x+iy)=\int_0^\infty F(t)e^{-ty}e^{itx}\,dt, \tag{19.2}$$

considerando y fijo, y apliquemos el teorema de Plancherel. Obtenemos

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty |f(x+iy)|^2\,dx=\int_0^\infty |F(t)|^2e^{-2ty}\,dt\leqslant\int_0^\infty |F(t)|^2\,dt \tag{19.3}$$

para todo $y > 0$. [Notemos que nuestra presente notación difiere de la del capítulo 9. Allí la medida subyacente era la de Lebesgue dividida por $\sqrt{2\pi}$. Aquí utilizamos sencillamente la medida de Lebesgue. Esto explica el factor $1/(2\pi)$ en [19.3].] Esto muestra que:

a) *Si f es de la forma* [19.1], *entonces es holomorfa en Π^+ y sus restricciones a las rectas horizontales de Π^+ constituyen un conjunto acotado en $L^2(-\infty, \infty)$.*

El segundo conjunto consta de todas las f de la forma

$$f(z) = \int_{-A}^{A} F(t) e^{itz}\, dt, \qquad [19.4]$$

donde $0 < A < \infty$ y $F \in L^2(-A, A)$. Estas funciones f son enteras (la demostración es la misma que antes), y satisfacen una condición de crecimiento:

$$|f(z)| \leqslant \int_{-A}^{A} |F(t)| e^{-ty}\, dt \leqslant e^{A|y|} \int_{-A}^{A} |F(t)|\, dt. \qquad [19.5]$$

Si C es esta última integral, entonces $C < \infty$, y [19.5] implica que

$$|f(z)| \leqslant C e^{A|z|}. \qquad [19.6]$$

[Las funciones enteras que satisfacen [19.6] se dice que son de *tipo exponencial.*] Por tanto:

b) *Toda f de la forma* [19.4] *es una función entera que satisface* [19.6] *y cuya restricción al eje real está en L^2* (por el teorema de Plancherel).

Es un hecho notable el que los recíprocos de *a)* y *b)* son ciertos. Este es el contenido de los teoremas 19.2.1 y 19.2.2.

19.2. DOS TEOREMAS DE PALEY Y WIENER

19.2.1. Teorema. *Supongamos que $f \in H(\Pi^+)$ y que*

$$\sup_{0<y<\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^2\, dx = C < \infty. \qquad [19.7]$$

Entonces existe una $F \in L^2(0, \infty)$ tal que

$$f(z) = \int_0^{\infty} F(t) e^{itz}\, dt \qquad (z \in \Pi^+) \qquad [19.8]$$

y

$$\int_0^{\infty} |F(t)|^2\, dt = C. \qquad [19.9]$$

Nota: La función F que estamos buscando ha de tener la propiedad de que $f(x+iy)$ sea la transformada de Fourier de $F(t)e^{-yt}$ (consideramos y como una constante positiva). Apliquemos la fórmula de inversión (si esto es o no co-

rrecto no importa; estamos intentando motivar la siguiente demostración): La F buscada debe ser de la forma

$$F(t)=e^{ty}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x+iy)e^{-itx}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int f(z)e^{-itz}\,dz. \qquad [19.10]$$

La última integral ha de calcularse a lo largo de una recta horizontal en Π^+, y si este razonamiento es correcto, la integral no dependerá de la recta que escojamos. Esto sugiere la utilización del teorema de Cauchy.

DEMOSTRACIÓN. Fijemos y, $0<y<\infty$. Para cada $\alpha>0$ sea Γ_α el camino rectangular de vértices en $\pm\alpha+i$ y $\pm\alpha+iy$. Por el teorema de Cauchy

$$\int_{\Gamma_\alpha}f(z)e^{-itz}\,dz=0. \qquad [19.11]$$

Consideramos sólo valores reales de t. Sea $\Phi(\beta)$ la integral de $f(z)e^{-itz}$ sobre el intervalo de línea recta comprendido por $\beta+i$ y $\beta+iy$ (β real). Pongamos $I=[y,1]$ si $y<1$, $I=[1,y]$ si $1<y$. Entonces

$$|\Phi(\beta)|^2=\left|\int_I f(\beta+iu)e^{-it(\beta+iu)}\,du\right|^2\leqslant\int_I|f(\beta+iu)|^2\,du\int_I e^{2tu}\,du. \qquad [19.12]$$

Pongamos

$$\Lambda(\beta)=\int_I|f(\beta+iu)|^2\,du. \qquad [19.13]$$

Entonces [19.7] muestra, por el teorema de Fubini, que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Lambda(\beta)\,d\beta\leqslant Cm(I). \qquad [19.14]$$

En consecuencia, existe una sucesión $\{\alpha_j\}$ tal que $\alpha_j\to\infty$ y

$$\Lambda(\alpha_j)+\Lambda(-\alpha_j)\to 0 \qquad (j\to\infty). \qquad [19.15]$$

Por [19.12], esto implica que

$$\Phi(\alpha_j)\to 0, \qquad \Phi(-\alpha_j)\to 0 \qquad \text{para } j\to\infty. \qquad [19.16]$$

Notemos que esto se verifica para todo t y que la sucesión $\{\alpha_j\}$ no depende de t.

Definamos

$$g_j(y,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha_j}^{\alpha_j}f(x+iy)e^{-itx}\,dx. \qquad [19.17]$$

Entonces deducimos de [19.11] y [19.16] que

$$\lim_{j\to\infty}\,[e^{ty}g_j(y,t)-e^{t}g_j(1,t)]=0 \qquad (-\infty<t<\infty). \qquad [19.18]$$

Escribamos $f_y(x)$ para designar $f(x+iy)$. Entonces $f_y \in L^2(-\infty, \infty)$, por hipótesis, y el teorema de Plancherel afirma que

$$\lim_{j\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}y(t) - g_j(y, t)|^2 \, dt = 0, \qquad [19.19]$$

donde $\hat{f}_y$ es la transformada de Fourier de f_y. Un subsucesión de $\{g_j(y, t)\}$ converge en consecuencia puntualmente a $\hat{f}_y(t)$, para casi todo t (teorema 3.2.7). Si definimos

$$F(t) = e^t \hat{f}_1(t), \qquad [19.20]$$

se deduce de [19.18] que

$$F(t) = e^{ty} \hat{f}_y(t). \qquad [19.21]$$

Notemos que en [19.20] no figura la y y que [19.21] se verifica para toda $y \in (0, \infty)$. El teorema de Plancherel puede aplicarse a [19.21]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ty} |F(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}_y(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f_y(x)|^2 \, dx \leqslant C. \qquad [19.22]$$

Si hacemos $y \to \infty$, [19.22] muestra que $F(t) = 0$ en c.t.p. de $(-\infty, 0)$.

Si hacemos $y \to 0$, [19.22] muestra que

$$\int_0^{\infty} |F(t)|^2 \, dt \leqslant C. \qquad [19.23]$$

Se deduce, pues, de [19.21] que $\hat{f}_y \in L^1$ si $y > 0$. En consecuencia, el teorema 9.3.2 proporciona

$$f_y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_y(t) e^{itx} \, dt \qquad [19.24]$$

o

$$f(z) = \int_0^{\infty} F(t) e^{-yt} e^{itx} \, dt = \int_0^{\infty} F(t) e^{itz} \, dt \qquad (z \in \Pi^+). \qquad [19.25]$$

Esto es [19.8], y, por tanto, [19.9] se deduce de [19.23] y de la fórmula [19.3]. ////

19.2.2. Teorema. *Supongamos que A y C son constantes positivas y que f es una función entera tal que*

$$|f(z)| \leqslant C e^{A|z|} \qquad [19.26]$$

para todo z, y que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx < \infty. \qquad [19.27]$$

Entonces existe una $F \in L^2(-A, A)$ tal que

$$f(z) = \int_{-A}^{A} F(t) e^{itz} \, dt. \qquad [19.28]$$

DEMOSTRACIÓN. Pongamos $f_\epsilon(x)=f(x)e^{-\epsilon|x|}$, para $\epsilon>0$ y x real. Demostraremos que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f_\epsilon(x)e^{-itx}\,dx=0 \qquad (t \text{ real}, \ |t|>A). \tag{19.29}$$

Como $\|f_\epsilon-f\|_2\to 0$ cuando $\epsilon\to 0$, el teorema de Plancherel implica que las transformadas de Fourier de f_ϵ convergen en L^2 a la transformada de Fourier F de f (más precisamente, de la restricción de f al eje real). Por tanto, [19.29] implicará que F se anula fuera de $[-A, A]$, y entonces el teorema 9.3.2 muestra que [19.25] se verifica para casi todo z real. Como cada miembro de [19.28] es una función entera, se obtiene que [19.28] se verifica para todo z complejo.

Por tanto, [19.29] implica el teorema.

Para todo α real, sea Γ_α el camino definido mediante

$$\Gamma_\alpha(s)=se^{i\alpha} \qquad (0\leqslant s<\infty), \tag{19.30}$$

pongamos

$$\Pi_\alpha=\{w\colon \operatorname{Re}(we^{i\alpha})>A\}, \tag{19.31}$$

y si $w\in\Pi_\alpha$, definamos

$$\Phi_\alpha(w)=\int_{\Gamma_\alpha} f(z)e^{-wz}\,dz=e^{i\alpha}\int_0^\infty f(se^{i\alpha})\exp(-wse^{i\alpha})\,ds. \tag{19.32}$$

Por [19.26] y [19.30], el valor absoluto del integrando es, a lo sumo,

$$C\exp\{-[\operatorname{Re}(we^{i\alpha})-A]s\},$$

y se deduce (como en el apartado 19.1.1) que Φ_α es holomorfa en el semiplano Π_α.

Sin embargo, puede afirmarse más si $\alpha=0$ y si $\alpha=\pi$: Tenemos

$$\Phi_0(w)=\int_0^\infty f(x)e^{-wx}\,dx \qquad (\operatorname{Re} w>0), \tag{19.33}$$

$$\Phi_\pi(w)=-\int_{-\infty}^0 f(x)e^{-wx}\,dx \qquad (\operatorname{Re} w<0). \tag{19.34}$$

Φ_0 y Φ_π son holomorfas en los semiplanos indicados debido a [19.27].

La significación de las funciones Φ_α con respecto a [19.29] está en la relación

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\epsilon(x)e^{-itx}\,dx=\Phi_0(\epsilon+it)-\Phi_\pi(-\epsilon+it) \qquad (t \text{ real}). \tag{19.35}$$

que puede verificarse fácilmente. Por tanto, tenemos que demostrar que el segundo miembro de [19.35] tiende a 0 cuando $\epsilon\to 0$, si $t>A$ y si $t<-A$.

Esto lo realizaremos demostrando que dos cualesquiera de nuestras funciones Φ_α coinciden en la intersección de sus dominios de definición, es decir, que son prolongación analítica una de la otra. Una vez hecho esto, podemos

cambiar Φ_0 y Φ_π por $\Phi_{\pi/2}$ en [19.36] si $t < -A$, y por $\Phi_{-\pi/2}$ si $t > A$, y entonces es obvio que la diferencia tiende a 0 cuando $\epsilon \to 0$.

Por tanto, supongamos $0 < \beta - \alpha < \pi$. Pongamos

$$\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad \eta = \cos\frac{\beta-\alpha}{2} > 0. \tag{19.36}$$

Si $w = |w|e^{-i\gamma}$, entonces

$$\operatorname{Re}(we^{i\alpha}) = \eta|w| = \operatorname{Re}(we^{i\beta}) \tag{19.27}$$

de modo que $w \in \Pi_\alpha \cap \Pi_\beta$ si $|w| > A/\eta$. Consideremos la integral

$$\int_\Gamma f(z)e^{-wz}\,dz \tag{19.38}$$

sobre el arco circular Γ dado por $\Gamma(t) = re^{it}$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. Como

$$\operatorname{Re}(-wz) = -|w|r\cos(t-\gamma) \leqslant -|w|r\eta, \tag{19.39}$$

el valor absoluto del integrando en [19.38] no supera

$$C\exp\{(A-|w|\eta)r\}.$$

Si $|w| > A/\eta$ se deduce que [19.38] tiende a 0 cuando $r \to \infty$.

Aplicamos ahora el teorema de Cauchy. La integral de $f(z)e^{-wz}$ sobre el intervalo $[0, re^{i\beta}]$ es igual a la suma de [19.38] y la integral sobre $[0, re^{i\alpha}]$. Como [19.38] tiende a 0 cuando $r \to \infty$, concluimos que $\Phi_\alpha(w) = \Phi_\beta(w)$ si $w = |w|e^{-i\gamma}$ y $|w| > A/\eta$, y entonces el teorema 10.4.1 muestra que Φ_α y Φ_β coinciden en la intersección de los semiplanos en los que estaban definidas originalmente.

Esto completa la demostración. ////

19.2.3. Observaciones. Cada una de las dos demostraciones precedentes dependen de una aplicación típica del teorema de Cauchy. En el teorema 19.2.1 hemos cambiado la integración sobre una recta horizontal por la integración sobre otra para demostrar que [19.21] es independiente de y. En el teorema 19.2., el cambio de un rayo por otro se ha utilizado para construir las prolongaciones analíticas; el resultado ha sido en realidad que las funciones Φ_α son restricciones de una función Φ que es holomorfa en el complementario del intervalo $[-Ai, Ai]$.

La clase de las funciones descritas en el teorema 19.2.1 es la análoga para un semiplano de la clase H^2 tratada en el capítulo 17. El teorema 19.2.2 se utilizará en la demostración del teorema de Denjoy-Carleman (teorema 19.4.1).

19.3. CLASES CASI-ANALITICAS

19.3.1. Observación. Si Ω es una región y si $z_0 \in \Omega$, toda $f \in H(\Omega)$ está determinada de manera única por los números $f(z_0)$, $f'(z_0)$, $f''(z_0)$, ... Por otra parte, existen funciones infinitamente diferenciables en R^1 que no son idénticamente 0, pero que se anulan en algún intervalo. Tenemos aquí, pues, una propiedad de unicidad que poseen las funciones holomorfas, pero que no se verifica en C^∞ (la clase de todas las funciones complejas sobre R^1 infinitamente diferenciables).

Si $f \in H(\Omega)$, el crecimiento de la sucesión $\{|f^{(n)}(z_0)|\}$ está restringido por el teorema 10.4.9. Es razonable en consecuencia preguntarse si la propiedad de unicidad anterior se verifica en subclases convenientes de C^∞ en las que el crecimiento de las derivadas esté sometido a algunas restricciones. Esto motiva las definiciones siguientes; la respuesta a nuestra cuestión se da en el teorema 19.4.1.

19.3.2. Las clases $C\{M_n\}$. Si M_0, M_1, M_2, ... son números positivos, sea $C\{M_n\}$ la clase de todas las $f \in C^\infty$ que satisfacen desigualdades de la forma

$$\|D^n f\|_\infty \leqslant \beta_f B_f^n M_n \qquad (n=0, 1, 2, \ldots). \tag{19.40}$$

Aquí $D^0 f = f$, $D^n f$ es la derivada n-ésima de f si $n \geqslant 1$, la norma es la del supremo sobre R^1, y β_f y B_f son constantes positivas (que dependen de f, pero no de n).

Si f satisface [19.40], entonces

$$\limsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{\|D^n f\|_\infty}{M_n} \right\}^{1/n} \leqslant B_f. \tag{19.41}$$

Esto muestra que B_f es una cantidad más significativa que β_f. Sin embargo, si se omitiera β_f en [19.40], el caso $n=0$ implicaría $\|f\|_\infty \leqslant M_0$, que es una restricción no deseable. La inclusión de β_f hace de $C\{M_n\}$ un espacio vectorial.

Cada $C\{M_n\}$ es invariante con respecto a transformaciones afines. Más explícitamente, supongamos que $f \in C\{M_n\}$ y que $g(x) = f(ax+b)$. Entonces g satisface [19.40], con $\beta_g = \beta_f$ y $B_g = aB_f$.

Haremos dos hipótesis sobre las sucesiones consideradas $\{M_n\}$:

$$M_0 = 1. \tag{19.42}$$

$$M_n^2 \leqslant M_{n-1} M_{n+1} \qquad (n=1, 2, 3, \ldots). \tag{19.43}$$

La hipótesis [19.43] puede expresarse en la forma siguiente: $\{\log M_n\}$ *es una sucesión convexa.*

Estas hipótesis simplificarán algo de nuestro trabajo, y no encierran ninguna pérdida de generalidad. [Se puede demostrar, aunque no lo haremos, que toda clase $C\{M_n\}$ es igual a una clase $C\{\overline{M}_n\}$, donde $\{\overline{M}_n\}$ satisface [19.42] y [19.43].

El resultado siguiente ilustra la utilidad de [19.42] y [19.43]:

19.3.3. Teorema. *Cada $C\{M_n\}$ es una álgebra, con respecto a la multiplicación puntual.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que f y $g \in C\{M_n\}$, y que β_f, B_f, β_g y B_g son las constantes correspondientes. La regla para diferenciación del producto muestra que

$$D^n(fg) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (D^j f) \cdot (D^{n-j} g). \qquad [19.44]$$

Por tanto:

$$|D^n(fg)| \leqslant \beta_f \beta_g \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B_f^j B_g^{n-j} M_j M_{n-j}. \qquad [19.45]$$

La convexidad de $\{\log M_n\}$, combinada con $M_0 = 1$, muestra que $M_j M_{n-j} \leqslant M_n$ para $0 \leqslant j \leqslant n$. Por tanto, el teorema del binomio permite escribir, a partir de [19.45],

$$\|D^n(fg)\|_\infty \leqslant \beta_f \beta_g (B_f + B_g)^n M_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \qquad [19.46]$$

de modo que $fg \in C\{M_n\}$. ////

19.3.4. Definición. Se dice que una clase $C\{M_n\}$ es *casi-analítica* si las condiciones

$$f \in C\{M_n\}, \qquad (D^n f)(0) = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad [19.47]$$

implican que $f(x) = 0$ para todo $x \in R^1$.

El contenido de la definición no cambia, por supuesto, si $(D^n f)(0)$ se cambia por $(D^n f)(x_0)$, donde x_0 es un punto dado cualquiera.

Las clases casi-analíticas son, pues, las que poseen la propiedad de unicidad mencionada en el apartado 19.3.2. Una de estas clases está relacionada muy íntimamente con las funciones holomorfas:

19.3.5. Teorema. *La clase $C\{n!\}$ consiste en todas las f a las que corresponde un $\delta > 0$ tal que f puede extenderse como función holomorfa acotada en la banda definida por $|\mathrm{Im}\,(z)| < \delta$.*

En consecuencia, $C\{n!\}$ es una clase casi-analítica.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $f \in H(\Omega)$ y que $|f(z)| < \beta$ para todo $z \in \Omega$, donde Ω consiste en todos los $z = x + iy$ tales que $|y| < \delta$. Se deduce del teorema 10.4.9 que

$$|(D^n f)(x)| \leqslant \beta \delta^{-n} n! \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad [19.48]$$

para todo x real. La restricción de f al eje real pertenece, por tanto, a $C\{n!\}$.

Recíprocamente, supongamos que f está definida en el eje real y que $f \in C\{n!\}$. En otras palabras,

$$\|D^n f\|_\infty \leqslant \beta B^n n! \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \qquad [19.49]$$

Afirmamos que la representación

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(D^n f)(a)}{n!} (x - a)^n \qquad [19.50]$$

es válida para todo $a \in R^1$ si $a-B^{-1} < x < a+B^{-1}$. Esto se deduce de la fórmula de Taylor

$$f(x)=\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(D^j f)(a)}{j!}(x-a)^j+\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}(D^n f)(t)\,dt, \qquad [19.51]$$

que se obtiene por repetidas integraciones por partes. Por [19.49] el último término de [19.51] (el «resto») está mayorado por

$$n\beta B^n \left| \int_a^x (x-t)^{n-1}\,dt \right| = \beta |B(x-a)|^n. \qquad [19.52]$$

Si $|B(x-a)| < 1$, [19.52] tiende a 0 cuando $n \to \infty$, y se obtiene [19.50].

Podemos cambiar ahora x en [19.50] por un número complejo cualquiera z tal que $|z-a| < 1/B$. Esto define una función holomorfa F_a en el disco de centro a y radio $1/B$, y $F_a(x)=f(x)$ si x es real y $|x-a| < 1/B$. Las varias funciones F_a son, en consecuencia, prolongaciones analíticas unas de otras; constituyen una extensión holomorfa F de f en la banda $|y| < 1/B$.

Si $0 < \delta < 1/B$ y $z=a+iy$, $|y| < \delta$, entonces

$$|F(z)|=|F_a(z)|=\left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(D^n f)(a)}{n!}(iy)^n\right| \leqslant \beta \sum_{n=0}^{\infty} (B\delta)^n = \frac{\beta}{1-B\delta}.$$

Esto muestra que F está acotada en la banda $|y| < \delta$, lo que completa la demostración. ////

16.3.6. Teorema. *La clase $C\{M_n\}$ es casi-analítica si, y sólo si, $C\{M_n\}$ no contiene a ninguna función no trivial con soporte compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Si $C\{M_n\}$ es casi-analítica, si $f \in C\{M_n\}$, y si f tiene soporte compacto, entonces es evidente que f y todas sus derivadas se anulan en algún punto, y, por tanto, $f(x)=0$ para todo x.

Supongamos que $C\{M_n\}$ no es casi-analítica. Entonces existe una $f \in C\{M_n\}$ tal que $(D^n f)(0)=0$ para $n=0, 1, 2, \ldots$, pero $f(x_0) \neq 0$ para algún x_0. Podemos suponer $x_0 > 0$. Si $g(x)=f(x)$ para $x \geqslant 0$ y $g(x)=0$ para $x < 0$, entonces $g \in C\{M_n\}$. Pongamos $h(x)=g(x)g(2x_0-x)$. Por el teorema 19.3.3, $h \in C\{M_n\}$. Además, $h(x)=0$ si $x < 0$ y si $x > 2x_0$. Pero $h(x_0)=f^2(x_0) \neq 0$. Por tanto, h es un elemento no trivial de $C\{M_n\}$ con soporte compacto. ////

Es ahora cuando estamos preparados para establecer el teorema fundamental sobre clases casi-analíticas.

19.4. EL TEOREMA DE DENJOY-CARLEMAN

19.4.1. Teorema. *Supongamos que* $M_0=1$, $M_n^2 \leqslant M_{n-1}M_{n+1}$ *para* $n=1, 2, 3, \ldots$, *y que*

$$Q(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{M_n}, \qquad q(x)=\sup_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{M_n},$$

para $x>0$. *Entonces cada una de las siguientes cinco condiciones implica las otras cuatro:*

a) $C\{M_n\}$ *no es casi-analítica.*

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \log Q(x) \frac{dx}{1+x^2} < \infty.$

c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \log q(x) \frac{dx}{1+x^2} < \infty.$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{M_n}\right)^{1/n} < \infty.$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_{n-1}}{M_n} < \infty.$

Nota: Si $M_n \to \infty$ muy rápidamente cuando $n \to \infty$, entonces $Q(x)$ tiende a infinito lentamente cuando $x \to \infty$. Entonces cada una de las cinco condiciones, a su manera, dice que $M_n \to \infty$ rápidamente. Notemos también que $Q(x) \geqslant 1$ y $q(x) \geqslant 1$. Las integrales de *b)* y *c)* están, por tanto, definidas siempre. Puede ocurrir que $Q(x)=\infty$ para algún $x<\infty$. En ese caso, la integral *b)* es $+\infty$, y el teorema afirma que $C\{M_n\}$ es casi-analítica.

Si $M_n=n!$, entonces $M_{n-1}/M_n=1/n$, *e)* no se verifica, y el teorema afirma que $C\{n!\}$ es casi-analítica, de acuerdo con el teorema 19.3.5.

DEMOSTRACIÓN DE QUE *a)* IMPLICA *b)*. Supongamos que $C\{M_n\}$ no es casi analítica. Entonces $C\{M_n\}$ contiene una función no trivial con soporte compacto (teorema 19.3.6). Un cambio de variables afín proporciona una función $F \in C\{M_n\}$, con soporte en algún intervalo $[0, A]$, tal que
intervalo $[0, A]$, tal que

$$\|D^n F\|_{\infty} \leqslant 2^{-n} M_n \qquad (n=0, 1, 2, \ldots) \qquad [19.53]$$

y tal que F no es idénticamente cero. Definamos

$$f(z)=\int_0^A F(t) e^{itz}\, dt \qquad [19.54]$$

y

$$g(w)=f\left(\frac{i-iw}{1+w}\right). \qquad [19.55]$$

Entonces f es entera. Si $\operatorname{Im} z > 0$, el valor absoluto del integrando en [19.54] es a lo sumo $|F(t)|$. Por tanto, f está acotada en el semiplano superior; en consecuencia, g está acotada en U. Además, g es continua en $\bar{U}$, excepto en el punto $w=-1$. Como f no es idénticamente 0 (por el teorema de unicidad para transformadas de Fourier) lo mismo ocurre con g, y el teorema 15.4.4 muestra que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log |g(e^{i\theta})|\, d\theta > -\infty. \qquad [19.56]$$

Si $x=i(1-e^{i\theta})/(1+e^{i\theta})=\tan(\theta/2)$, entonces $d\theta=2(1+x^2)^{-1}\,dx$, por lo que [19.56] se convierte en

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \log |f(x)|\, \frac{dx}{1+x^2} > -\infty. \qquad [19.57]$$

Por otra parte, integrando por partes en [19.54] se obtiene

$$f(z)=(iz)^{-n}\int_0^A (D^nF)(t)e^{itz}\, dt \qquad (z \neq 0) \qquad [19.58]$$

puesto que F y todas sus derivadas se anulan en 0 y en A. Se tiene ahora, de [19.53] y [19.58], que

$$|x^n f(x)| \leqslant 2^{-n}AM_n \qquad (x \text{ real},\ n=0, 1, 2, \ldots). \qquad [19.59]$$

Por tanto:

$$Q(x)|f(x)| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n|f(x)|}{M_n} \leqslant 2A \qquad (x \geqslant 0), \qquad [19.60]$$

y [19.57] y [19.60] implican que se verifica *b)*. ////

DEMOSTRACIÓN DE QUE *b)* IMPLICA *c)*. $q(x) \leqslant Q(x)$. ////

DEMOSTRACIÓN DE QUE *c)* IMPLICA *d)*. Pongamos $a_n = M_n^{1/n}$. Como $M_0=1$ y $M_n^2 \leqslant M_{n-1}M_{n+1}$, se comprueba fácilmente que $a_n \leqslant a_{n+1}$, para $n > 0$. Si $x \geqslant ea_n$, entonces $x^n/M_n \geqslant e^n$, por tanto:

$$\log q(x) \geqslant \log \frac{x^n}{M_n} \geqslant \log e^n = n. \qquad [19.61]$$

En consecuencia,

$$e\int_{ea_1}^{\infty} \log q(x)\cdot\frac{dx}{x^2} \geqslant e\sum_{n=1}^{N} n\int_{ea_n}^{ea_{n+1}} x^{-2}\, dx + e\int_{ea_{N+1}}^{\infty} (N+1)x^{-2}\, dx$$

$$= \sum_{n=1}^{N} n\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right) + \frac{N+1}{a_{N+1}} = \sum \frac{1}{a_n} \qquad [19.62]$$

para todo N. Esto muestra que *c)* implica *d)*. ////

DEMOSTRACIÓN DE QUE *d)* IMPLICA *e)*. Pongamos

$$\lambda_n = \frac{M_{n-1}}{M_n} \qquad (n=1, 2, 3, \ldots). \tag{19.63}$$

Entonces $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 \geqslant \ldots$, y si $a_n = M_n^{1/n}$, como antes, tenemos

$$(a_n\lambda_n)^n \leqslant M_n \cdot \lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n = 1. \tag{19.64}$$

Por tanto, $\lambda_n \leqslant 1/a_n$, y la convergencia de $\Sigma(1/a_n)$ implica la de $\Sigma\lambda_n$. ////

DEMOSTRACIÓN DE QUE *e)* IMPLICA *a)*. La hipótesis es ahora que $\Sigma\lambda_n < \infty$ donde λ_n viene dada por [19.63]. Afirmamos que la función

$$f(z) = \left(\frac{\operatorname{sen} z}{z}\right)^2 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \lambda_n z}{\lambda_n z} \tag{19.65}$$

es una función entera de tipo exponencial, no idénticamente cero, que satisface las desigualdades

$$|x^k f(x)| \leqslant M_k \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \qquad (x \text{ real}, \ k=0, 1, 2, \ldots). \tag{19.66}$$

Notemos en primer lugar que $1 - z^{-1} \operatorname{sen} z$ tiene un cero en el origen. Por tanto, existe una constante B tal que

$$\left|1 - \frac{\operatorname{sen} z}{z}\right| \leqslant B|z| \qquad (|z| \leqslant 1). \tag{19.67}$$

Se tiene que

$$\left|1 - \frac{\operatorname{sen} \lambda_n z}{\lambda_n z}\right| \leqslant B\lambda_n |z| \qquad \left(|z| \leqslant \frac{1}{\lambda_n}\right), \tag{19.68}$$

por lo que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|1 - \frac{\operatorname{sen} \lambda_n z}{\lambda_n z}\right| \tag{19.69}$$

converge uniformemente en conjuntos compactos. (Notemos que $1/\lambda_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$, puesto que $\Sigma\lambda_n < \infty$.) El producto infinito [19.65] define, en consecuencia, una función entera f que no es idénticamente cero.

Por otra parte, la identidad

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} e^{itz}\, dt \tag{19.70}$$

muestra que $|z^{-1} \operatorname{sen} z| \leqslant e^{|y|}$ si $z = x + iy$. Por tanto:

$$|f(z)| \leqslant e^{A|z|}, \qquad \text{con} \qquad A = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n. \tag{19.71}$$

Para x real, tenemos $|\operatorname{sen} x| \leqslant x$ y $|\operatorname{sen} x| \leqslant 1$. Por tanto:

$$|x^n f(x)| \leqslant |x^k| \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \prod_{n=1}^{k} \left|\frac{\operatorname{sen} \lambda_n x}{\lambda_n x}\right| \qquad [19.72]$$

$$\leqslant \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 (\lambda_1 \ldots \lambda_k)^{-1} = M_k \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2.$$

Esto proporciona [19.66], y si integramos esta expresión obtenemos

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |x^k f(x)|\, dx \leqslant M_k \qquad (k=0, 1, 2, \ldots). \qquad [19.73]$$

Hemos demostrado que f satisface las hipótesis del teorema 19.2.2. La transformada de Fourier de f,

$$F(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx}\, dx \qquad (t \text{ real}) \qquad [19.74]$$

es, en consecuencia, una función con soporte compacto, no idénticamente cero, y [19.73] muestra que $F \in C^\infty$ y que

$$(D^k F)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (-ix)^k f(x) e^{-itx}\, dx. \qquad [19.75]$$

por aplicación repetida del teorema 9.1.2, *f*). Por tanto, $\|D^k F\|_\infty \leqslant M_k$, por [19.73], lo que muestra que $F \in C\{M_n\}$.

Por tanto, $C\{M_n\}$ no es casi-analítica, lo que completa la demostración. ////

EJERCICIOS

1. Supongamos que f es una función entera de tipo exponencial y que

$$\varphi(y) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^2\, dx.$$

Demuéstrese que o bien $\varphi(y)=\infty$ para todo y real o bien $\varphi(y) < \infty$ para todo y real. Demuéstrese que $f=0$ si φ es una función acotada.

2. Supongamos que f es una función entera de tipo exponencial tal que la restricción de f a dos rectas no paralelas pertenece a L^2. Demuéstrese que $f=0$.

3. Supongamos que f es una función entera de tipo exponencial cuya restricción a dos rectas no paralelas es acotada. Demuéstrese que f es constante. (Aplíquese el ejercicio 9 del capítulo 12.)

4. Supongamos que f es entera, $|f(z)| < C \exp(A|z|)$, y $f(z) = \Sigma a_n z^n$. Pongamos

$$\Phi(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, a_n}{w^{n+1}}.$$

Demuéstrese que la serie converge si $|w| > A$, que

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\Phi(w)e^{wz}\,dw$$

si $\Gamma(t)=(A+\epsilon)e^{it}$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, y que Φ es la función que apareció en la demostración del teorema 19.2.2. (Véase también el apartado 19.2.3.)

5. Supongamos que f satisface las hipótesis del teorema 19.2.1. Demuéstrese que se verifica la fórmula de Cauchy

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi+i\epsilon)}{\xi+i\epsilon-z}\,d\xi \qquad (0<\epsilon<y) \qquad (*)$$

donde $z=x+iy$. Demuéstrese que

$$f^*(x)=\lim_{y\to 0} f(x+iy)$$

existe para casi todo x. ¿Cuál es la relación entre f^* y la función F que aparece en el teorema 19.2.1? ¿Se verifica (*) con $\epsilon=0$ y con f^* en lugar de f en el integrando?

6. Supongamos que $\varphi\in L^2(-\infty,\infty)$ y que $\varphi>0$. Demuéstrese que existe una f con $|f|=\varphi$ tal que la transformada de Fourier de f se anula en una semirrecta si, y sólo si,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\log\varphi(x)\frac{dx}{1+x^2}>-\infty.$$

Sugerencia: Considérese f^*, como en el ejercicio 5, donde $f=\exp(u+iv)$ y

$$u(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\log\varphi(t)\,dt.$$

7. Sea f una función compleja definida en un conjunto cerrado E del plano. Demuéstrese que son equivalentes las siguientes dos condiciones con respecto a f:

a) Existe un conjunto abierto $\Omega\supset E$ y una función $F\in H(\Omega)$ tal que $F(z)=f(z)$ para $z\in E$.

b) A cada $\alpha\in E$ le corresponde un entorno V_α de α y una función $F_\alpha\in H(V_\alpha)$ tal que $F_\alpha(z)=f(z)$ en $V_\alpha\cap E$.

(En el teorema 19.3.5 se demostró un caso especial de éste.)

8. Demuéstrese que $C\{n!\}=C\{n^n\}$.

9. Demuéstrese que existen clases casi-analíticas más amplias que $C\{n!\}$.

10. Pongamos $\lambda_n=M_{n-1}/M_n$, como en la demostración del teorema 19.4.1. Tomemos $g_0\in C_c(R^1)$, y definamos

$$g_n(x)=(2\lambda_n)^{-1}\int_{-\lambda_n}^{\lambda_n}g_{n-1}(x-t)\,dt \qquad (n=1,2,3,\ldots).$$

Demuéstrese directamente (sin utilizar transformadas de Fourier ni funciones holomorfas) que $g=\lim g_n$ es una función que prueba que *e)* implica *a)* en el teorema 19.4.1. (Puede tomarse cualquier g_0 conveniente.)

11. Obténgase una fórmula explícita para una función $\varphi\in C^\infty$, con soporte en $[-2,2]$, tal que $\varphi(x)=1$ si $-1\leqslant x\leqslant 1$.

12. Demuéstrese que a toda sucesión $\{\alpha_n\}$ de números complejos le corresponde una función $f \in C^\infty$ tal que $(D^n f)(0) = \alpha_n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$

Sugerencia: Si φ es como en el ejercicio 11, si $\beta_n = \alpha_n / n!$, si $g_n(x) = \beta_n x^n \varphi(x)$ y si

$$f_n(x) = \lambda_n^{-n} g_n(\lambda_n x) = \beta_n x^n \varphi(\lambda_n x),$$

entonces $\|D^k f_n\|_\infty < 2^{-n}$ para $k = 0, \ldots, n-1$, si λ_n es suficientemente grande. Tómese $f = \Sigma f_n$.

13. Constrúyase una función $f \in C^\infty$ tal que la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(D^n f)(a)}{n!} (x-a)^n$$

tenga radio de convergencia 0 para todo $a \in R^1$.

Sugerencia: Pongamos

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{i\lambda_k x},$$

donde $\{c_k\}$ y $\{\lambda_k\}$ son sucesiones de números positivos, escogidos de tal modo que $\Sigma c_k \lambda_n^n < \infty$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ y de modo que $c_n \lambda_n^n$ crezca muy rápidamente y sea mucho más grande que la suma de todos los demás términos de la serie $\Sigma c_k \lambda_k^n$.

Por ejemplo, pongamos $c_k = \lambda_k^{1-k}$, y tomemos $\{\lambda_k\}$ de modo que

$$\lambda_k > 2 \sum_{j=1}^{k-1} c_j \lambda_j^k \quad \text{y} \quad \lambda_k > k^{2k}.$$

14. Supongamos que $C\{M_n\}$ es casi-analítica, que $f \in C\{M_n\}$, y que $f(x) = 0$ para infinitos $x \in [0, 1]$. ¿Qué puede deducirse de ello?

15. Sea X el espacio vectorial de todas las funciones enteras f que satisfacen $|f(z)| \leqslant Ce^{\pi|z|}$ para alguna $C < \infty$, y cuya restricción al eje real está en L^2. Asociemos a cada $f \in X$ su restricción a los enteros. Demuéstrese que $f \to \{f(n)\}$ es una aplicación lineal uno a uno de X sobre ℓ^2.

16. Supongamos que f es una función medible sobre $(-\infty, \infty)$ tal que $|f(x)| < e^{-|x|}$ para todo x. Demuéstrese que su transformada de Fourier $\hat{f}$ no puede tener soporte compacto, a menos que $f(x) = 0$ en c.t.p.

APROXIMACION UNIFORME POR POLINOMIOS

20.1. INTRODUCCION

20.1.1. Observaciones. Sea K^0 el interior de un conjunto compacto K del plano complejo. (Por definición, K^0 es la unión de todos los discos abiertos que son subconjuntos de K; por supuesto, K^0 puede ser vacío aunque K no lo sea.) Sea $P(K)$ el conjunto de todas las funciones definidas sobre K que son límites uniformes de polinomios en z.

¿Qué funciones pertenecen a $P(K)$?

Dos condiciones necesarias surgen inmediatamente: Si $f \in P(K)$, entonces $f \in C(K)$ y $f \in H(K^0)$.

Puede preguntarse a continuación si estas condiciones necesarias son también suficientes. La respuesta es negativa siempre que K separe el plano (es decir, cuando el complementario de K no sea conexo). Esto se vio en el apartado 13.2.3. Por otra parte, si K es un intervalo del eje real (en cuyo caso $K^0 = \varnothing$), el teorema de aproximación de Weierstrass afirma que

$$P(K) = C(K).$$

Por tanto, la respuesta es positiva si K es un intervalo. El teorema de Runge también apunta en esta dirección, puesto que establece, para conjuntos compactos K que no separen el plano, que $P(K)$ contiene al menos todas aquellas $f \in C(K)$ que tienen extensiones holomorfas en algún conjunto abierto $\Omega \supset K$.

En este capítulo demostraremos el teorema de Mergelyan que establece, sin ninguna hipótesis superflua, que las condiciones necesarias antes mencionadas son también suficientes si K no separa el plano.

Los ingredientes principales de la demostración son: El teorema de extensión de Tietze, un proceso de regularización mediante convoluciones, el teorema de Runge, y el lema 20.2.1, cuya demostración se basa en propiedades de la clase $\mathcal{S}$ que fue introducida en el capítulo 14.

20.2. ALGUNOS LEMAS

20.2.1. Lema. *Supongamos que D es un disco abierto de radio $r > 0$, que $E \subset D$, que E es compacto y conexo, que $\Omega = S^2 - E$ es conexo, y que el diámetro de E es al menos r. Entonces existe una función $g \in H(\Omega)$ y una constante b, con la propiedad siguiente: Si*

$$Q(\zeta, z) = g(z) + (\zeta - b)g^2(z), \qquad [20.1]$$

se verifican las desigualdades

$$|Q(\zeta, z)| < \frac{100}{r} \qquad [20.2]$$

$$\left| Q(\zeta, z) - \frac{1}{z-\zeta} \right| < \frac{1000r^2}{|z-\zeta|^3} \qquad [20.3]$$

para todo $z \in \Omega$ *y para todo* $\zeta \in D$.

Recordamos que S^2 es la esfera de Riemann y que el diámetro de E es el supremo de los números $|z_1 - z_2|$, donde $z_1 \in E$ y $z_2 \in E$.

DEMOSTRACIÓN. Suponemos, sin pérdida de generalidad, que el centro de D está en el origen. Por tanto, $D = D(0; r)$.

La implicación *d)* $\rightarrow$ *b)* del teorema 13.4.1 muestra que Ω es simplemente conexo (notemos que $\infty \in \Omega$). Por el teorema de la aplicación de Riemann existe, por tanto, una transformación conforme F de U sobre Ω tal que $F(0) = \infty$. F tiene un desarrollo de la forma

$$F(w) = \frac{a}{w} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n \qquad (w \in U). \qquad [20.4]$$

Definimos

$$g(z) = \frac{1}{a} F^{-1}(z) \qquad (z \in \Omega), \qquad [20.5]$$

donde F^{-1} es la transformación de Ω sobre U que invierte F, y ponemos

$$b = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z g(z)\, dz, \qquad [20.6]$$

donde Γ es la circunferencia orientada positivamente con centro 0 y radio r.

Por [20.4], el teorema 14.5.6 puede aplicarse a F/a. Establece que el diámetro del complementario de $(F/a)(U)$ es, a lo sumo, 4. En consecuencia, diám $E \leqslant 4|a|$. Como diám $E \geqslant r$, se deduce que

$$|a| \geqslant \frac{r}{4} \qquad [20.7]$$

Puesto que g es una transformación conforme de Ω sobre $D(0; 1/|a|)$, [20.7] muestra que

$$|g(z)| < \frac{4}{r} \qquad (z \in \Omega) \qquad [20.5]$$

y como Γ es un camino en Ω, de longitud $2\pi r$, [20.6] proporciona

$$|b| < 4r. \qquad [20.9]$$

Si $\zeta \in D$, entonces $|\zeta| < r$, por lo que [20.1], [20.8] y [20.9] implican

$$|Q| \leqslant \frac{4}{r} + 5r\left(\frac{16}{r^2}\right) < \frac{100}{r}. \qquad [20.10]$$

Esto demuestra [20.2].

Fijemos $\zeta \in D$.

Si $z=F(w)$, entonces $zg(z)=wF(w)/a$; como $wF(w) \to a$ cuando $w \to 0$, tenemos $zg(z) \to 1$ cuando $z \to \infty$. En consecuencia, g posee un desarrollo de la forma

$$g(z)=\frac{1}{z-\zeta}+\frac{\lambda_2(\zeta)}{(z-\zeta)^2}+\frac{\lambda_3(\zeta)}{(z-\zeta)^3}+\dots \qquad (|z-\zeta|>2r). \qquad [20.11]$$

Sea Γ_0 una circunferencia grande con centro en 0; [20.11] proporciona (por el teorema de Cauchy)

$$\lambda_2(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}(z-\zeta)g(z)\,dz=b-\zeta. \qquad [20.12]$$

Sustituyamos este valor de $\lambda_2(\zeta)$ en [20.11]. Entonces [20.1] muestra que la función

$$\varphi(z)=\left[Q(\zeta,z)-\frac{1}{z-\zeta}\right](z-\zeta)^3 \qquad [20.13]$$

está acotada cuando $z \to \infty$. Por tanto, φ posee una singularidad evitable en ∞. Si $z \in \Omega \cap D$, entonces $|z-\zeta|<2r$, por lo que [20.2] y [20.13] proporcionan

$$|\varphi(z)|<8r^3|Q(\zeta,z)|+4r^2<1000r^2. \qquad [20.14]$$

Por el teorema del módulo máximo, [20.41] se verifica para todo $z \in \Omega$. Esto demuestra [20.3]. ////

20.2.2. Lema. *Supongamos que $f \in C_c'(R^2)$, el espacio de todas las funciones continuamente diferenciables del plano con soporte compacto. Pongamos*

$$\bar\partial=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right). \qquad [20.15]$$

Entonces se verifica la siguiente «fórmula de Cauchy»:

$$f(z)=-\frac{1}{\pi}\int\int_{R^2}\frac{(\bar\partial f)(\zeta)}{\zeta-z}\,d\xi\,d\eta \qquad (\zeta=\xi+i\eta). \qquad [20.16]$$

DEMOSTRACIÓN. Puede deducirse del teorema de Green. Sin embargo, he aquí una sencilla demostración directa:

Pongamos $\varphi(r,\theta)=f(z+re^{i\theta})$, $r>0$, θ real. Si $\zeta=z+re^{i\theta}$, la regla de la cadena proporciona

$$(\bar\partial f)(\zeta)=\frac{1}{2}e^{i\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}+\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right]\varphi(r,\theta). \qquad [20.17]$$

El segundo miembro de [20.16] es, por tanto, igual al límite, cuando $\epsilon \to 0$, de

$$-\frac{1}{2\pi}\int_\epsilon^\infty\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{i}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)d\theta\,dr. \qquad [20.18]$$

Para cada $r > 0$, φ es periódica en θ, con periodo 2π. La integral de $\partial\varphi/\partial\theta$ es, por tanto, 0, y [20.17] se convierte en

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_\epsilon^\infty \frac{\partial\varphi}{\partial r}\, dr = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\epsilon, \theta)\, d\theta. \qquad [20.19]$$

Cuando $\epsilon \to 0$, $\varphi(\epsilon, \theta) \to f(z)$ uniformemente. Esto proporciona [20.16].

////

Estableceremos el teorema de extensión de Tietze en el mismo marco en el que demostramos el lema de Urysohn, puesto que es una consecuencia bastante directa de éste.

20.2.3. Teorema de extensión de Tietze. *Supongamos que K es un subconjunto compacto de un espacio de Hausdorff localmente compacto X, y que $f \in C(K)$. Entonces existe una $F \in C_c(X)$ tal que $F(x) = f(x)$ para todo $x \in K$.*

(Como en el teorema de Lusin, podemos hacer de modo que $\|F\|_X = \|f\|_K$.)

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que f es real, $-1 \leqslant f \leqslant 1$. Sea W un conjunto abierto de adherencia compacta tal que $K \subset W$. Pongamos

$$K^+ = \{x \in K : f(x) \geqslant (1/3)\}, \qquad K^- = \{x \in K : f(x) \leqslant -(1/3)\}. \qquad [20.20]$$

Entonces K^+ y K^- son subconjuntos compactos disjuntos de W. Como consecuencia del lema de Urysohn existe una función $f_1 \in C_c(X)$ tal que $f_1(x) = (1/3)$ en K^+, $f_1(x) = -(1/3)$ en K^-, $-(1/3) \leqslant f_1(x) \leqslant (1/3)$ para todo $x \in X$, y tal que el soporte de f_1 está en W. Por tanto,

$$|f - f_1| \leqslant (2/3) \text{ en } K, \qquad |f_1| \leqslant (1/3) \text{ en } X. \qquad [20.21]$$

Repitamos esta construcción con $f - f_1$ en lugar de f: Existe una $f_2 \in C_c(X)$, con soporte en W, de modo que

$$|f - f_1 - f_2| \leqslant (2/3)^2 \text{ en } K, \qquad |f_2| \leqslant (1/3)\cdot(2/3) \text{ en } X. \qquad [20.22]$$

De esta forma obtenemos funciones $f_n \in C_c(X)$, con soporte en W, tales que

$$|f - f_1 - \ldots - f_n| \leqslant (2/3)^n \text{ en } K, \qquad |f_n| \leqslant (1/3)\cdot(2/3)^{n-1} \text{ en } X. \qquad [20.23]$$

Pongamos $F = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots$ Por [20.23], la serie converge a f en K, y converge uniformemente en X. Por tanto, F es continua. Además, el soporte de F está en $\overline{W}$. ////

20.3. TEOREMA DE MERGELYAN

20.3.1. Teorema. *Si K es un conjunto compacto del plano cuyo complementario es conexo, si f es una función compleja continua en K que es holomorfa en el interior de K, y si $\epsilon > 0$, entonces existe un polinomio P tal que $|f(z) - P(z)| < \epsilon$ para todo $z \in K$.*

Si el interior de K es vacío, entonces parte de las hipótesis se satisfacen directamente, y la conclusión se verifica para toda $f \in C(K)$. Notemos que K no necesita ser conexo.

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema de Tietze, f puede extenderse como función continua en el plano, con soporte compacto. Fijemos una tal extensión, y denotémosla otra vez mediante f.

Para cualquier $\delta > 0$, sea $\omega(\delta)$ el supremo de los números

$$|f(z_2) - f(z_1)|,$$

donde z_1 y z_2 están sometidos a la condición $|z_2 - z_1| \leqslant \delta$. Como f es uniformemente continua, tenemos

$$\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0. \qquad [20.24]$$

De ahora en adelante, δ será fijo. Demostraremos que existe un polinomio P tal que

$$|f(z) - P(z)| < 10\,000\,\omega(\delta) \qquad (z \in K). \qquad [20.25]$$

Por [20.24], esto demuestra el teorema.

Nuestro primer objetivo es la construcción de una función $\Phi \in C_c'(R^2)$, tal que para todo z

$$|f(z) - \Phi(z)| \leqslant \omega(\delta), \qquad [20.26]$$

$$|(\bar{\partial}\Phi)(z)| < \frac{2\omega(\delta)}{\delta}, \qquad [20.27]$$

y

$$\Phi(z) = -\frac{1}{\pi} \int\int_X \frac{(\bar{\partial}\Phi)(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta \qquad (\zeta = \xi + i\eta), \qquad [20.28]$$

donde X es el conjunto de todos los puntos del soporte de Φ cuya distancia al complementario de K no exceda a δ. (Por tanto, X no contiene ningún punto que esté «muy en el interior» de K.)

Construimos Φ como la convolución de f con una función regularizante A. Pongamos $a(r) = 0$ si $r > \delta$, pongamos

$$a(r) = \frac{3}{\pi\delta^2}\left(1 - \frac{r^2}{\delta^2}\right)^2 \qquad (0 \leqslant r \leqslant \delta), \qquad [20.29]$$

y definamos

$$A(z) = a(|z|) \qquad [20.30]$$

para todo z complejo. Es claro que $A \in C_c'(R^2)$. Afirmamos que

$$\int\int_{R^2} A = 1, \qquad [20.31]$$

$$\int\int_{R^2} \bar{\partial} A = 0, \qquad [20.32]$$

$$\int\int_{R^2} |\bar{\partial} A| = \frac{24}{15\delta} < \frac{2}{\delta}. \qquad [20.33]$$

Las constantes en [20.29] se ajustan de tal manera que se verifique [20.31]. (Calcular la integral en coordenadas polares.) [20.32] se verifica simplemente porque A tiene soporte compacto. Para calcular [20.33], expresemos $\bar{\partial}A$ en coordenadas polares, como en la demostración del lema 20.2.2, y notemos que $\partial A/\partial\theta = 0$, $|\partial A/\partial r| = -a'(r)$.

Definamos ahora

$$\Phi(z) = \int\int_{R^2} f(z-\zeta)A(\zeta)\, d\xi\, d\eta = \int\int_{R^2} A(z-\zeta)f(\zeta)\, d\xi\, d\eta. \qquad [20.34]$$

Como f y A tienen soporte compacto, lo mismo ocurre con Φ. Como

$$\Phi(z) - f(z) = \int\int_{R^2} [f(z-\zeta) - f(z)]A(\zeta)\, d\xi\, d\eta \qquad [20.35]$$

y $A(\zeta) = 0$ si $|\zeta| > \delta$, [20.26] se deduce de [20.31]. Los cocientes incrementales de A convergen en forma acotada a las correspondientes derivadas parciales de A, puesto que $A \in C_c'(R)$. Por tanto, la última expresión de [20.34] puede diferenciarse bajo el signo integral, y obtenemos

$$\begin{aligned}(\bar{\partial}\Phi)(z) &= \int\int_{R^2} (\bar{\partial}A)(z-\zeta)f(\zeta)\, d\xi\, d\eta \\ &= \int\int_{R^2} f(z-\zeta)(\bar{\partial}A)(\zeta)\, d\xi\, d\eta \qquad [20.36] \\ &= \int\int_{R^2} [f(z-\zeta) - f(z)](\bar{\partial}A)(\zeta)\, d\xi\, d\eta.\end{aligned}$$

La última igualdad se basa en [20.32]. [20.33] y [20.36] proporcionan [20.27]. Si escribimos [20.36] con Φ_x y Φ_y en lugar de $\bar{\partial}\Phi$, vemos que Φ tiene derivadas parciales continuas. Por tanto, el lema 20.2.2 puede aplicarse a Φ, y se obtiene [20.28] si podemos demostrar que $\bar{\partial}\Phi = 0$ en G, donde G es el conjunto de todos los $z \in K$ cuya distancia al complementario de K excede a δ. Haremos esto demostrando que

$$\Phi(z) = f(z) \qquad (z \in G); \qquad [20.37]$$

notemos que $\bar{\partial}f = 0$ en G, puesto que f es holomorfa allí. (Recordamos que $\bar{\partial}$ es el operador de Cauchy-Riemann definido en el apartado 11.1.1.) Ahora bien, si $z \in G$, entonces $z - \zeta$ está en el interior de K para todo ζ tal que $|\zeta| < \delta$. La propiedad del valor medio para funciones armónicas proporciona en consecuencia, por la primera ecuación de [20.34]:

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \int_0^\delta a(r)r\, dr \int_0^{2\pi} f(z - re^{i\theta})\, d\theta \\ &= 2\pi f(z)\int_0^\delta a(r)r\, dr = f(z)\int\int_{R^2} A = f(z) \qquad [20.38]\end{aligned}$$

para todo $z \in G$.

Hemos demostrado, pues, [20.26], [20.27] y [20.28].

La definición de X muestra que X es compacto y que puede ser recubierto por un número finito de discos abiertos $D_1, \ldots, D_n$, de radio 2δ, cuyos centros

no estén en K. Como S^2-K es conexo, el centro de cada D_j puede unirse a ∞ por un camino poligonal en S^2-K. Se obtiene que cada D_j contiene un conjunto compacto conexo E_j, de diámetro al menos 2δ, de modo que S^2-E es conexo y que $K \cap E_j = \emptyset$.

Apliquemos ahora el lema 20.2.1, con $r=2\delta$. Existen funciones $g_j \in H(S^2-E_j)$ y constantes b_j tales que se verifican las desigualdades

$$|Q_j(\zeta, z)| < \frac{50}{\delta}, \qquad [20.39]$$

$$\left| Q_j(\zeta, z) - \frac{1}{z-\zeta} \right| < \frac{4000\delta^2}{|z-\zeta|^3} \qquad [20.40]$$

para $z \notin E_j$ y $\zeta \in D_j$, si

$$Q_j(\zeta, z) = g_j(z) + (\zeta - b_j) g_j^2(z). \qquad [20.41]$$

Sea Ω el complementario de $E_1 \cup \ldots \cup E_n$. Entonces Ω es un conjunto abierto que contiene a K.

Pongamos $X_1 = X \cap D_1$ y $X_j = (X \cap D_j) - (X_1 \cup \ldots \cup X_{j-1})$, para $2 \leqslant j \leqslant n$. Definamos

$$R(\zeta, z) = Q_j(\zeta, z) \qquad (\zeta \in X_j,\ z \in \Omega) \qquad [20.42]$$

y

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \int\int_X (\bar\partial\Phi)(\zeta) R(\zeta, z)\, d\xi\, d\eta, \qquad (z \in \Omega). \qquad [20.43]$$

Como

$$F(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\pi} \int\int_{X_j} (\bar\partial\Phi)(\zeta) Q_j(\zeta, z)\, d\xi\, d\eta, \qquad [20.44]$$

[20.41] muestra que F es una combinación lineal finita de las funciones g_j y g_j^2. Por tanto, $F \in H(\Omega)$.

Por [20.43], [20.27] y [20.28] tenemos

$$|F(z) - \Phi(z)| < \frac{2\omega(\delta)}{\pi\delta} \int\int_X \left| R(\zeta, z) - \frac{1}{z-\zeta} \right| d\xi\, d\eta \qquad (z \in \Omega). \qquad [20.45]$$

Observemos que las desigualdades [20.39] y [20.40] son válidas con R en lugar de Q_j si $\zeta \in X$ y $z \in \Omega$. En efecto, si $\zeta \in X$ entonces $\zeta \in X_j$ para algún j, y se tiene $R(\zeta, z) = Q_j(\zeta, z)$ para todo $z \in \Omega$.

Fijemos ahora $z \in \Omega$, pongamos $\zeta = z + \rho e^{i\theta}$, y acotemos el integrando de [20.45] mediante [20.39] si $\rho < 4\delta$, y mediante [20.40] si $4\delta \leqslant \rho$. Se ve entonces que la integral de [20.45] es menor que la suma de

$$2\pi \int_0^{4\delta} \left(\frac{50}{\delta} + \frac{1}{\rho} \right) \rho\, d\rho = 808\pi\delta \qquad [20.46]$$

y

$$2\pi \int_{4\delta}^{\infty} \frac{4000\delta^2}{\rho^3} \rho\, d\rho = 2000\pi\delta. \qquad [20.47]$$

Por tanto, [20.45] conduce a

$$|F(z)-\Phi(z)| < 6000\omega(\delta) \qquad (z \in \Omega). \qquad [20.48]$$

Como $F \in H(\Omega)$, $K \subset \Omega$ y S^2-K es conexo, el teorema de Runge muestra que F puede ser aproximada uniformemente en K por polinomios. En consecuencia, [20.26] y [20.48] muestran que puede verificarse [20.25].

Esto completa la demostración. ////

Debe señalarse una característica poco usual de esta demostración. Hemos tenido que demostrar que la función dada f está en el subespacio cerrado $P(K)$ de $C(K)$. (Utilizamos la terminología del apartado 20.1.1.) Nuestro primer paso ha consistido en aproximar f mediante Φ. Pero este paso nos ha llevado fuera de $P(K)$, puesto que se construyó Φ de modo que, en general, no será holomorfa en todo el interior de K. En consecuencia, Φ está a una distancia positiva de $P(K)$. Sin embargo, [20.48] muestra que esta distancia es menor que una constante multiplicada por $\omega(\delta)$. [De hecho, habiendo demostrado el teorema, sabemos que esta distancia es a lo sumo $\omega(\delta)$, por [20.26], en lugar de $6000\omega(\delta)$.] La demostración de [20.48] se basa en la desigualdad [20.27] y en el hecho de que $\bar{\partial}\Phi=0$ en G. Como las funciones holomorfas φ se caracterizan por $\bar{\partial}\varphi=0$, [20.27] puede considerarse como la expresión de que Φ no está muy lejos de ser holomorfa, y esta interpretación está confirmada por [20.48].

EJERCICIOS

1. Extiéndase el teorema de Mergelyan al caso en que S^2-K tenga un número finito de componentes: Demuéstrese que entonces toda $f \in C(K)$ que sea holomorfa en el interior de K puede ser aproximada uniformemente en K por funciones racionales.

2. Demuéstrese que el resultado del ejercicio 1 no puede extenderse a conjuntos compactos arbitrarios K del plano, comprobando los detalles del siguiente ejemplo. Para $n=1, 2, 3, \ldots$, sean $D_n=D(\alpha_n; r_n)$ discos abiertos disjuntos en U cuya unión V es densa en U, y tales que $\Sigma r_n < \infty$. Pongamos $K=\bar{U}-V$. Sean Γ y γ_n los caminos

$$\Gamma(t)=e^{it}, \qquad \gamma_n(t)=\alpha_n+r_n e^{it}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

y definamos

$$L(f)=\int_\Gamma f(z)\,dz=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\gamma_n} f(z)\,dz \qquad (f \in C(K)).$$

Demuéstrese que L es un funcional lineal acotado sobre $C(K)$, pruébese que $L(R)=0$ para toda función racional R cuyos polos estén fuera de K, y demuéstrese que existe una $f \in C(K)$ para la que $L(f) \neq 0$.

3. Pruébese que la función g construida en la demostración del lema 20.2.1 tiene la norma del supremo más pequeña entre todas las $f \in H(\Omega)$ tales que $zf(z) \to 1$ cuando $z \to \infty$. (Esto motiva la demostración del lema.)

Demuéstrese además que $b=c_0$ en esa demostración y que la desigualdad $|b| < 4r$ puede cambiarse, por tanto, por $|b| < r$. De hecho, b está en la envoltura convexa del conjunto E.

EL TEOREMA DE MAXIMALIDAD DE HAUSDORFF

Demostraremos en primer lugar un lema que, cuando se combina con el axioma de elección, conduce a una demostración casi instantánea del teorema 4.2.9.

Si $\mathcal{F}$ es una colección de conjuntos y $\Phi \subset \mathcal{F}$, llamamos a Φ una *subcadena* de $\mathcal{F}$ si Φ está totalmente ordenada por la inclusión de conjuntos. Explícitamente, esto significa que si $A \in \Phi$ y $B \in \Phi$, entonces o bien $A \subset B$ ó $B \subset A$. La unión de todos los elementos de Φ se designará simplemente como la *unión de* Φ.

Lema. *Supongamos que $\mathcal{F}$ es una colección no vacía de subconjuntos de un conjunto X tal que la unión de toda subcadena de $\mathcal{F}$ pertenece a $\mathcal{F}$. Supongamos que g es una función que asocia a cada $A \in \mathcal{F}$ un conjunto $g(A) \in \mathcal{F}$ tal que $A \subset g(A)$ y $g(A) - A$ consta a lo sumo de un elemento. Entonces existe un $A \in \mathcal{F}$ para el que $g(A) = A$.*

DEMOSTRACIÓN. Fijemos $A_0 \in \mathcal{F}$. Diremos que una subcolección $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ es una *torre* si $\mathcal{F}'$ posee las siguientes tres propiedades:

a) $A_0 \in \mathcal{F}'$.

b) La unión de toda subcadena de $\mathcal{F}'$ pertenece a $\mathcal{F}'$.

c) Si $A \in \mathcal{F}'$, también $g(A) \in \mathcal{F}'$.

La familia de todas las torres es no vacía. En efecto, si $\mathcal{F}_1$ es la colección de todos los $A \in \mathcal{F}$ tales que $A_0 \subset A$, entonces $\mathcal{F}_1$ es una torre. Sea $\mathcal{F}_0$ la intersección de todas las torres. Entonces $\mathcal{F}_0$ es una torre (la comprobación es trivial), pero ninguna subcolección propia de $\mathcal{F}_0$ es una torre. Además, $A_0 \subset A$ si $A \in \mathcal{F}_0$. La idea de la demostración es probar que $\mathcal{F}_0$ es una subcadena de $\mathcal{F}$.

Sea Γ la colección de todos los $C \in \mathcal{F}_0$ tales que todo $A \in \mathcal{F}_0$ verifica que o bien $A \subset C$ o bien $C \subset A$.

Para cada $C \in \Gamma$, sea $\Phi(C)$ la colección de todos los $A \in \mathcal{F}_0$ tales que o $A \subset C$ o $g(C) \subset A$.

Las propiedades *a)* y *b)* se satisfacen claramente por Γ y por cada $\Phi(C)$. Fijemos $C \in \Gamma$, y supongamos $A \in \Phi(C)$. Queremos demostrar que $g(A) \in \Phi(C)$. Si $A \in \Phi(C)$, existen tres posibilidades: o bien $A \subset C$ y $A \neq C$, o $A = C$ o $g(C) \subset A$. Si A es un subconjunto propio de C, entonces C no puede ser un subconjunto propio de $g(A)$, de lo contrario $g(A) - A$ contendría al menos dos elementos; como $C \in \Gamma$, se deduce que $g(A) \subset C$. Si $A = C$, entonces $g(A) = g(C)$. Si $g(C) \subset A$, entonces también $g(C) \subset g(A)$, puesto que

$A \subset g(A)$. Por tanto, $g(A) \in \Phi(C)$, y hemos demostrado que $\Phi(C)$ es una torre. La minimalidad de $\mathcal{F}_0$ implica, pues, que $\Phi(C) = \mathcal{F}_0$, para todo $C \in \Gamma$.

En otras palabras, si $A \in \mathcal{F}_0$ y $C \in \Gamma$, entonces o bien $A \subset C$ ó $g(C) \subset A$. Pero esto dice que $g(C) \in \Gamma$. En consecuencia, Γ es una torre, y la minimalidad de $\mathcal{F}_0$ muestra que $\Gamma = \mathcal{F}_0$. Se deduce, pues, de la definición de Γ que $\mathcal{F}_0$ está totalmente ordenada.

Sea A la unión de $\mathcal{F}_0$. Como $\mathcal{F}_0$ satisface *b)*, $A \in \mathcal{F}_0$. Por *c)*, $g(A) \in \mathcal{F}_0$. Como A es el mayor elemento de $\mathcal{F}_0$ y puesto que $A \subset g(A)$, se deduce que $A = g(A)$. ////

Definición. Una *función de elección* para un conjunto X es una función f que asocia a cada subconjunto no vacío E de X un elemento de E: $f(E) \in E$.

En terminología más informal, f «elige» un elemento de cada subconjunto no vacío de X.

El axioma de elección. *Para todo conjunto existe una función de elección.*

Teorema de maximalidad de Hausdorff. *Todo conjunto no vacío parcilamente ordenado P contiene un subconjunto maximal totalmente ordenado.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{F}$ la colección de todos los subconjuntos totalmente ordenados de P. Como todo subconjunto de P que consta de un solo elemento está totalmente ordenado, $\mathcal{F}$ es no vacía. Notemos que la unión de cualquier cadena de conjuntos totalmente ordenados está totalmente ordenada.

Sea f una función de elección para P. Si $A \in \mathcal{F}$, sea A^* el conjunto de todos los x del complementario de A tales que $A \cup \{x\} \in \mathcal{F}$. Si $A^* \neq \emptyset$, pongamos

$$g(A) = A \cup \{f(A^*)\}.$$

Si $A^* = \emptyset$, pongamos $g(A) = A$.

Por el lema, $A^* = \emptyset$ para al menos un $A \in \mathcal{F}$, y cualquiera de estos A es un elemento maximal de $\mathcal{F}$. ////

Capítulo 1

El primer libro sobre la teoría moderna de integración y diferenciación es el de LEBESGUE *Leçons sur l'intégration,* publicado en 1904.

Para una historia ilustrativa de los primeros intentos que se hicieron en la construcción de una teoría satisfactoria de la integración, véase [37], en donde se contienen discusiones interesantes sobre las dificultades que tuvieron incluso matemáticos de primera fila con sencillos conceptos de teoría de conjuntos antes de que éstos fueran definidos adecuadamente y bien entendidos.

La forma en que se presenta en el texto la integración abstracta está inspirada en SAKS [28] *. Puede alcanzarse más generalidad si se cambian las σ-álgebras por σ-anillos *(Axiomas:* $\cup A_i \in \mathfrak{R}$ y $A_1 - A_2 \in \mathfrak{R}$ si $A_i \in \mathfrak{R}$ para $i = 1, 2, 3, \ldots$; no se requiere que $X \in \mathfrak{R}$), pero a costa de una definición necesariamente más recargada de la medibilidad. Véase la sección 18 de [7]. En todas las aplicaciones clásicas la medibilidad de X es más o menos automática. Esta es la razón de nuestra elección de la de alguna manera teoría más simple basada en las σ-álgebras.

Sección 1.3. Esta definición de $\mathfrak{B}$ es como en [12]. En [7] los conjuntos de Borel se definen como el σ-anillo generado por los conjuntos compactos. En espacios que no son σ-compactos, esta es una familia más pequeña que la nuestra.

Capítulo 2

Apartado 2.2.10. El enunciado habitual del lema de Urysohn es: Si K_0 y K_1 son conjuntos cerrados disjuntos en un espacio de Hausdorff *normal* X, entonces existe una función continua en X que es 0 en K_0 y 1 en K_1. La demostración es la misma que la del texto.

Apartado 2.3.1. La forma original de este teorema, con $X = [0, 1]$, se debe a F. RIESZ (1909). Véase [5], pp. 373, 380-381, y [12], pp. 134-135 para su historia posterior. El teorema se presenta aquí en la misma generalidad que en [12]. La función de conjunto μ que se define para todos los subconjuntos de X en la demostración del teorema 2.3.1 se llama una *medida exterior* a causa de su subaditividad numerable (paso I). Para aplicaciones sistemáticas (originadas por CARATHÉODORY) de esta noción, véase [25] y [28].

---

* Los números volados se refieren a las obras citadas en la bibliografía.

Apartado 2.5.2. Para construcciones directas de la medida de Lebesgue, de acuerdo con líneas más clásicas, véase [31], [35], y [26].

Apartado 2.5.3. Una demostración de que la cardinalidad de toda σ-álgebra generada numerablemente es $\leqslant c$ puede obtenerse en pp. 133-134 de [38]. Que esta cardinalidad es o finita o $\geqslant c$ debe resultar claro después de realizar el ejercicio 1 del capítulo 1.

Apartado 2.5.4. Un artículo muy instructivo sobre el tema de conjuntos no medibles en relación con medidas invariantes con respecto a un grupo es: J. VON NEUMANN, *Zur allgemeinen Theorie des Masses, Fundamenta Math.*, vol. 13, pp. 73-116, 1929. Véase también el artículo de HALMOS en el número especial (mayo, 1958) del *Bull. Am. Math. Soc.* dedicado al trabajo de VON NEUMANN.

Apartado 2.6.1. [28], p. 72.

Apartado 2.6.2. [28], p. 75. Existe otro enfoque de la teoría de la integración de Lebesgue debida a DANIELL *(Ann. Math.*, vol. 19, pp. 279-294, 1917-1918) basada en extensiones de funcionales lineales positivos. Cuando se aplica a $C_c(X)$ conduce a una construcción que virtualmente convierte el teorema de Vitali-Carathéodory en la definición de medibilidad. Véase [17] y, para el tratamiento completo, [18].

Ejercicio 8. R. R. KIRK *(Am. Math. Monthly,* vol. 79, pp. 884-886, 1972) encontró una extensión interesante de esto, basada en el teorema de categoría de Baire.

Ejercicio 17. Este ejemplo aparece en *A Theory of Radon Measures on Locally Compact Spaces,* por R. E. EDWARDS, *Acta Math.*, vol. 89, p. 160, 1953. Desgraciadamente se pasó por alto su existencia en [27].

Ejercicio 18. [7], p. 231; debido originalmente a DIEUDONNÉ.

Capítulo 3

La mejor referencia general es [9]. Véase también el cap. 1 de [36].

Ejercicio 3. El volumen 1 (1920) de *Fundamenta Math.* contiene tres artículos relativos a la observación entre paréntesis.

Ejercicio 16. [28], p. 18.

Ejercicio 17. La segunda demostración sugerida de la parte *b)* fue publicada por W. P. NOVINGER, en *Proc. Am. Math. Soc.*, vol. 34, pp. 627-628, 1972. También fue descubierta por DAVID HALL.

Ejercicio 18. La convergencia en medida es un concepto natural en teoría de probabilidad. Véase [7], cap. IX.

Capítulo 4

Existen muchos libros que tratan de la teoría del espacio de Hilbert. Citamos [6] y [24] como las referencias principales. Véase también [5], [17] y [19].

El trabajo clásico sobre series de Fourier es [36]. Para introducciones más simples, véase [10], [31] y [39].

Capítulo 5

El trabajo clásico aquí es [2]. Tratados más recientes son [5], [14] y [24]. Véase también [17] y [19].

Sección 5.6. Para una discusión más profunda de las medidas representadas véase ARENS Y SINGER, *Proc. Am. Math. Soc.*, vol. 5, pp. 735-745, 1954.

Capítulo 6

Apartado 6.1.3. La constante 1/6 puede cambiarse por $1/\pi$, y esta es la mejor posible. Véase R. P. KAUFMAN y N. W. RICKERT, *Bull. Am. Math. Soc.*, vol. 72, pp. 672-676, 1966, y (para un tratamiento más simple) W. W. BLEDSOE, *Am. Math. Monthly*, vol. 77, pp. 180-182, 1970.

Apartado 6.2.3. La demostración de VON NEUMANN está en una sección sobre teoría de la medida en su artículo: *On Rings of Operators*, III, *Ann. Math.*, vol. 41, pp. 94-161, 1940. Véanse pp. 124-130.

Apartado 6.4.1. El fenómeno $L^\infty \neq (L^1)^*$ es discutido por J. T. SCHWARTZ en *Proc. Am. Math. Soc.*, vol. 2, pp. 270-275, 1951, y por H. W. ELLIS y D. O. SNOW en *Can. Math. Bull.*, vol. 6, pp. 211-229, 1963. Véanse también [7], p. 131, y [28], p. 36.

Apartado 6.5.2. Las referencias al teorema 2.3.1 pueden aplicarse aquí también.

Ejercicio 6. Véase [17], p. 43.

Ejercicio 10, g). Véase [36], vol. I, p. 167.

Capítulo 7

El teorema de Fubini se desarrolla aquí como en [7] y [28]. Para un enfoque diferente, véase [25].

El apartado 7.3.2, *c)* está en *Fundamenta Math.*, vol. 1, p. 145, 1920.

Ejercicio 2. Correspondiendo a la idea de que una integral es un área limitada bajo una curva, la teoría de la integral de Lebesgue puede desarrollarse en términos de medidas de conjuntos de ordenadas. Esto se hace en [16].

Ejercicio 8. La parte *b)*, en forma aún más precisa, fue demostrada por LEBESGUE en *J. Mathématiques*, ser. 6, vol. 1, p. 201, 1905, y parece haber sido olvidada. Es muy notable en vista de otro ejemplo de SIERPINSKI (*Fundamenta Math.*, vol. 1, p. 114, 1920): Existe un conjunto plano E que no es Lebesgue medible y que tiene a lo sumo dos puntos en cada línea recta. Si $f=\chi_E$, entonces f no es Lebesgue medible, si bien todas las secciones f_x y f^y son semicontinuas superiormente; de hecho, cada una de ellas tiene a lo sumo dos puntos de discontinuidad. (Este ejemplo se basa en el axioma de elección, pero no en la hipótesis del continuo.)

Capítulo 8

La demostración del básico teorema 8.1.6 es muy similar a la dada en la primera edición de este libro, pero el teorema es ahora más fuerte, puesto que trata con cocientes $\mu(E)/m(E)$, en donde E recorre sucesiones de conjuntos de Borel arbitrarios, sometidos sólo a la condición de regularidad [8.4]. El tratamiento previo se basaba en una condición de regularidad *uniforme*. Además, se restringía a conjuntos abiertos E. Estos cambios me fueron sugeridos por JIM SERRIN, en 1967. Por supuesto, en la mayoría de las aplicaciones E es un conjunto «favorable» como una bola o un cubo, y habitualmente no se necesita toda la potencia del teorema 8.1.6.

Las demostraciones clásicas del teorema de diferenciación utilizan un lema de recubrimiento bastante difícil debido a VITALI [28], p. 109). En su lugar utilizamos aquí el casi trivial lema 8.1.4, que parece mencionarse por vez primera en un artículo de WIENER sobre el teorema ergódico *(Duke Math. J.*, vol. 5, pp. 1-18, 1939). Nótese que la demostración del lema utiliza una propiedad geométrica de R^k. (El resto de la demostración del teorema 8.1.6 no la utiliza.)

Otros lemas de recubrimiento han sido utilizados recientemente por M. DE GUZMÁN y B. RUBIO *(Am. Math. Monthly,* vol. 79, pp. 341-348, 1972).

En el libro de E. M. STEIN [41] se discuten otros varios aspectos de la teoría de diferenciación.

Apartados 8.1.10, 8.1.11. A. S. BESICOVITCH *(Proc. Cambridge Philos. Soc.*, vol. 41, pp. 103-110, 1945) demostró que si μ es una medida de Borel positiva singular sobre R^k (para cualquier $k > 1$), entonces la derivada simétrica de μ es $+\infty$ en c.t.p. $[\mu]$. (Para obtener este resultado, tómense recíprocos en su teorema 3.) Se utiliza allí otro lema de recubrimiento.

Apartado 8.3.5. Para una demostración elemental de que toda función monótona (y, por tanto, toda $f \in BV$) es diferenciable en c.t.p., véase [24], pp. 5-9. En ese trabajo, se hace de este teorema el punto inicial de la teoría de Lebesgue. Aún más simple es la reciente demostración de D. AUSTIN en *Proc. Am. Math. Soc.*, vol. 16, pp. 220-221, 1965.

Apartado 8.3.7. Véase [16], teoremas 260-264, para situaciones en las que se obtiene la misma conclusión a partir de hipótesis de alguna manera más débiles. Nótese que la demostración del teorema 8.3.7 utiliza la existencia e integrabilidad de sólo la derivada *a la derecha* de f, y la continuidad de f.

Apartado 8.4.5. Véase el artículo de D. E. VARBERG *(Am. Math. Monthly,* vol. 78, pp. 42-45, 1971) para una demostración con hipótesis más débiles.

Ejercicio 12. Una demostración muy sencilla, debida a K. STROMBERG, puede encontrarse en *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 36, p. 308, 1972.

Capítulo 9

Para otra introducción breve, véase [36], cap. XVI. Una demostración diferente del teorema de Plancherel puede verse en [33]. Aspectos de teoría de grupos y conexiones con álgebras de Banach se discuten en [17], [19] y [27]. Un tra-

tamiento más completo sobre subespacios invariantes (apartado 9.3.4) puede verse en [11]; el estado actual del problema correspondiente en L^1 se describe en [27] (Cap. 7).

Capítulo 10

Referencias generales: [1], [4], [13], [20], [29] y [31].

Apartado 10.2.1. Puede definirse también la integración sobre curvas rectificables arbitrarias. Véase [13], vol. I, apéndice C.

Apartado 10.2.3. El concepto topológico de índice se aplica en [29] y se utiliza ampliamente en [1]. La demostración del teorema 10.2.3 es como en [1], página 93.

Apartado 10.3.2. CAUCHY publicó su teorema, en 1825, con la hipótesis adicional de que f' fuera continua. GOURSAT demostró que esta hipótesis es redundante, y enunció el teorema en su forma actual. Véase [13], p. 163, para observaciones históricas adicionales.

Apartado 10.3.5. Las demostraciones clásicas de la representación en serie de potencias y del hecho de que $f \in H(\Omega)$ implica $f' \in H(\Omega)$ se basan en la fórmula integral de Cauchy, como aquí. Recientemente han sido construidas demostraciones que utilizan el número de vueltas pero que no recurren a la integración. Para más detalles, véase [34].

Apartado 10.4.8. Una demostración muy elemental de que el cuerpo complejo es algebraicamente completo está en [26], p. 170.

Apartado 10.5.2. La demostración de la parte *b)* es como en [40].

Apartado 10.5.4. El teorema de la aplicación abierta y el que $Z(f)$ sea discreta son propiedades topológicas de la clase de las funciones holomorfas no constantes que caracteriza esta clase, salvo homeomorfismos. Este es el teorema de Stoilov. Véase [34].

Apartado 10.5.5. Esta demostración sorprendentemente simple y elemental de la versión global del teorema de Cauchy fue descubierta por JOHN D. DIXON, *Proc. Am. Math. Soc.*, vol. 29, pp. 625-626, 1971. En [1] la demostración se basa en la teoría de diferenciales exactas. En la primera edición de este libro se dedujo del teorema de Runge. Es enfoque se utilizó anteriormente en [29], p. 177. Allí, sin embargo, se aplicó sólo en regiones simplemente conexas.

Capítulo 11

Referencias generales: [1], capítulo 5; [20], capítulo 1.

Apartado 11.2.3. En realidad, existen límites en c.t.p. de la circunferencia «no tangenciales». Véase [15], pp. 34-37, y [36], vol. I, pp. 96-106, especialmente el teorema 7.6.

Apartado 11.3.3. El principio de reflexión fue utilizado por H. A. SCHWARZ para resolver problemas referentes a transformaciones conformes de regiones poligonales. Véase la sección 17.6 de [13]. Resultados adicionales en esta direc-

ción fueron obtenidos por CARATHÉODORY; véase [4], vol. II, pp. 88-92, y *Commentarii Mathematici Helvetici,* vol. 19, pp. 263-278, 1946-1947.

Apartado 11.4.2. Este se debe a HERGLOTZ, *Leipziger Berichte,* vol. 63, pp. 501-511, 1911.

Apartado 11.4.4. Véase la tesis de FATOU, *Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta Math.,* vol. 30, pp. 335-400, 1906. Este es el primero y principal trabajo en el que se aplica la teoría de Lebesgue de la integración a problemas referentes a funciones holomorfas.

Capítulo 12

Apartado 12.3.1. Para ejemplos adicionales, véase [31], pp. 176-186.

Apartado 12.4.2. Este teorema se demostró primero para series trigonométricas por W. H. YOUNG (1912; $q=2, 4, 6, \ldots$) y F. HAUSDORFF (1923; $2 \leqslant q \leqslant \infty$). F. RIESZ (1923) lo extendió a conjuntos ortonormales uniformemente acotados, M. RIESZ (1926) obtuvo esta extensión de un teorema general de interpolación, y G. O. THORIN (1939) descubrió la demostración del teorema de M. Riesz utilizando técnicas de variable compleja. La demostración del texto es la adaptación de Calderón-Zygmund (1950) de la idea de THORIN. Referencias completas y discusiones sobre otros teoremas de interpolación pueden encontrarse en el capítulo XII de [36].

Apartado 12.5.1. En una forma ligeramente diferente, está en *Duke Math. J.,* vol. 20, pp. 449-458, 1953.

Apartado 12.5.2. Esta demostración es esencialmente la de R. KAUFMAN *(Math. Ann.,* vol. 169, p. 282, 1963). E. L. STOUT *(Math. Ann.,* vol. 177, pp. 339-340, 1968) obtuvo un resultado más fuerte.

Capítulo 13

Apartado 13.2.4. El teorema de Runge fue publicado en *Acta Math.,* vol. 6, 1885. (Incidentalmente, este es el mismo año en el que fue publicado el teorema de Weierstrass sobre aproximación uniforme por polinomios en un intervalo; véase *Mathematische Werke,* vol. 3, pp. 1-37.) Véase [29], pp. 171-177, para una demostración parecida a la original. La demostración del texto en términos de análisis funcional es conocida por muchos analistas y ha sido probablemente descubierta independientemente varias veces en los últimos años. Me fue comunicada por L. A. RUBEL. En [13], vol. II, pp. 299-308, se presta atención a la proximidad de la aproximación si el grado del polinomio es fijo.

Ejercicios 5 y 6. Para todavía otro método, véase D. G. CANTOR, *Proc. Am. Math. Soc.,* vol. 15, pp. 335-336, 1964.

Capítulo 14

Referencia general: [20]. Muchas funciones especiales de transformación se describen allí con gran detalle.

Apartado 14.2.1. Pueden obtenerse más detalles sobre transformaciones bilineales en [1], pp. 22-35; en [13], pp. 46-57; en [4], y especialmente en el capí-

tulo 1 del libro de L. R. FORD *Automorphic Functions,* McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1929.

Apartado 14.3.1. Las familias normales fueron introducidas por MONTEL. Véase capítulo 15 de [13].

Apartado 14.4.2. La historia del teorema de Riemann se discute en [13], pp. 320-321, y en [29], p. 230. La demostración de Koebe (ejercicio 26) está en el *J. für Math.,* vol. 145, pp. 177-223, 1915; también se consideran allí regiones doblemente conexas.

Apartado 14.5.1. La conjetura aún no demostrada de Bieberbach es que $|a_n| \leqslant n$ para todo n si $f \in \mathcal{S}$. Véase [13], pp. 346-358.

Apartado 14.6.3. Este razonamiento aparece en [20], p. 179.

Apartado 14.6.4. El comportamiento en la frontera de las transformaciones conformes fue investigado por CARATHÉODORY en *Math. Ann.,* vol. 73, pp. 323-370, 1913. El teorema 14.6.4 fue demostrado allí para regiones acotadas por curvas de Jordan, y se introdujo la noción de extremos primos. Véase también [4], vol. II, pp. 88-107.

Ejercicio 24. Esta demostración se debe a Y. N. MOSCHOVAKIS.

Capítulo 15

Apartado 15.2.3. La relación entre productos canónicos y funciones enteras de orden finito se discute en el capítulo 2 de [3], cap. VII de [29], y capítulo VIII de [31].

Apartado 15.6.1. Véase SZASZ, *Math. Ann.,* vol. 77, pp. 482-496, 1916, para resultados adicionales en esta dirección. También el capítulo II de [21].

Capítulo 16

El trabajo clásico sobre las superficies de Riemann es [32]. (La primera edición apareció en 1913.) Otras referencias: Capítulo VI de [1], capítulo 10 de [13], capítulo VI de [29], y [30].

Apartado 16.1.5. El teorema de Ostrowski está en *J. London Math. Soc.,* vol. 1, pp. 251-263, 1926. Véase J. P. KAHANE, *Lacunary Taylor and Fourier Series, Bull. Am. Math. Soc.,* vol. 70, pp. 199-213, 1964, para una información actual de este tipo de series.

Apartado 16.3.2. El enfoque del teorema de monodromía era algo más simple en la primera edición de este libro. Utilizaba el hecho de que toda región plana simplemente conexa es homeomorfa a una convexa, U. La demostración actual se ha dispuesto de tal manera que puede aplicarse sin ningún cambio a las funciones holomorfas de varias variables complejas. (Nótese que cuando $k > 2$ existen conjuntos abiertos simplemente conexos en R^k que no son homeomorfos a ningún conjunto conexo; ejemplos de esto lo proporcionan las conchas esféricas.)

Apartado 16.4.1. Capítulo 13 de [13], capítulo VIII de [29], y parte 7 de [4].

Apartado 16.5.1. El teorema grande de Picard se demuestra con la ayuda de funciones modulares en la parte 7 de [4]. Demostraciones «elementales» pueden encontrarse en [31], pp. 277-284, y en el capítulo VII de [29].

Ejercicio 10. Se discuten varias clases de conjuntos evitables en el trabajo de AHLFORS y BEURLING, *Conformal Invariants and Function-theoretic Null-Sets, Acta Math.*, vol. 83, pp. 101-129, 1950.

Capítulo 17

La mejor referencia general es [15]. Véase también [36], captulo VII. Si bien [15] trata principalmente del disco unidad, la mayor parte de las demostraciones se construyen de tal manera que pueden aplicarse a situaciones más generales que se describen allí. Algunas de estas generalizaciones se presentan en el capítulo 8 de [27].

Apartado 17.1.1. Véase [22] para un tratamiento completo de las funciones subarmónicas.

Apartado 17.4.1. Para una demostración diferente, véase [15], o el artículo de HELSON y LOWDENSLAGER en *Acta Math.*, vol. 99, pp. 165-202, 1958.

Apartado 17.5.1. Los términos «función interior» y «función exterior» fueron introducidos por BEURLING en el artículo en el que demostró el teorema 17.6.2: *On Two Problems Concerning Linear Transformations in Hilbert Space, Acta Math.*, vol. 81, pp. 239-255, 1949. Para desarrollos adicionales, véase [11].

Apartados 17.7.2, 17.7.3. Esta demostración del teorema de M. Riesz se debe a A. P. CALDERÓN. Véase *Proc. Am. Math. Soc.*, vol. 1, pp. 533-535, 1950. Véase también [36], vol. I, pp. 252-262.

Ejercicio 3. Este constituye la base de una definición de los espacios H^p en otras regiones. Véase *Trans. Am. Math. Soc.*, vol. 78, pp. 46-66, 1955.

Capítulo 18

Referencias generales: [17], [19] y [23]; también [14]. La teoría fue originada por GELFAND, en 1941.

Apartado 18.4.1. Se demostró en forma elemental por P. J. COHEN en *Proc. Am. Math. Soc.*, vol. 12, pp. 159-163, 1961.

Apartado 18.4.3. Este teorema es de WERMER, *Proc. Am. Math. Soc.*, vol. 4, pp. 866-869, 1953. La demostración del texto se debe a HOFFMAN y SINGER. Véase [15], pp. 93-94, donde también se da una demostración de P. J. COHEN extremadamente corta. (Véase la referencia al apartado 18.4.1.)

Apartado 18.4.4. Este fue uno de los principales pasos en la demostración original de Wiener de su teorema tauberiano. Véase [33], p. 91. La fácil demostración dada en el texto fue el primer éxito espectacular de la teoría de Gelfand.

Ejercicio 14. El conjunto Δ puede dotarse de una topología de Hausdorff compacta con respecto a la cual la función $\hat{x}$ es continua. Por tanto, $x \to \hat{x}$

es un homeomorfismo de A en $C(\Delta)$. Esta representación de A como una álgebra de funciones continuas es un instrumento de la mayor importancia en el estudio de las álgebras de Banach conmutativas.

Capítulo 19

Apartados 19.2.1, 19.2.2. [21], pp. 1-13. Véase también [3], en donde el tema principal son las funciones de tipo exponencial.

Apartado 19.3.1. Para una introducción más detallada a las clases $C\{M_n\}$, véase S. MANDELBROJT, *Séries de Fourier et classes quasi-analytiques,* Gauthier-Villars, París, 1935.

Apartado 19.4.1. En [21], la demostración de este teorema se basa en el teorema 19.2.2 más que en el 19.2.2.

Ejercicio 4. La función Φ se llama la transformada de Borel de f. Véase [3], capítulo 5.

Ejercicio 12. La demostración sugerida se debe a H. MIRKIL, *Proc. Am. Math. Soc.,* vol. 7, pp. 650-652, 1956. El teorema fue demostrado por BOREL en 1895.

Capítulo 20

Véase S. N. MERGELYAN, *Uniform Approximations to Functions of a Complex Variable, Uspehi Mat. Nauk* (N. S.) 7, núm. 2 (48), 31-122, 1952; *Amer. Math. Soc. Translation* núm. 101, 1954. Nuestro teorema 20.3.1 es el teorema 1.4 en el trabajo de MERGELYAN.

Una demostración por métodos de análisis funcional, basada en consideraciones de teoría de la medida, ha sido publicada recientemente por L. CARLESON en *Math. Scandinavica,* vol. 15, pp. 167-175, 1964.

Apéndice

El teorema de maximalidad fue enunciado en primer lugar por HAUSDORFF en la página 140 de su libro *Grundzüge der Mengenlehre,* 1914. La demostración del texto se adapta a la de la sección 16 del libro de HALMOS [8]. La idea de escoger g de modo que $g(A)-A$ tenga a lo sumo un elemento aparece allí, así como el término «torre». La demostración es semejante a una de las demostraciones de ZERMELO del teorema de buena ordenación; véase *Math. Ann.,* vol. 65, pp. 107-128, 1908.

BIBLIOGRAFIA GENERAL

1 AHLFORS, L. V.: *Complex Analysis,* McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1966 [2]. Trad. española de la primera edición: *Análisis de Variable Compleja,* Ed. Aguilar, Madrid, 1966.

2 BANACH, S.: *Théorie des Opérations linéaires,* Monografje Matematyczne, vol. 1, Varsovia, 1932.

3 BOAS, R. P.: *Entire Functions,* Academic Press Inc,, Nueva York, 1954.

4 CARATHÉODORY, C.: *Theory of Functions of a Complex Variable,* Chelsea Publishing Company, Nueva York, 1954.

5 DUNFORD, N., y SCHWARTZ, J. T.: *Linear Operators,* Interscience Publishers, Inc., Nueva York, 1958.

6 HALMOS, P. R.: *Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity,* Chelsea Publishing Company, Nueva York, 1951.

7 HALMOS, P. R.: *Measure Theory,* D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1950.

8 HALMOS, P. R.: *Naive Set Theory,* D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1960.

9 HARDY, G. H., LITTLEWOOD, J. E., y PÓLYA, G.: *Inequalities,* Cambridge University Press, Nueva York, 1934.

10 HARDY, G. H., y ROGOSINSKI, W. W.: *Fourier Series,* Cambridge Tracts núm. 38, Cambridge, Londres y Nueva York, 1950.

11 HELSON, H.: *Lectures on Invariant Subespaces,* Academic Press Inc., Nueva York, 1964.

12 HEWITT, E., y ROSS, K. A.: *Abstract Harmonic Analysis,* Springer-Verlag OHG, Berlín, 1963.

13 HILLE, E.: *Analytic Function Theory,* Ginn and Company, Boston, vol. I, 1959; vol. II, 1962.

14 HILLE, E., y PHILLIPS, R. S.: *Functional Analysis and Semigroups,* Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. 31, Providence, 1597. Reimpresión, 1974.

15 HOFFMAN, K.: *Banach Spaces of Analytic Functions,* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1962.

16 KESTELMAN, H.: *Modern Theories of Integration,* Oxford University Press, Nueva York, 1937.

17 LOOMIS, L. H.: *An Introduction to Abstract Harmonic Analysis,* D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1953.

18 MCSHANE, E. J.: *Integration,* Princeton University Press, Princeton, N. J., 1944.

19 NAIMARK, M. A.: *Normed Rings,* Erven P. Noordhoff, NV, Groningen, Netherlands, 1959.

20 NEHARI, Z.: *Conformal Mapping,* McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1952.

21 PALEY, R. E. A. C., y WIENER, N.: *Fourier Transforms in the Complex Domain,* Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. 19, Nueva York, 1934.

22 RADO, T.: «Subharmonic Functions», *Ergeb. Math.,* vol. 5, núm. 1, Berlín, 1937.

23 RICKART, C. E.: *General Theory of Banach Algebras,* D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J. 1960.

24 RIESZ, F., y SZ.-NAGY, B.: *Leçons d'Analyse Fonctionnelle,* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952.
25 ROYDEN, H. L.: *Real Analysis,* The Macmillan Company, Nueva York, 1963.
26 RUDIN, W.: *Principles of Mathematical Analysis,* McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1964 [2]. Trad. española: *Principios de Análisis Matemático,* Ed. del Castillo, Madrid, 1966.
27 RUDIN, W.: *Fourier Analysis on Groups,* Interscience Publishers, Inc., Nueva York, 1962.
28 SAKS, S.: *Theory of the Integral,* Monografje Matematyczne, vol. 7, Varsovia, 1937 [2]. Reimpresión por Hafner Publishing Company, Inc., Nueva York.
29 SAHS, S., y ZYGMUND, A.: *Analytic Functions,* Monografje Matematyczne, vol, 28, Varsovia, 1952.
30 SPRINGER, G.: *Introduction to Riemann Surfaces,* Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1957.
31 TITCHMARSH, E. C.: *The Theory of Functions,* Oxford University Press, Fair Lawn, N. J., 1939 [2].
32 WEYL, H.: *The Concept of a Riemann Surface,* Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1964 [3].
33 WIENER, N.: *The Fourier Integral and Certain of Its Applications,* Cambridge University Press, Nueva York, 1933. Reimpresión por Dover Publications, Inc., Nueva York.
34 WHYBURN, G. T.: *Topological Analysis,* Princeton University Press, Princeton, N. J., 1964 [2].
35 WILLIAMSON, J. H.: *Lebesgue Integration,* Holt, Rinehart and Winston, Inc., Nueva York, 1962. Trad. española: *Integración de Lebesgue,* Ed. Tecnos, 1973.
36 ZYGMUND, A.: *Trigonometric Series,* Cambridge University Pres, Nueva York, 1959 [2].

Referencias adicionales

37 HAWKINS, T.: *Lebesgue's Theory of Integration,* University of Wisconsin Press, Madison, 1970.
38 HEWITT, E., y STROMBERG, K.: *Real and Abstract Analysis,* Springer Verlag, Nueva York, 1965.
39 KATNELSON, Y.: *An Introduction to Harmonic Analysis,* John Wiley and Sons, Inc., Nueva York, 1968.
40 NARASIMHAN, R.: *Several Complex Variables,* University of Chicago Press, Chicago, 1971.
41 STEIN, E. M.: *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions,* Princeton University Press, Princeton, 1970.
42 STEIN, E. M., y WEISS, G.: *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces,* Princeton University Press, Princeton, 1971.

LISTA DE SIMBOLOS ESPECIALES *

$\exp(z)$	XI
τ	4
$\mathcal{M}$	4
χ_E	7
lím sup	9
lím inf	9
f^+, f^-	10
$L^1(\mu)$	19
a.e.	22
$\bar{E}$	30
$C_c(X)$	32
$K \prec f \prec V$	33
$\mathcal{M}_F$	36
m, m_k	44
$L^1(R^k), L^1(E)$	46
$\|f\|_p, \|f\|_\infty$	57
$L^p(\mu),\ L^p(R^k),\ \ell^p$	57
$L^\infty(\mu),\ L^\infty(R^k),\ \ell^\infty$	57
$C_0(X),\ C(X)$	62
(x, y)	68
$\|x\|$	70
$x \perp y,\ M^\perp$	71
$\hat{x}(\alpha)$	74
T	80
$L^p(T),\ C(T)$	80
Z	81
$\hat{f}(n)$	83
c_0	95
$\|f\|_E$	100
U	101
$P_r(\theta - t)$	103
$\|\mu\|(E)$	109
$\mu^+,\ \mu^-$	111
$\lambda \ll \mu$	112
$\lambda_1 \perp \lambda_2$	112
$A \Delta B$	125
$E_x,\ E^y$	127
$f_x,\ f^y$	129
$\mu \times \lambda$	131
$f * g$	137
$\mu * \lambda$	139
$D\mu$	142
$\mathfrak{D}^Q,\ \mathfrak{D}_Q$	147
$T_f,\ V(f)$	149
$BV,\ NBV$	149
$f(x-),\ f(x+)$	149
$T'(x)$	158
$\Delta(A)$	158
$\hat{f}(t)$	167
C^∞	182
C_c^∞	182
$D(a; r),\ D'(a; r),\ \bar{D}(a; r)$	185
Ω	186
$H(\Omega)$	186
γ, γ^*	189
$\partial\Delta$	191
$\mathrm{Ind}_\gamma(z)$	192
$Z(f)$	197
$\dot{+}$	205
$I^2 = I \times I$	209
$\partial, \bar{\partial}$	219
Δ	220
$P[f]$	222
$P[d\mu]$	222
$\Pi^+,\ \Pi^-$	227
$f^*(e^{it})$	231
H^∞	231
$\varphi_\alpha(z)$	237
S^2	248
$\mathcal{S}$	266
$E_p(z)$	283
$\log^+ t$	292
N	292
$(f_0, D_0) \sim (f_1, D_1)$	305
$M_p(f; r)$	319
H^p	319
$M_f,\ Q_f$	326
$C\{M_n\}$	359
$P(K)$	368
$C_c'(R^2)$	370

* Los símbolos usuales de teoría de conjuntos se detallan en las páginas 2 y 3.

INDICE DE MATERIAS

Acotaciones de Cauchy, 201.
Adherencia, 30.
Aditividad finita, 11.
— numerable, 1, 11, 108.
Ahlfors, L. V., 384.
Algebra de Banach, 139, 178, 338.
— cociente, 344.
— compleja, 338.
— conmutativa, 339.
— de conjuntos, 4.
— de medidas, 139.
— normadas, 338.
Análisis funcional, 100.
Anillo, 218, 246, 272, 276.
Anulación en el infinito, 62.
Aplicación, 3 (véase también *Función*).
— abierta, 90, 160, 202.
— continua, 4.
— inversa, 3, 203.
— de Koebe, 277.
— uno a uno, 3.
Area, 233.
— Teorema del, 267.
Arens, R., 380.
Argumento, 192.
Armónica conjugada, 275, 333.
Austin, D., 381.
Axioma de elección, 377.
— de separación de Hausdorff, 31.

Baire. Teorema de, 89.
Banach, S., 96.
— Algebra de, 139, 178, 338.
— Espacio de, 87, 319.
Banach-Steinhaus. Teorema de, 90, 93, 342.
Base ortonormal, 78.
Besicovitch, A. S., 381.
Bessel. Desigualdad de, 76, 242.
Beurling, A., 330.
— Teorema de, 330.
Bieberbach. Conjetura de, 384.
Blaschke. Producto de, 291, 298, 299, 320, 336.
Bledsoe, W. W., 380.
Bola, 4.
— abierta, 4.
— unidad, 88.
Borel, E., 1, 386.
— Conjunto de, 7.
— Función de, 7, 140.
— Medida de, 41.
— Transformada de, 386.

Cadena, 205, 305, 376.
Caja, 44.
Calderón, A. P., 383, 385.
Cambio de variables, 162.
Camino(s), 189.
— cerrado, 189.
— equivalentes, 189.
— opuesto, 190.
Cantor, D. G., 383.
Carácter, 167.
Carathéodory, C., 379, 382, 383, 384.
Carleson, L., 386.
Casi en todo punto, 22.
Cauchy. A., 381.
— Acotaciones, 201.
— Ecuaciones de, 219, 245.
— Fórmula de, 195, 206, 218, 231, 250, 321, 366, 370.
— Sucesión, 59.
— Teorema de, 193, 195, 206, 289, 355, 358.
Celda, 44.
Ciclo, 205.
Circunferencia orientada positivamente, 190.
— unidad, X.
Clase(s), 2.
— casi-analítica, 360.
— de equivalencia, 58.
— monótona, 127.
Coeficientes de Fourier, 74, 83.
— — de una medida, 124.
Cohen, P. J., 385, 386.
Colección, 2.
— equilibrada, 250.
Combinación lineal, 73.
Compleción de un espacio de medida, 23, 134.
— — métrico, 61, 66.
Complementario, 3.
Componente, 185.
Concentrada (medida), 111.
Condición de Lipschitz, 105.
Conjetura de Bieberbach, 384.
Conjunto(s) abierto, 3.
— de Borel, 7.
— de Cantor, 156.

Conjunto(s) cero, 197, 290, 292.
— cerrado, 7, 30.
— compacto, 30.
— conexo, 185.
— convexo, 71.
— denso, 50.
— disjuntos, 2.
— elemental, 127.
— estrictamente convexo, 104.
— evitable, 315.
— $F\sigma$, 7.
— $G\delta$, 7.
— independiente, 73.
— de Lebesgue, 146.
— medible, 4, 46.
— — de Lebesgue, 46.
— no medible, 46, 133, 380.
— ordenado linealmente, 77.
— ortonormal, 73.
— — maximal, 77.
— parcialmente ordenado, 77.
— perfecto, 164.
— regular exterior, 41.
— — interior, 41.
— σ-compacto, 41.
— totalmente inconexo, 50.
— — ordenado, 77.
Conservación de ángulos, 259.
Continuidad, 3, 5.
— absoluta, 111, 116, 148, 324.
— de funciones, 152.
— uniforme, 45, 166.
Convergencia absoluta, 108.
— casi uniforme, 201.
— débil, 230, 235.
— dominada, 21.
— en L^p, 59.
— en medida, 65.
— monótona, 16.
— uniforme, 10, 201.
— — en subconjuntos compactos, 201.
Convolución, 135, 138, 179.
Coordenadas polares, 139.
Coseno, X, 247.
Criterio de la raíz, 186.
Cubo de Hilbert, 85.
Cuerpo, 344.
— algebraicamente cerrado, 200.
— complejo, 200, 341.
Curva, 189.
— cerrada, 189.
— con incrementos ortogonales, 86.
— homotópica a cero, 209.
— de Jordan, 272.

Daniell, P. J., 379.
Denjoy, A., 155.
Denjoy-Carleman. Teorema de, 361.
Densidad, 165.
— métrica, 165.
Derivada, 141, 143, 186.
— cúbica, 147.
— a la derecha, 381.
— de función de variación acotada, 154.
— de integral, 146, 153.
— de medida, 143, 144.
— parcial, 219.
— de Radon-Nikodym, 113, 144.
— simétrica, 144, 225.
— de una transformación, 158.
— — de Fourier, 168.
Descomposición de Hahn, 117.
— de Jordan, 111, 118, 328.
— de Lebesgue, 113, 144.
Desigualdad de Bessel, 76, 242.
— de Euclides, 68.
— de Hardy, 64.
— de Hölder, 56, 58.
— de Jensen, 54, 289.
— de Minkowski, 55, 58.
— multiplicativa, 338.
— de Schwarz, 43, 69.
— triangular, 4, 43, 69, 89.
Determinante, 163.
Dieudonné, J., 379.
Diferencia simétrica, 125.
Diferencial, 157, 340.
Disco, 4, 185.
— reducido, 185.
— unidad, 101.
Dixon, J. D., 382.
Dominio, 3.

Eberlein, W. F., 51.
Ecuaciones de Cauchy-Riemann, 219, 245.
— de Laplace, 220.
Edwards, R. E., 379.
Egoroff. Teorema de, 65.
Elemento de función, 304.
— invertible, 339.
Elipse, 267.
Ellis, H. W., 380.
Engendrado, 73.
Entorno, 4, 30.
Equivalencia conforme, 264.
Escalar, 28.
Esfera de Riemann, 248.
Espacio de Banach, 87, 319.
— cociente, 344.
— compacto, 30.
— dual, 100, 105, 118, 121, 235.
— euclídeo, 29, 43.
— de Hausdorff, 31.
— de Hilbert, 69, 320.
— — Isomorfismo, 77, 84, 174, 329.
— invariante por traslación, 177, 351.
— localmente compacto, 30.
— medible, 4.
— de medida, 11.
— métrico, 4.
— — completo, 59.
— nulo, 344.
— con producto interior, 68.
— separable, 84.
— topológico, 3.
— unitario, 68.

Espacio vectorial, 28.
— — complejo, 28.
Espectro, 339.
Euclides. Desigualdad de, 68.
Euler. Identidad de, X.
Exponentes conjugados, 55.
Extensión, 96.
— que preserva la norma, 98.

Factor elemental, 283.
— exterior, 326.
— interior, 326.
Factorización, 284, 323, 325.
Familia, 2.
— equicontinua, 263.
— normal, 262.
— uniparamétrica, 306.
Fatou, P., 383.
— Lema de, 18, 60, 290, 326, 327.
— Teorema de, 232.
Fejér. Teorema de, 83.
Ford, L. R., 383.
Fórmula de adición, IX.
— de Cauchy, 195, 206, 218, 231, 250, 321, 366, 370.
— de inversión, 170.
— de Jensen, 288.
— de sumación de Poisson, 183.
— de Taylor, 360.
Fourier. Coeficientes de, 74, 83.
— Series de, 83, 218.
— Suma parcial de una serie de, 83, 92, 107, 337.
— Transformada de, 168, 184, 353.
Fracciones parciales, 249.
Frontera, 100, 219, 236.
— natural, 301, 303, 311.
Fubini. Teorema de, 131, 135, 380.
Función, 3.
— absolutamente continua, 152.
— acotada, 11, 57.
— analítica, 186.
— armónica, 220.
— de Borel, 7.
— característica, 7.
— continua, 4.
— — a la izquierda, 149, 166.
— compuesta, 3.
— conjugada, 332.
— convexa, 53.
— no diferenciable, 106.
— distancia, 4.
— de elección, 377.
— entera, 186, 290, 356, 383.
— esencialmente acotada, 57.
— exponencial, IX, 186.
— exterior, 325, 384.
— extremal, 238, 335.
— holomorfa, 185.
— integrable Lebesgue, 19, 46, 61.
— interior, 325, 330, 385.
— localmente integrable, 183, 234.
— medible, 4, 23, 140.
— meromorfa, 211, 254, 286.
— modular, 310.
— monótona, 164.
— normalizada, 149.
— periódica, X, 79, 166, 218.
— racional, 249, 274, 375.
— semicontinua inferiormente, 32.
— — superiormente, 32.
— simple, 10, 60.
— singular, 153, 156.
— subarmónica, 317.
— sumable, 19.
— de tipo exponencial, 354, 386.
— de variación acotada, 149.
Funcional acotado, 88.
— sobre C_0, 121.
— continuo, 89.
— sobre un espacio de Hilbert, 73.
— sobre L^p, 118.
— lineal, 29.
— — acotado, 89, 105, 108, 109.
— — complejo, 96.
— — continuo, 73, 88, 105, 118, 121.
— — real, 96.
— — multiplicativo, 179, 345.
— — positivo, 29, 35, 101.
— — real, 96.

Gelfand, I., 385.
— Transformada de, 351.
Gelfand-Mazur. Teorema de, 341.
Goursat, E., 381.
Gráfico, 106, 138.
Green. Teorema de, 370.
Grupo modular, 309.
Guzmán, M. de, 381.

Hadamard, J., 246, 302.
Hahn. Descomposición de, 117.
Hahn-Banach. Teorema de, 96, 100, 252, 294, 341, 342, 348.
Halmos, P. R., 379, 386.
Hall, D., 379.
Hardy, G. H., 317.
— Desigualdad, 64.
— Teorema de, 226.
Hausdorff, F., 7, 383.
— Axioma de separación de, 31.
— Espacio de, 31.
— Teorema de maximalidad de, 79, 98, 166, 344, 376.
Hausdorff-Young. Teorema de, 242.
Heine-Borel. Teorema de, 30.
Helson, H., 331, 385.
Herglotz, G., 382.
Hilbert. Cubo de, 85.
— Espacio de, 69, 320.
Hipótesis del continuo, 134.
Hoffman, K., 386.
Hölder. Desigualdad de, 55, 58.
Homeomorfismo, 255.

Homomorfismo, 168, 179, 344, 351, 385.
— complejo, 179, 345.
Homotopía, 209.

Ideal, 139, 287, 343, 351.
— maximal, 344, 345.
Identidad de Euler, X.
— de Parseval, 77, 84, 176, 200, 322.
Imagen, 3.
— inversa, 3.
Independencia lineal, 73.
Indice de un camino, 191.
— de un ciclo, 206.
— de una curva, 211, 218.
Infimo, 3.
Integrabilidad uniforme, 125.
Integración, 14.
— sobre un camino, 189.
— sobre un ciclo, 205.
— sobre un conjunto medible, 15.
— de una derivada, 154, 156.
— por partes, 165, 224, 234.
— con respecto a una medida compleja, 122.
Integral, 14, 19, 121, 189, 205.
— doble, 131.
— indefinida, 146.
— iterada, 131, 133.
— de Poisson, 102, 220, 223, 226, 232, 321.
— de Riemann, 1, 29, 46.
Interior, 249.
Interpolación, 242, 286.
Intersección, 2.
Intervalo, 3.
— orientado, 190.
— del parámetro, 189.
Invariancia por traslación, 45.
— por rotación, 165.
Inversión, 260.
Isometría, 77, 174, 349, 351.
Isomorfismo, 77, 174, 349, 351.

Jacobiano, 162, 233.
Jensen. Desigualdad de, 54, 289.
— Fórmula de, 288.
Jordan, C., 1.
— Curva de, 272.
— Descomposición de, 111, 118, 328.

Kahane, J. P., 384.
Kaufman, R. P., 380, 383.
Kirk, R. B., 379.
Koebe. Aplicación de, 277.

Laplace. Ecuación de, 220.
Laplaciano, 184, 220.
Laurent. Serie de, 218.
Lebesgue, H. J., 1, 16, 153, 378, 380.
— Conjunto de, 146.
— Descomposición de, 113, 144.
— Función integrable, 19, 46, 61.
— Medida de, 46.
Lema. Derivada cúbica, 147.
— de Fatou, 18, 60, 290, 326, 327.
— de recubrimiento, 143, 381.
— de Riemann-Lebesgue, 95.
— de Urysohn, 33, 378.
— de Zorn, 79.
Límite a la derecha, 149.
— de funciones medibles, 9.
— inferior, 9.
— a la izquierda, 149.
— en media, 59.
— en medida, 65.
— puntual, 9.
— radial, 225, 229, 232, 293, 321, 323, 328.
— superior, 9.
Lipschitz. Condición de, 105.
Logaritmo, 215, 256.
Longitud, 165, 190, 215.
Lowdenslager, D., 331, 385.
Lusin. Teorema de, 47.

Mandelbrojt, S., 386.
Masa unidad, 12.
Mayorante armónica, 335.
Media aritmética, 55, 83, 85.
— geométrica, 55.
Medida, 11.
— absolutamente continua, 111, 324.
— — de Borel, 41.
— — regular, 41.
— compleja, 11, 121.
— completa, 23.
— continua, 139.
— discreta, 12, 139.
— exterior, 379.
— invariante por traslación, 45.
— de Lebesgue, 46.
— positiva, 11.
— producto, 129.
— real, 11.
— regular, 41, 121.
— representante, 101, 380.
— — finita, 41.
— σ-finita, 41, 115, 129, 131.
— signada, 111.
— singular, 111, 112, 325, 332.
Mergelyan. Teorema de, 371, 386.
Método de Phragmen-Lindelof, 239.
— de sumabilidad, 106.
Minkowski. Desigualdad de, 55, 58.
Mirkil, H., 386.
Mittag-Leffer. Teorema de, 254, 287.
Monotonicidad, 11, 36.
Morera. Teorema de, 196.
Moschovakis, Y. N., 384.
Multiplicidad de un cero, 200, 282.
Müntz-Szasz. Teorema de, 294, 299.

Neumann, J. von, 113, 379, 380.
Nevanlinna, R., 292.
Norma, 57, 69, 87, 158, 319.
— cociente, 344.

Norma espectral, 341.
— euclídea, 158.
— del supremo, 62.
Normal. Familia, 262.
Novinger, W. P., 379.
Núcleo, 344.
— de Poisson, 103, 220.
Número trascendente, 136.
— de vueltas, 192.

Operador de desplazamiento, 329.
— invertible, 159.
— de multiplicación, 107, 185, 329, 350.
— no singular, 158.
Orbita, 298.
Orden de un cero, 197.
— de una función entera, 296.
— de un polo, 198.
Ordinal, 52.
Ortogonalidad, 30, 71.
Ostrowski, A., 302.

π, XI.
Paley-Wiener. Teoremas de, 355, 356.
Parseval. Identidad de, 77, 84, 176, 200, 322.
Parte negativa, 10.
— positiva, 10.
— principal, 198.
Partición de un conjunto, 108, 124.
— de la unidad, 33.
Perron, O., 155.
Phragmen-Lindelöf. Método de, 239.
Picard. Teorema de, 313, 384.
Plancherel. Transformada de, 174.
— Teorema de, 174.
Poisson. Fórmula de sumación de, 183.
— Integral de, 102, 220, 223, 226, 232, 321.
— Núcleo de, 103, 220.
Polinomio, 102, 200.
— trigonométrico, 80.
Polo, 198.
Preimagen, 3.
Primera categoría, 90.
Principio de acotación uniforme, 90.
— de reflexión, 227.
— — de Schwarz, 227.
Problema de Dirichlet, 223.
Proceso diagonal, 230, 263.
Producto de Blaschke, 291, 298, 299, 320, 336.
— canónico, 284, 383.
— cartesiano, 2, 127.
— escalar, 68.
— infinito, 281.
— interior, 68.
— parcial, 281.
Prolongación analítica, 305, 358, 361.
— directa, 304.
Promedio, 25, 146.
Propiedad asociativa, 178.
— de cancelación, 14.
— conmutativa, 14, 28.
— distributiva, 14, 28, 178.
— del paralelogramo, 71.
— del valor medio, 227, 234.
Proyección, 72, 177, 331, 337.
— ortogonal, 72, 177, 331.
Punto de densidad, 165.
— extremo, 234.
— fijo, 217, 275, 278.
— final, 189.
— frontera simple, 269.
— inicial, 189.
— regular, 301.
— singular, 301.

Radical, 351.
Radio de convergencia, 186.
— espectral, 341.
Radon-Nikodyn. Derivada de, 113, 144.
Raíz cuadrada, 256, 305.
Recorrido, 3.
— esencial, 66, 350.
Recta real, 3.
— — extendida, 3, 5.
Rectángulo, 127.
Recubrimiento, 30, 305.
— abierto, 30.
Región, 185.
Regla de la cadena, 186.
Relaciones de ortogonalidad, 73.
Representable mediante serie de potencias, 187.
Representación polar de una medida, 116.
Residuo, 211.
Resolvente, 351.
Restricción, 100.
Rickert, N. W., 380.
Riemann. Esfera de, 248.
— Integral de, 1, 29, 46.
Riemann-Lebesgue. Lema de, 95.
Riesz, M., 30, 317, 324, 333, 379, 383.
— Teorema de representación de, 30, 35, 121, 231, 252, 379.
Riesz-Fischer. Teorema de, 77, 83, 84, 322.
Rotación, 260.
Rouché. Teorema de, 213.
Rubel, L. A., 383.
Rubio, B., 381.
Runge. Teorema de, 251, 253, 383.

Saks, S., 378.
σ-álgebra, 4.
σ-anillo, 378.
Schwartz, J. T., 380.
Schwarz, H. A., 382.
— Desigualdad de, 43, 69.
— Principio de reflexión de, 227.
Sección, 127.
Segmento, 3.
Segunda categoría, 90.

Semiplano inferior, 227.
— superior, 227.
Serie(s) de Fourier, 83, 218.
— — absolutamente convergentes, 349.
— lacunares, 258, 302, 337, 367, 384.
— de Laurent, 218.
— de potencias, 186, 197.
Serrin, J., 381.
Simplemente conexo, 210, 255, 264, 308.
Seno, 247.
Sierpinski, W., 134, 380.
Singer, I. M., 380, 386.
Singularidad aislada, 198.
— esencial, 198, 312.
— evitable, 198.
Sistema trigonométrico, 81.
Snow, D. O., 380.
Sobreconvergencia, 302.
Soporte, 32, 51.
Stein, E. M., 381.
Stoilov. Teorema de, 382.
Stout, E. L., 383.
Stromberg, K., 381.
Subaditividad, 379.
Subálgebra maximal, 347.
Subcadena, 376.
Subconjunto, 2.
— propio, 2.
Subespacio, 71.
— cerrado, 71.
— invariante, 177, 329.
Sucesión de Cauchy, 59.
— convexa, 359.
Suma de caminos, 205.
— parcial de una serie de Fourier, 83, 92, 107, 337.
Supremo, 3.
— esencial, 57.
Szasz, O., 384.

Tauberiano. Teorema, 385.
Taylor. Fórmula de, 360.
Teorema(s) de la aplicación abierta, 90, 202, 203, 382.
— — de Riemann, 257, 264, 276.
— de aproximación de Weierstrass, 294, 383.
— de Baire, 89.
— de Banach-Steinhaus, 90, 93, 342.
— de categoría, 90.
— de Cauchy, 193, 195, 206, 289, 355, 358.
— de la convergencia dominada, 21, 24, 168.
— — monótona, 16.
— de convexidad, 240.
— de Denjoy-Carleman, 361.
— de Egoroff, 65.
— de extensión, 96, 370.
— — de Tietze, 370.
— de factorización de Weierstrass, 284.
— de Fatou, 232.
— de Fejér, 83.
— de Fubini, 131, 135, 380.
— de la función inversa, 161.
— fundamental del cálculo, 153.
— de Gelfand-Mazur, 341.
— del gráfico cerrado, 106.
— de Green, 370.
— de Hahn-Banach, 96, 100, 252, 294, 341, 342, 348.
— de Harnack, 226.
— de Hausdorff-Young, 242.
— de Heine-Borel, 30.
— de inversión, 172, 200, 202.
— de Liouville, 200, 207, 264, 341.
— de Lusin, 47.
— de maximalidad, 376.
— — de Hausdorff, 79, 98, 166, 344, 376.
— de Mergelyan, 371, 386.
— de Mittag-Leffler, 254, 287.
— del módulo máximo, 102, 200, 244, 253, 343.
— de monodromía, 308.
— de Morera, 196.
— de Müntz-Szasz, 294, 299.
— de Paley-Wiener, 355, 356.
— de Picard, 313, 384.
— de Plancherel, 174.
— de Radó, 245.
— de Radon-Nikodym, 113, 116, 144.
— de recubrimiento de Vitali, 381.
— de representación, 35, 73, 118, 121.
— — de Riesz, 30, 35, 121, 231, 252, 379.
— del residuo, 211, 215.
— de Riesz-Fischer, 77, 83, 84, 322.
— de Rouché, 213.
— de Runge, 251, 253, 383.
— de Stoilov, 382.
— Tauberiano, 385.
— de las tres circunferencias, 246.
— de unicidad, 174, 198, 232.
— de Vitali, 125.
— de Vitali-Carathéodory, 48, 157, 379.
Thorin, G. O., 383.
Tietze. Teorema de extensión de, 370.
Tipo exponencial, 354, 364, 386.
Topología, 3.
Torre, 376.
Transformación afín, 359.
— bilineal, 260, 278.
— lineal, 28.
— — acotada, 88.
— diferenciable, 158, 340.
Transformada de Borel, 386.
— de Fourier, 167, 183, 353.
— de Gelfand, 351.
— de Plancherel, 174.
Transitividad, 305.
Trasladada de un conjunto, 43.
— de una función, 170.
Triángulo, 191.

Unidad, 139, 178, 339.
Unión, 2.
Uniparamétrica. Familia, 209, 306.
Urysohn. Lema de, 33, 378.

Valor asintótico, 247.
Varberg, D. E., 381.
Variación acotada, 109, 149.
— negativa, 111.
— positiva, 112.
— total, 109, 149.
Vector unidad, 88.
Vitali. Teorema de, 125.
— — de recubrimiento, 381.
Vitali-Carathéodory. Teorema de, 48, 157, 379.
Volumen, 44.

Weierstrass, K., 280, 313.
— Teorema de aproximación, 294, 383.
— — de factorización, 284.
Wermer, J., 385.
Wiener, N., 349, 355.

Young, W. H., 1, 383.

Zermelo, E., 386.
Zorn. Lema de, 79.
Zygmund, A., 383.